Edición internacional

matemáticas financieras

TERCERA EDICIÓN

PEARSON Prentice Hall®

José Luis Villalobos

Significado de literales

A Amortización, porción de la renta que se abona al capital.

a Base de la potencia enésima del número a.
Base de los logaritmos.

a_1 Primer término de una sucesión.

a_i i-ésimo término en las sucesiones.

a_n Término enésimo de las sucesiones.

a^n Enésima potencia del número a.

$\sqrt[n]{b}$ Raíz enésima del número b.

C Capital, Valor presente, Valor actual, Principal.
Valor de compraventa de los títulos de inversión.
Valor original de un activo que se deprecia.

CI Certificados de inversión.

CPP Costo porcentual promedio de captación.

CT Certificados del Tesoro.

C_0 Precio de mercado de una obligación o bono en la fecha de cupón anterior a la compraventa.

C_1 Precio de mercado de una obligación o bono en la fecha de cupón posterior a la compraventa.

C_n Valor de rescate, es el valor al final de la vida útil de un activo que se deprecia.

C_{np} Valor final de una cantidad C, luego de tener np incrementos o decrementos.

C_k Valor contable o valor en libros al final del k-ésimo año de un activo que se deprecia.

D Descuento.
Deudas, un miembro de la ecuación de valores equivalentes.

d Diferencia común en las progresiones aritméticas.
Tasa de descuento.
Diferencia entre dos rentas sucesivas en la amortización constante.
Diferencia en la amortización de créditos y en la constitución de fondos de renta variable aritméticamente.
Tasa de depreciación.

D_x y N_x Símbolos de conmutación

E Precio neto o efectivo en la compraventa de bonos y obligaciones.

e Tasa efectiva de interés compuesto.
Base de los logaritmos naturales, $e = 2.71828$ aproximadamente.

f Tasa de variación en las rentas de las amortizaciones y fondos de renta variable geométricamente.

g Tasa de interés global.

I Intereses, diferencia entre el monto y el capital.

IPC Índice de precios y cotizaciones.

i Tasa de interés simple.
Tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año.
Tasa de interés nominal.
Tasa de inflación en la depreciación de activos.

i/p Tasa de interés por periodo capitalizable cada periodo.

i_e Tasa efectiva de rendimiento anual o mensual de las acciones.

K Constante de proporcionalidad.

$\mathrm{Ln}(x)$ Logaritmo natural de x, la base es e.

$\mathrm{Log}(x)$ Logaritmo común de x, la base es 10.

M Monto de un capital, Valor acumulado, Valor futuro, Montante.
Valor de redención o vencimiento de los títulos de inversión.

m Número de términos de una sucesión o serie (n).

n Número de años del plazo en anualidades e inversiones con interés compuesto.
Tiempo o plazo con interés y descuento simple.

${}_nE_x$ Factor de actualización demográfico-financiera.

np Número de periodos o rentas en anualiddes, amortizaciones y fondos.

P Valor comercial o valor descontado de un documento que se negocia antes de su vencimiento.
Pagos, un lado de la ecuación de valores equivalentes.
Probabilidad de un evento.

PIB Producto interno bruto.

p Frecuencia de conversión, número de veces por año en que se capitalizan los intereses.
Número de rentas por año en las anualidades, la amortización de créditos y la constitución de fondos.

P_x Probabilidad de estar vivo a la edad x.

$p(\mathrm{A})$ Probabilidad del evento A.

q Número de días del plazo, para evaluar las tasas efectivas de rendimiento anual o mensual en inversiones a corto plazo.

q_x Probabilidad de fallecer a la edad x.

R Renta, pago periódico en las anualidades, los fondos y la amortización de créditos.
Valor de cada cupón en los bonos y obligaciones.
Valor de la depreciación anual.

r Razón constante en las progresiones geométricas.
Tasa de interés anual que paga en periodos o en cupones la empresa emisora de títulos de inversión.

S Saldo insoluto en la amortización de créditos (SI).

S_n Suma de los primeros términos de una serie (S_m).

SPD Saldo promedio diario, en tarjetas de crédito e inversión.

U Utilidades, sinónimo de intereses en inversiones.

v Razón de variación constante en una sucesión.
Esperanza matemática.

X Literal que más se utiliza para representar a las incógnitas, en las ecuaciones.

$A, B, L, K, V, X, Y, A_f, C_f, M_f, R_f$, etc. Son variables auxiliares que no tienen significado específico alguno, pero se utilizan para simplificar y desarrollar las fórmulas en este libro.

Matemáticas financieras

Tercera edición

José Luis Villalobos
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas
Universidad Autónoma de Guadalajara, México

Revisión técnica

Karl Von Eicken
Coordinador de Métodos Cuantitativos en Finanzas
Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Ma. del Carmen Pérez Huerta
Directora de Administración Financiera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Estado de México

Elías Ramírez Ramírez
Profesor Investigador
Departamento de Contabilidad y Finanzas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Ciudad de México

José Cruz Ramos Báez
María de Guadalupe Arroyo Santiesteban
Ignacio García Juárez
Departamento de Matemáticas
Universidad Panamericana, México

Adaptación

Elizabeth Cascante Gómez
Profesora titular
Área de Finanzas y Gerencia
Universidad Latinoamericana de Ciencia y Tecnología (ULACIT)
Universidad Latina de Costa Rica

Con la colaboración de
Pedro A. Marrone Gaudiano
Profesor titular
Departamento de Matemática
Universidad de Panamá

PEARSON Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

VILLALOBOS, JOSÉ LUIS

Matemáticas financieras. Tercera edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-970-26-1584-2
Área: Matemáticas

Formato: 18.5 × 23.5 cm Páginas: 640

Editor: Melvin Núñez Víquez
e-mail: melvin.nunez@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de Producción: Rodrigo Romero Villalobos

TERCERA EDICIÓN, 2009

ISBN 10: 970-26-1584-4
ISBN 13: 978-970-26-1584-2

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

PEARSON
Educación ®

Contenido

Prólogo a la edición internacional

Los procesos de cambio y la realidad financiera que se plantean hoy en día obligan a los profesionales en los campos de administración, contaduría, ingeniería, economía y carreras afines, a manejar herramientas y técnicas financieras que les permitan obtener información básica para la toma de decisiones, tanto en inversión como en la selección de fuentes de financiamiento que les brinden condiciones favorables.

Desde esta perspectiva, la aplicación adecuada de las matemáticas financieras se torna un factor fundamental en la administración moderna, pues facilita las herramientas que se utilizan en los procesos de toma de decisiones, que le permitan a la empresa ser competitiva en el mercado donde se desarrolla y, a la vez, usar de manera óptima los recursos disponibles.

Esta obra precisamente se orienta a brindar al lector las técnicas básicas para aplicar en forma adecuada los procedimientos que les faciliten conocer el uso del dinero, su valor y su capacidad de compra a través del tiempo, así como su aplicación en proyectos de inversión.

Esta edición conserva las mismas características de las ediciones anteriores. Se mantuvo el número de problemas propuestos y resueltos con la finalidad de guiar al estudiante en el desarrollo de los diversos temas. También, en sus primeros capítulos se sigue incluyendo una introducción a las matemáticas que, en general, refuerza las bases que le permitan a los estudiantes fortalecer sus conocimientos.

Esta edición plantea como novedad la utilización del dólar como moneda genérica, de tal forma que sea más aplicable a todos los países latinoamericanos y que se pueda convertir a la moneda local, según su tipo de cambio, para los objetivos necesarios.

En el apéndice A se encuentran las respuestas de los ejercicios impares y en el apéndice B se incluye la tabla 1 (número de cada día del año). Además en la página Web www.pearsoneducacion.net/villalobos se incluyen:

- Un glosario de términos financieros que se utilizan en el libro.
- Un instructivo para calculadora científica que también es útil para la calculadora financiera HP-12C.
- Varias tablas financieras que han resultado muy útiles para calcular plazos cuando los tiempos se miden en días.
- Una tabla con las aplicaciones que aparecen al final de cada capítulo.

Esperamos que esta obra contribuya significativamente al desarrollo profesional de todos sus usuarios.

LIC. ELIZABETH CASCANTE G.
M.B.A.

Introducción

Porque en los tiempos modernos todo mundo aspira a lograr el máximo beneficio como comprador y los más atractivos rendimientos como inversionista, las matemáticas financieras se han constituido en una de las áreas más útiles e interesantes de la matemática aplicada.

La realidad financiera y comercial en nuestros países demanda cada vez más un mayor número de profesionales y personal capacitado para asesorar y dar orientación apropiada a quienes disponen de capitales para invertir y ponerlos a generar intereses y otros beneficios, así como a quienes se ven en la necesidad de conseguir dinero prestado ya sea en efectivo, en bienes o en servicios.

A estos profesionales —administradores, actuarios, contadores, economistas y hombres de negocios en general— se dedica esta obra, que es resultado de un esfuerzo por mostrar, de forma clara, sencilla y accesible, los procedimientos y las técnicas que nos permiten conocer cómo el dinero pierde o cambia su valor y capacidad de compra con el paso del tiempo; decimos esto porque es posible asegurar que el estudio de la matemática de las finanzas se reduce a ello: a aprender cómo utilizar de manera correcta las herramientas y la metodología para trasladar, en el tiempo y de forma simbólica, los capitales y los montos que intervienen en cualquier operación de carácter financiero y comercial.

Esta tercera edición, con algunas novedades, conserva las características esenciales que resultaron útiles y atractivas para los lectores de las ediciones anteriores, entre las que destacan:

- Una gran cantidad de ejemplos se han resuelto con más de un método, principalmente para comprobar los resultados, ya que saber que algo está bien hecho es altamente motivante para quienes estudian matemáticas o cualquier otra área del conocimiento o actividad del ser humano.

- Suponiendo situaciones de la vida real, se justifican casi todas las fórmulas y resultan de fácil comprensión, aun para quienes no habían tenido contacto con los temas que aquí se abordan.
- Creemos que los principales obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas son la carencia y el olvido de los conocimientos básicos de nuestros estudiantes, por ello se han incluido en los primeros capítulos, donde se repasan las reglas y los procedimientos del álgebra elemental, así como las progresiones aritméticas y geométricas. Consideramos que con ello, se facilitarán, en buena medida, la comprensión y la asimilación de los capítulos posteriores, aunque, es justo agregarlo, no se perderá continuidad si no se incluyen en un curso regular de matemáticas financieras.
- Con la idea de que una imagen dice más que mil palabras, se añadieron gráficas, principalmente las que se refieren a los diagramas de tiempo, los cuales, como se verá a partir del capítulo tercero, son útiles para representar y visualizar las cantidades de dinero en el tiempo, lo que facilita el procedimiento y la resolución de los problemas propuestos.
- Se incluyen tablas y cuadros de amortización de créditos y de constitución de fondos, que ilustran las formas en que se amortiza o se reduce un préstamo, así como la forma en que crece el capital que se acumula en un fondo, cuya utilidad inmediata estriba en que tales cuadros constituyen por sí mismos un importante método para comprobar los resultados analíticos.

En el apéndice que puede consultar www.pearsoneducacion.net/villalobos se incluyen:

- Las respuestas de los problemas pares e impares propuestos.
- Un glosario de términos financieros que se vienen en el libro.
- Un instructivo para calculadora científica, pero también útil para la financiera HP 12 C.
- Varias tablas financieras, incluyendo la primera, que ha resultado muy útil para calcular plazos cuando los tiempos se miden en días.
- También viene una tabla de las aplicaciones que aparecen al final de cada capítulo.

Las novedades de esta tercera edición que destacan son:

- Se han actualizado las cantidades de dinero, los tiempos y los plazos, pero sobre todo las tasas de interés y de descuento en todos los problemas propuestos y resueltos, para acercarlos más a la realidad actual de los países latinoamericanos.
- En forma adicional a los ejercicios de falso y verdadero, de completar oraciones y de respuestas breves, se han incluido problemas de opción múltiple, lo cual enriquece las oportunidades de repasar y reafirmar los conocimientos adquiridos en el aula. También se incrementó el número de ejemplos de aplicación en cada capítulo.

Asimismo, se adicionaron temas que no se trataron en la edición anterior, entre los que sobresalen:

- Razones y ecuaciones de proporcionalidad (capítulo 1).

- Amortizaciones con interés simple (capítulo 3).
- La regla comercial y el descuento compuesto, así como las operaciones con interés compuesto (capítulo 4).
- Un instructivo de solución de problemas con calculadora financiera, además del que se tenía para la científica.
- El estudio de las anualidades contingentes y las rentas vitalicias, que es la novedad más importante, así como una sección de temas de probabilidades (capítulo 9).

Agradecimientos

A todos los profesores que utilizan y recomiendan mi libro como texto u obra de consulta en sus cursos, a quienes también agradezco sus valiosas sugerencias e importantes comentarios para esta tercera edición.

A Pearson Educación, a los editores Luis Cruz Castillo y Felipe Hernández Carrasco, así como a todo el personal que de alguna manera participó en la realización y también a los involucrados en la promoción de este libro.

A los revisores técnicos, por su tiempo y experiencia vertidos en el mejoramiento de la calidad del proyecto.

A quienes me ayudaron con la captura del material manuscrito y con la resolución de algunos problemas y ejercicios propuestos.

Sus comentarios, sugerencias y opiniones sobre el trabajo que tienen en sus manos serán bienvenidos en la dirección electrónica del autor: luisvilla_lobos@yahoo.com.mx, o en la editorial.

Al estudiante

Es probable que tu interés y tu entusiasmo por aprender matemáticas no sea tan importante como tu dedicación y preferencia por otras asignaturas, por lo que hacer referencia a las causas que dieron lugar a estas actitudes o pretender justificarlas no es tan importante como encauzarlas a la búsqueda de recursos que propicien tal vez no el gusto por las matemáticas, pero sí su mejor comprensión, sobre todo en un sentido conceptual y de contexto, sin menosprecio de su utilidad práctica, que es fundamental.

Creemos conveniente recordar lo siguiente, que puede ayudarte a lograr mejores resultados al final de tus cursos, particularmente de matemáticas:

- Sabemos de profesionistas muy destacados que probablemente no fueron estudiantes sobresalientes, pero ten en cuenta que prepararse mejor cada día incrementa las posibilidades de éxito en el ejercicio profesional. Es común que los mejores alumnos logren los mejores empleos o sean los mejores empleadores.
- Recuerda que es necesario, pero no suficiente, entender lo que en el aula tus profesores te explican, de seguro de la mejor manera posible, pero también es indispensable que después repases y reafirmes lo que ahí te enseñaron. La mejor manera de lograr lo anterior será que realices todos los ejercicios y las experiencias de aprendizaje que te encomienden; de otra forma, tal vez se logre el éxito en la enseñanza, pero no en el aprendizaje, binomio fundamental en nuestra actividad como docente o como alumnos.
- Sabemos que nadie nace sabiendo, por lo que para aprender es necesario que clarifiques todas las dudas e inquietudes que surjan en tus clases: No temas preguntar ni pienses en el qué dirán; recuerda que es mejor hacer preguntas tontas que quedarse en la ignorancia

toda la vida, y que si no preguntas tu presencia en la universidad será inútil, lo mismo que los esfuerzos, los sacrificios y la abstención de entretenimientos que conlleva ser un buen estudiante.

- No te desesperes ni abandones tu actividad de aprendizaje cuando no sepas cómo empezar a resolver un problema o no llegues a la solución correcta. Recuerda que aun con mucha práctica y experiencia, no siempre se obtienen respuestas acertadas en un primer intento, y no pocas veces es indispensable armarse de paciencia y perseverancia para lograrlo.

Deseamos fervientemente que en esta tercera edición encuentres el soporte y el complemento adecuados de la insustituible labor, orientación y enseñanzas del profesor. Además, nos será muy satisfactorio saber que nos constituiremos en una parte importante de tu preparación y desarrollo profesionales.

J. Luis Villalobos Pérez

Capítulo 1

Fundamentos de matemáticas

Contenido de la unidad

En este primer capítulo se examinan algunos conceptos básicos del álgebra ordinaria, que son importantes en el estudio y el aprendizaje de las matemáticas financieras y otras áreas de la matemática aplicada.

Se inicia con algunas propiedades de los números, los exponentes y sus leyes, así como la simplificación y las operaciones elementales de expresiones algebraicas. Sin profundizar en el tema, se dan los elementos indispensables para plantear y resolver ecuaciones, principalmente lineales, ya que en casi todos los capítulos subsecuentes se requiere que el estudiante tenga la habilidad y la destreza para encontrar la solución de las ecuaciones.

Posteriormente se trata el tema de *logaritmos*, que son particularmente importantes, por ejemplo, para resolver ecuaciones donde la incógnita es el exponente, que es una situación que se presenta cuando se requiere conocer el plazo de una inversión o el número de pagos para amortizar un crédito. También se analiza el concepto de *tanto por ciento*, el cual es fundamental en cualquier estudio de índole financiera o comercial.

El capítulo concluye con el planteamiento y la resolución de problemas de aplicación.

Puesto que quizás este capítulo es uno de los más arduos del curso, el autor recomienda estudiarlo con una buena dosis de paciencia, detenimiento y muchas ganas de aprender, teniendo en cuenta que su cabal comprensión y asimilación facilitarán el estudio de los que siguen.

1.1 Los números

Hablar de matemáticas aplicadas en cualquiera de sus especialidades es referirse a números. Por ello, nuestro punto de partida es una breve introducción al estudio de las propiedades y las reglas, como aquellas que se utilizan en las operaciones con números.

Diariamente se manejan cantidades que se representan mediante diferentes tipos de números, como los enteros, los fraccionarios, los positivos, los negativos, los pares, etcétera. Todos ellos forman parte de lo que se conoce como el conjunto de los *números reales*.

Por supuesto que existen otros números que no pertenecen a ese conjunto, los que no son reales, los llamados *imaginarios*, pero poco tienen que ver con la matemática de los negocios y las finanzas. Dos de estos números son, por ejemplo, las dos soluciones de la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Es decir, números imaginarios que se denotan con $\pm\, i$.

Redondeo de números

El criterio más generalizado para redondear los números es el que considera lo siguiente:

a) Si el primer dígito que se desprecia es mayor que cinco, entonces el que se retiene se incrementa en 1; por ejemplo: 42.53621, con dos decimales queda: 42.54.

b) Si el primer dígito que se desprecia es menor que cinco, el que se retiene no cambia; por ejemplo, el redondeo de 2.328543 a cuatro decimales es 2.3285.

c) Si el primer dígito que se desprecia es igual a 5, hay dos opciones:

l. El último dígito que se retiene se incrementa en uno; si a la derecha del 5 hay, por lo menos, uno que sea mayor que cero, por ejemplo, 5.085013 se redondea como 5.09 con dos decimales.

2. Si a la derecha del 5 hay sólo ceros y el último que se retiene es par, éste no cambia, pero se incrementa en uno si es impar. Por ejemplo, 425.32500 o 425.325 se redondea a 425.32, y 0.8375 se redondea a 0.838, con tres decimales.

Para tener mayor precisión en el resultado final, se recomienda no hacer el redondeo en las operaciones y resultados parciales, sino hasta el final.

Ejemplo 1

Al redondear el número $X = 17.42379035$ a siete, cinco, tres y una cifra decimal, queda, respectivamente:

$X = 17.4237904$	Con siete decimales
$X = 17.42379$	Con cinco decimales
$X = 17.424$	Con tres decimales
$X = 17.4$	Con una cifra decimal

1.2 Exponentes, radicales y leyes de exponentes

La enésima potencia de un número.

Definición 1.1

Si a es un número real y n es entero positivo, entonces, la **enésima potencia** de a se define como:

$$a^n = \underbrace{a(a)...(a)}_{n \text{ factores}}$$

donde a es la **base** y n es el **exponente**.

Note que la enésima potencia de un número es una multiplicación sucesiva.

Ejemplo 1

a) La segunda potencia de 3 es 9 porque $3^2 = (3)(3) = 9$.

b) La cuarta potencia de (-5) es 625 ya que $(-5)^4 = (-5)(-5)(-5)(-5) = 625$.

c) La vigésima potencia de 1.0215 es

$$(1.0215)^{20} = 1.530267728$$

Notas*:

i. Recuerde que al multiplicar o dividir dos números con el mismo signo, el resultado es positivo; mientras que será negativo cuando tengan signo contrario.

ii. Si el exponente de un número es muy grande o se involucran decimales, es necesario recurrir a la calculadora electrónica para obtener la potencia del número.

* En el apéndice B (véase www.pearsoneducacion.net/villalobos) están las instrucciones para calculadoras con lógica operacional RPN (Reverse Polish Notation).

Cuando el exponente es cero o negativo, se aplica la siguiente definición:

Definición 1.2

Si a es diferente de cero, entonces,

$$a^0 = 1$$

y si el exponente es negativo, entonces,

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Esto significa que todo número diferente de 0, elevado a la potencia 0, es igual a 1 y un exponente negativo se hace positivo o, mejor dicho, cambia su signo si se pasa al denominador de una fracción; y también en este caso, la base debe ser diferente de 0 porque no se puede dividir entre cero.

Ejemplo 2

a) $(32.5)^0 = 1$

b) $(1+i)^{-1} = 1/(1+i)$

c) $(-382.45)^0 = 1$

d) $(3-x)^{-5} = 1/(3-x)^5$

e) $\dfrac{\text{A}}{(1.053)^4} = (\text{A})\dfrac{1}{(1.053)^4} = \text{A}(1.053)^{-4} = \text{A}(0.813366938)$

f) 0^{-3} no está definido, la base no debe ser cero.

Los exponentes fraccionarios indican raíces de números que involucran **radicandos**, ya que así se llama lo que está dentro del símbolo $\sqrt{\ }$ y se aplica la siguiente definición:

Definición 1.3

La raíz enésima de b es

$\sqrt[n]{b} = b^{1/n} = a$, siempre que $a^n = b$

Cuando el *orden de la raíz n*, es par, b debe ser no negativo.

Ejemplo 3

a) La raíz cúbica de 125 es 5 porque $5^3 = 125$

b) La raíz cuarta de 81 es 3 o –3 porque $3^4 = 81$ y $(-3)^4 = 81$

c) La raíz doceava de 35.82135 es

$$\sqrt[12]{35.82135} = 1.347447426 \text{ porque } (1.347447426)^{12} = 35.82135$$

Para simplificar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones, se emplean las siguientes leyes exponenciales:

Leyes de exponentes

- En la multiplicación de dos números con la misma base, se suman los exponentes y en la división se restan, es decir:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\text{y} \quad a^m/a^n = a^{m-n}, \text{ siempre que } a \neq 0$$

- La enésima potencia del producto de dos números es igual al producto de las potencias, y la potencia enésima del cociente de dos números es igual al cociente de las potencias, esto es:

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \text{y} \quad (a/b)^n = a^n/b^n, \text{ siempre que } b \neq 0$$

- La enésima potencia de la potencia emésima de un número, se obtiene multiplicando las potencias, es decir:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Ejemplo 4

a) $3^2(3^5) = 3^{2+5} = 3^7$

b) $5^2(5)^{-3} = 5^{2+(-3)} = 5^{-1} = 1/5$

c) $8^5/8^3 = 8^{5-3} = 8^2$

d) $(7xy)^3 = 7^3x^3y^3$

e) $\left(\sqrt[6]{(1+x)}\right)^6 = 1 + x,\quad 1 + x$ debe ser positivo o cero

El 6 de la potencia, se elimina con el 6 de la raíz en el último inciso, porque si un número se eleva a la potencia n y después se le saca la raíz enésima, o viceversa, entonces resulta el mismo número, es decir,

$$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{1/n} = a^{n(1/n)} = a^{n/n} = a^1 = a$$

Advertencia

La raíz del producto de dos números es igual al producto de las raíces, pero esto no se cumple para la suma. Por ejemplo:

$$\sqrt{4+9} \text{ no es igual a } \sqrt{4} + \sqrt{9}$$

Note, además, que si el exponente de a es de la forma m/n, entonces:

$$a^{m/n} = a^{m(1/n)} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 5

$8^{2/3} = 8^{2(1/3)}$

$= \sqrt[3]{8^2}$

$= \sqrt[3]{64} = 4$

también: $8^{2/3} = 8^{(1/3)2}$

$= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2$

$= 2^2 = 4$

Ejercicios 1.2

En los problemas 1 a 12, obtenga una expresión equivalente.

1. $(-3)^4$

2. 0^{25}

3. $(35)^{10}$

4. $(15)^0$

5. 2^{-3}

6. $8^{4/3}$

7. $[(435)^5]^0$

8. $\sqrt[3]{1,000}$

9. $\left(\sqrt[5]{1+i/3}\right)^5$

10. $(256)^{1/4}$

11. $(-3.28)^0$

12. $(35.4025)^{1/2}$

En los problemas 13 a 18, complete la frase.

13. La raíz cúbica de 64 es 4 porque ______________________________

14. $\sqrt[5]{32} = 2$, ya que ______________________________

15. Puesto que $3^4 = 81$, entonces, la raíz __________ de __________ es __________

16. La tercera potencia de l0 es 1,000, entonces, la raíz __________ de___ es __________

17. 0^{-10} no está definido porque ______________________________

18. $3^{-3} = 1/27$ porque ______________________________

En los problemas 19 a 28, escriba una expresión equivalente y simplifique.

19. $(3)^4(3)^2$

20. $5^{-1}(5^6)$

21. $(7^0x^3y^{-1})^2$

22. $4^3/(4^{-1}4^3)$

23. $(5^45^3)/5^8$

24. $(-2)^7(-2)^{-3}/(-2)^3$

25. $\sqrt{x}\sqrt{y}$

26. $\sqrt{8}\sqrt{32}$

27. $\left(\sqrt[3]{1+y}\right)^6$

28. $\sqrt{x+y}\,/\,(x+y)^{3/2}$

En los problemas 29 a 40, obtenga las raíces y las potencias indicadas con el auxilio de una calculadora electrónica.

29. $\sqrt[3]{25.3}$

30. $(3.281)^{3/4}$

31. $(8.289)^{1/3}$

32. $\sqrt[4]{425} - \sqrt[3]{41.3}$

33. $(3.775)^{3/2}$

34. $(43.8)^{2/3}$

35. $\sqrt[5]{84.39}$

36. $(114.25)^{-3}$

37. $(25.08)^{-5}$

38. $(1.0081)^{10}$

39. $(457.6)^{5/4}$

40. $\sqrt[6]{1.0253}$

Recuerde que $a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$ donde $a >$ o si n es par

En los problemas 41 a 49, que se refieren a la sección 1.1, redondee el número dado a seis, cinco, tres y dos cifras decimales.

41. 81.23210547

42. 50.48638976

43. 3.9950013

44. 10.0372593

45. 0.00396589

46. 31.45628763

47. 701.40102503

48. 8.08031253

49. 16.37905391

En los problemas 50 a 63, seleccione la opción correcta, justificando la elección.

50. Es una expresión equivalente a $\sqrt{x^2 + y^2}$

a) $x + y$ *b*) $(x^2 + y^2)^{1/2}$ *c*) $(x^2)^{1/2} + (y^2)^{1/2}$ *d*) $\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2$ *e*) Otra

51. Obtenga una expresión equivalente a $\left(\sqrt[3]{2 + i/3}\right)^3$

a) $[2^{1/3} + (i/3)^{1/3}]^3$ *b*) $2 + i/3$ *c*) $\sqrt{2^3 + (i/3)}^{\,3}$ *d*) $\sqrt[3]{8 + i^3/27}$ *e*) Otra

52. Es una expresión que no es equivalente a $(64)^{4/3}$

a) 256 *b*) $\sqrt[3]{64^4}$ *c*) $\left(\sqrt[3]{64}\right)^4$ *d*) $\left(2^2\right)^4$ *e*) Otra

53. Al simplificar la expresión $\left(5^6\right)^{-1}/5^3$ queda:

a) 5^2 *b*) 5^{-2} *c*) 5^{-9} *d*) 5^{-3} *e*) Otra

54. La raíz cuarta de 81 es igual a 3, porque

a) $3^4 = 81$ *b*) $(81)^{1/3} = 4$ *c*) $\sqrt{81} = 3^2$ *d*) $\sqrt[3]{81} = 3^{-2}$ *e*) Otra

55. Es una expresión equivalente a $(x + y)^{3/4}\sqrt[3]{x + y}$

a) $(x + y)^{1/4}$ *b*) $(x + y)^{13/12}$ *c*) $(x + y)^{5/12}$ *d*) $(x + y)^{9/4}$ *e*) Otra

56. Si se simplifica la expresión $(-3)^4\,(-3)^{-2}\,(-3)^{-3}$ resulta

a) $-1/3$ *b*) $1/3$ *c*) 3 *d*) $(-3)^{24}$ *e*) Otra

57. Al simplificar $\left[(-4)^{4}/(-4)^{-3}\right]^{-2}$ resulta

a) $(-4)^{-2}$ *b*) $(-4)^{-14}$ *c*) $(-4)^{24}$ *d*)$(-4)^{5}$ *e*) Otra

58. Una expresión equivalente a $5^3\, x^0\, y^{-3}$ es

a) $(5xy)^0$ *b*) $(5/y)^3$ *c*) $(5xy)^{-9}$ *d*) $(5y)^{-9}$ *e*) Otra

59. $(x + 3)^{-3}$ no está definida, cuando $x = -3$ porque

a) El exponente y x son iguales
b) El 3 de la base tiene signo contrario al exponente
c) No existe la división entre 0
d) La suma del exponente y la constante de la base es igual a 0
e) Otra

60. Una expresión más simple para $5^0\, a^3\, b^4\, a^{-3}$ es

a) b^4 *b*) $a^{-9}\, b^4$ *c*) $5a^0\, b^4$ *d*) $5b^4 / a^6$ *e*) Otra

61. Un valor equivalente a $\left[4(-2)\right]^{5/3}$ es:

a) 32 *b*) -32 *c*) no existe *d*) $8^{3/5}$ *e*) Otra

62. Al simplificar la expresión $\sqrt{x+y}\,(x+y)^{3/4}/(x+y)^{5/4}$, resulta:

a) $x + y$ *b*) 1 *c*) 0 *d*) $(x+y)^{5/2}$ *e*) Otra

63. Al redondear $z = 43.2535001$ a tres cifras decimales queda

a) 43.253 *b*) 43.254 *c*) 43.255 *d*) 43.2535 *e*) Otra

1.3 Expresiones algebraicas, ecuaciones y solución de ecuaciones

Expresiones algebraicas

El proceso que seguimos cuando nos enfrentamos a los problemas de cualquier área del conocimiento donde intervengan las matemáticas consiste básicamente de tres etapas:

1. Planteamiento del problema, utilizando un modelo matemático, por ejemplo, una ecuación.
2. Solución o desarrollo del modelo que se ha planteado, es decir, resolver la ecuación.
3. Comprobar los resultados, si ello es posible, pero principalmente interpretarlos correctamente.

Con la habilidad algebraica, el uso de la calculadora electrónica y la extraordinaria rapidez y precisión de la computadora se facilita la segunda etapa de este proceso; sin embargo, la primera es en realidad la más difícil, puesto que en ésta es donde intervienen el razonamiento y, en buena medida, la creatividad y experiencia de quienes están resolviendo el problema; además de que de esta primera etapa depende la buena interpretación del resultado.

Sólo por mencionar un ejemplo, suponga usted que un artículo para el aseo personal se vende en $9.50 la pieza. ¿Cuántos puede comprar la señora González con $75.00?

Planteamiento

Si x es el número de piezas entonces debe cumplirse que $9.50x = 75$

Solución

Se resuelve la ecuación dividiendo ambos lados por 9.50

$$x = 75/9.50 \qquad \text{o} \qquad x = 7.8947$$

Interpretación

Puesto que x debe ser un número entero, no se venden fracciones de pieza, y la señora González puede comprar siete piezas.

Definición 1.4

Expresión algebraica es el resultado de combinar números y letras relacionándolos mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y exponenciación.

Ejemplo 1

Las siguientes son expresiones algebraicas:

a) $3x^2 - 2n$

b) $(5 - x)(10 + 3x)$

c) $10x + 4.2$

d) $\sqrt{1 + i/6}$

e) $(1 + i/12)^3$

f) $C + Cin$

g) $\dfrac{1 - (1 + ni)(1 + i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$

Ecuaciones

Definición 1.5

Ecuación es el resultado de igualar dos expresiones algebraicas que se llaman *lados* o *miembros* de la ecuación.

Ejemplo 2

Las siguientes son ecuaciones:

a) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

b) $3x + 2/3 = x$

c) $x + 3 = x^2 - 2$

d) $I = Cin$

e) $x^3 - 2x = 0$

f) $M = C(1 + in)$

g) $\sqrt[3]{1+i} = 3.52$

h) $A = bh/2$

Solución de ecuaciones

Resolver una ecuación es encontrar el valor o los valores de las incógnitas que las hacen verdaderas. Tales valores forman la **solución** de la ecuación.

Para resolver una ecuación:

Dependiendo del tipo de ecuación es el método que se emplea para hallar su solución; no obstante, las tres propiedades básicas que se emplean en la mayoría de las ecuaciones son las siguientes:

a) Se suma, o se resta, cualquier número a los dos miembros de la ecuación (*propiedad aditiva*).

b) Se multiplican los dos lados por cualquier número que no sea cero (*propiedad multiplicativa*).

c) Cualquier parte de la ecuación se reemplaza por otra igual (*principio de sustitución*).

Note usted que como consecuencia de la propiedad multiplicativa podemos elevar a la misma potencia los dos miembros de la ecuación, así como también sacar la misma raíz enésima. También es cierto que al aplicar cuando menos una vez estas propiedades, se obtiene, se dice, una ecuación equivalente a la original.

Ecuaciones lineales

De acuerdo con su forma y las incógnitas que presentan, las ecuaciones son *lineales, cuadráticas, cúbicas, exponenciales, logarítmicas,* etcétera, y de una o más variables o incógnitas. A continuación se estudian las lineales.

Definición 1.6

Las **ecuaciones lineales** con una variable x tienen la forma:

$$ax + b = 0 \text{ donde } a \neq 0$$

Ejemplo 3

Las siguientes son ecuaciones lineales. Tal como están, o en su forma reducida, resuélvalas.

a) $3x + 5 = 8 - x$ *c*) $(1 + i/4)^{12} = 1.25$ *e*) $\sqrt[4]{3 - x} = 1.2832$

b) $x + 2/3 = 5 - x/2$ *d*) $3{,}750 = 4{,}175(1 - 3d)$

solución

En todos los casos, el objetivo es aislar la incógnita, dejándola sola en un lado de la ecuación.

a) Se suma una x a ambos lados de la ecuación, o como comúnmente se dice: la x que está restando se pasa sumando al lado izquierdo. También se resta un 5 de cada lado, se suman los términos semejantes y se divide entre 4. Finalmente el cociente es la solución de la ecuación, es decir:

$$3x + 5 = 8 - x$$
$$3x + x = 8 - 5$$
$$4x = 3$$
$$\text{o } x = 3/4$$

es la solución, que se comprueba sustituyendo este valor por x en la ecuación dada.

b) Aunque hay otras opciones, se recomienda comenzar eliminando las fracciones. Para ello se multiplican los dos miembros por 6, el común denominador. Después se resta un 4, y se suma $3x$ a los dos lados de la ecuación. Por último, todo se divide entre 9 para obtener la solución, esto es,

$$(x + 2/3 = 5 - x/2)6$$
$$6x + 4 = 30 - 3x \qquad (2/3)6 = 4 \quad \text{y} \quad (x/2)6 = 3x$$
$$6x + 3x = 30 - 4$$
$$9x = 26$$
$$x = 26/9 \qquad \text{o} \qquad x = 2.\overline{8}$$

La testa, o línea horizontal, sobre el 8 indica que éste se repite indefinidamente, sin límite.

c) En este caso hay que despejar la incógnita i, y para eso notamos que "estorban" el 12 del exponente, el 1 del paréntesis y el 4 que divide a la incógnita i. El 12 se elimina sacando la raíz doceava a ambos lados, el 1 pasa restando y, finalmente, el 4 pasa multiplicando al lado derecho de la ecuación. Será más claro si lo hacemos.

$$(1 + i/4)^{12} = 1.25$$
$$1 + i/4 = \sqrt[12]{1.25}$$
$$= 1.0187692$$
$$i/4 = 0.018769265$$
$$i = (0.018769265)4$$
$$= 0.07507706$$

Cabe decir que ésta no es la solución única de la ecuación, ya que una ecuación de grado *n*, o con exponente *n*, entero, tiene *n* soluciones, algunas reales y otras imaginarias.

d) En esta ecuación se dividen los dos miembros de la igualdad entre 4,175. Posteriormente se resta la unidad y, por último, se divide entre (–3).

$$3{,}750 = 4{,}175(1 - 3d)$$
$$3{,}750/4{,}175 = 1 - 3d$$
$$0.898203593 - 1 = -3d$$
$$(-0.101796407)/(-3) = d$$
$$\text{o } d = 0.033932136$$

e) Para eliminar la raíz cuarta, se eleva a la potencia 4, el 3 pasa restando y, por último, se multiplica por (–1).

$$\sqrt[4]{3 - x} = 1.2832$$
$$3 - x = (1.2832)^4$$
$$-x = 2.711298937 - 3$$
$$-x = -0.2887701063$$
$$\text{o} \qquad x = 0.288701063$$

La solución de cada ecuación se comprueba reemplazándola en la original. Por ejemplo, al comprobar la última, quedaría:

$$\sqrt[4]{3 - 0.288701063} = \sqrt[4]{2.711298937} = 1.2832$$

En la última sección de este capítulo se plantean y se resuelven problemas de aplicación empleando ecuaciones lineales y otras.

Ejercicios 1.3

l. Explique brevemente los conceptos de *expresión algebraica* y *ecuación.*

2. ¿Qué forma tienen las ecuaciones lineales con una incógnita?

3. ¿Cuáles son las tres propiedades básicas que se utilizan para resolver ecuaciones?

4. ¿Cuáles son las ecuaciones *equivalentes*?

5. ¿Qué es la *solución* de una ecuación?

En los problemas 6 a 31, despeje la incógnita.

6. $3x + 2 = 0$

7. $4 - 2x = 0$

8. $x/3 + 4 = x - 3/2$

9. $5x - 4 = 2 - x/2$

10. $100 = 80(1 + 1.5n)$

11. $11 - 0.3x = 0.83$

12. $300 = 17.2(x - 2)$

13. $y/5 + 2y - 4/3 = 2$

14. $75.3 = 42.8(1 + 2d)$

15. $(1/4)(x - 3) = 5 - x$

16. $3/x + 2/3 = 2$

17. $3/(x - 2) = 4 - 1/3$

18. $\sqrt{x+3} = 2.8$

19. $\sqrt{2-x} = 42.5$

20. $(1 + i/4)^4 = 22.5$

21. $(1 + x/3)^8 = 1.276$

22. $\sqrt[3]{x-2} = 3$

23. $(1 + i/6)^6 = 1.083$

24. $\sqrt[4]{4-x} = 1.935$

25. $(1 + i)^3 = 4.82$

26. $3(x + 4) = 5.2$

27. $\sqrt{x-3} = 2.35$

28. $\sqrt{x^2-4} = 1 - x$

29. $2 + x = \sqrt{4+x^2}$

30. $x/2 = \sqrt{1+x^2/4}$

31. $x^2/(x - 2) = (x + 2)$

En los problemas 32 a 44, seleccione la opción correcta, justificándola.

32. La solución de la ecuación $\sqrt{x+2} + 3.5 = 0$ es

a) $x = 10.25$ *b*) $x = 14.25$ *c*) $x = -2 - \sqrt{3.5}$ *d*) No hay solución *e*) Otra

33. Al resolver la ecuación $2/x + 3/4 = 5/x$ resulta

a) $x = 4$ *b*) $x = {}^1/_4$ *c*) $x = -4$ *d*) $x \neq 0$ *e*) Otra

34. ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{x+6} = x$?

a) $\{-2, 3\}$ *b*) $\{3\}$ *c*) $\{-2\}$ *d*) ϕ* *e*) Otra

35. ¿Cuál es el conjunto solución de $\sqrt[12]{4 + x/2} = 1$?

a) $\{-6\}$ *b*) $\{2\}$ *c*) $\{16\}$ *d*) $\{-6, 6\}$ *e*) Otra

36. ¿Cuál es la solución de la ecuación $x/3 + \sqrt{2 - x^2/9} = 0$?

a) $\{-3, 3\}$ *b*) $\{3\}$ *c*) $\{-3\}$ *d*) ϕ *e*) Otra

37. Obtenga la solución de la ecuación $\sqrt{3-x} = 2x$

a) $\{1\}$ *b*) $\{-1, {}^3/_4\}$ *c*) $\{-1\}$ *d*) $\{{}^3/_4\}$ *e*) Otra

38. Halle la solución de la ecuación $(x - 3)/4 = x/4$

a) $\{2\}$ *b*) $\{0\}$ *c*) $\{-1\}$ *d*) ϕ *e*) Otra

39. Despeje la incógnita si $2x^2/(x + 1) - x + 1 = 0$

a) $x = 1$ *b*) No hay solución *c*) $x = 1$ o $x = -1$ *d*) $x = -1$ *e*) Otra

---

* Recuerde que ϕ es el conjunto vacío y, en este caso, indica que la ecuación no tiene solución.

40. ¿Cuál es la solución de la ecuación $x/3 + x/3 = x$?

a) $\left\{3/\sqrt{2}\right\}$ *b*) $\left\{-\sqrt{2}/3\right\}$ *c*) $\left\{3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}\right\}$ *d*) $\left\{-\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3\right\}$ *e*) Otra

41. Al despejar t de la ecuación $63.9 = 21.3(t^2 + 2)$ queda:

a) $t = 1$ *b*) $t = \pm 2$ *c*) $t = \pm 1$ *d*) $t = -1$ *e*) Otra

42. Al despejar i de la ecuación $\sqrt[12]{1+i/12} = 1.631$ queda, aproximadamente:

a) $i = 4{,}240.3478$ *b*) $i = 0.4993$ *c*) $i = 341.3623$ *d*) 12.0416 *e*) Otra

43. Si se despeja d de la ecuación $\sqrt[6]{3-\frac{1}{d}} = 2$ quedará:

a) $d = -61$ *b*) $d = 1/61$ *c*) $d = -1/61$ *d*) $d = -1.8775$ *e*) Otra

44. La solución de la ecuación $(3 - i)^5 = 32$ es:

a) $i = 1$ *b*) $i = \pm 1$ *c*) $i = -1$ *d*) $i = -3.4$ *e*) Otra

1.4 Tanto por ciento y porcentaje en serie

En la televisión y otros medios informativos se comunican a diario noticias y comerciales que se refieren a porcentajes. Veamos algunos ejemplos:

Al cierre de ayer la Bolsa de Valores subió 2.3 puntos porcentuales. La inflación del mes anterior fue de 0.73%. Los certificados del Tesoro (CT)se cotizan con el 7.51% de descuento. El revelado y la impresión de los rollos fotográficos tienen un 30% de descuento, y muchas otras en las que interviene el *tanto por ciento* que definimos a continuación.

Genéricamente, el X por ciento, denotado como X% de un número, es el resultado de multiplicar ese número por la fracción $X/100$, es decir:

Definición 1.7

El X% de A es

$$(X/100)A \quad \text{o} \quad (XA)/100$$

Ejemplo 1

a) El 30% de 700 es 210 porque $(30/100)700 = 210$

b) 500 es el 125% de 400 porque $(125/100)400 = 500$

c) El X% de 7,350 es igual a 1,874.25 significa que $X = 25.5$ porque

$$(X/100)7{,}350 = 1{,}874.25$$

y esto implica que $X = 1{,}874.25(100)/7{,}350$ o $X = 25.5\%$

Ejemplo 2

Juan Gómez pagó \$427.50 por un par de zapatos ¿Cuál era el precio si los compró con el 25% de descuento?

solución

Juan pagó el 75% del precio original P y por eso debe cumplirse que:

$$(75/100)P = 427.50$$

de donde

$$P = 427.50(100)/75 \qquad \text{o} \qquad P = \$570.00$$

Ejemplo 3

Los intereses, I, que durante un año devenga un capital C que se invierte al 8.5% de interés anual están determinados por

$$I = Ci$$

en este caso la tasa de interés es $i = 8.5/100$ o $i = 0\ 0.085$. Por lo tanto, un capital de \$15,000 genera

$$I = 15{,}000(0.085) \text{ o } I = \$1{,}275.00 \text{ por concepto de intereses}$$

Note que

a) Para obtener el X% de un número A, se corre el punto decimal en X, dos lugares a la izquierda y luego se multiplica por A. Por ejemplo, el 32.7% de 128 es 0.327(128) = 41.856.

b) El X% de un número A es numéricamente igual al A% del número X; por ejemplo, el 40% de 70 es igual al 70% de 40 y esto es igual a 28, porque

$$0.40(70) = 0.70(40) = 28$$

c) Existen porcentajes sucesivos, en serie, o en cadena; esto es, que el X% del Y% de un número A, estará definido por $(X/100)(Y/100)A$. Así, por ejemplo, el 20% del 35% del número 4,700 es 329, porque esto significa que

$$(0.20)(0.35)\ 4{,}700 = 329$$

Puesto que (0.20)(0.35) = 0.07, la ecuación última puede reescribirse como

$$(0.07)4{,}700 = 329$$

Por eso se dice que el 7% de un número A es **equivalente** al 20 del 35% de A.

Ejemplo 4

Anticipo en la compra de una computadora

El licenciado *Pérez* compró una computadora en \$22,500 con un anticipo del 30%. ¿De cuánto fue tal anticipo?

solución

El 30% de 22,500 es $A = (30/100)(22{,}500) = 0.30(22{,}500)$
$= \$6{,}750$

El anticipo es, por lo tanto, de \$6,750.

Ejemplo 5

Comparación de porcentajes

¿Qué le conviene más a un empleado que recibe un aumento salarial? ¿Primero un 20% y poco después un 7% adicional, o recibir un 28% en total?

solución

Suponiendo que su salario original es S, después del primer incremento, éste será:

$$S_1 = S + (0.20)S$$
$$S_1 = (1 + 0.20)S$$
$$S_1 = (1.20)S$$

Después del segundo incremento, su salario será un 7% mayor:

$$S_2 = S_1 + (0.07)S_1$$
$$S_2 = (1.07)S_1$$
$$S_2 = (1.07)(1.20)S \qquad \text{porque } S_1 = (1.20)S$$
$$S_2 = (1.284)S \text{ ya que } (1.07)(1.20) = 1.284$$

es decir,

$$S_2 = (1 + 0.284)S$$

Este resultado representa un incremento total del 28.4%, cifra que es un poco mayor que el 28% de la segunda opción.

Ejemplo 6

Cálculo del precio anterior a partir del precio actual

El precio de un refrigerador es de \$7,650, ¿cuánto costaba hace un año si aumentó un l2.5%?

solución

Si el precio anterior es X, entonces el aumento es un 12.5% de X y el precio actual es:

$$X + (0.125)X = 7,650$$

$$(1 + 0.125)X = 7,650 \qquad \text{porque} \qquad ax+bx=(a+b)x$$

$$(1.125)X = 7,650$$

de donde $X = 7,650/1.125$ o $X = \$6,800$

Ejemplo 7

Porcentaje de reducción en cartera vencida

¿En qué porcentaje se redujo la cartera vencida si actualmente es de \$138 millones y antes era de \$150 millones?

solución

La cartera vencida se redujo en 12 millones de dólares y el porcentaje de reducción es X tal que:

$$(X/100)150 = 12$$

de donde $X = 12(100)/150 = 8$

o $X = 8\%$

Solución alterna

Otra manera de obtener este resultado es comparando las dos cantidades, es decir, dividiendo la última entre la primera y multiplicando el resultado por 100:

$$(138,000/150,000)(100) = 92$$

Esto se interpreta diciendo que la última cantidad es igual al 92% de la original y por eso se redujo un 8%, número que resulta de restar el 92 del 100%.

Ejercicios 1.4

1. Escriba cinco ejemplos reales que involucren porcentajes.

En los problemas 2 a 15, complete la frase.

2. El 23% de 500 es _________________.

3. El 19.8% de _________________ es 720.

4. _________________ es el 27.2% de 250.

5. 84.5 es el _________________% del 32% de 1,250.

6. 0.285 es el 75% de _________________.

7. El 98% de 98 es _________________.

8. El 200% de _________________ es 12,320.

9. El 0.5% de 428.5 es _________________.

10. _________________ es el 23.5% de 82.4.

11. El 21.5% del 70.8% de _________________ es 75.8.

12. 49.3 es el 15% del _________________ % de 125.

13. El 125% de _________________ es 105.8.

14. _________________ es el 190% de 705.

15. _________________ es el 28.3% del 70.2% de 1,230.

16. ¿Cuánto se paga por un traje que tiene el 35% de descuento y su precio es de $4,750?

17. ¿Cuánto valía el dólar si ahora se cotiza en $12.25 y aumentó un 1.75%?

18. ¿Cuál es el precio de un automóvil nuevo si el año pasado costaba $180,000 y subió un 5.08%?

19. ¿Cuánto recibe un empleado que, por su desempeño, se hizo acreedor a un premio del 95% del equivalente al 18% de su salario anual, el cual es de $34,250?

20. ¿Qué porcentaje sobre el precio del billete ofrece la Lotería Nacional en el primer premio, si es equivalente a 10,000 veces el precio que se paga por participar?

21. El salario mínimo diario es de $48.60. ¿De cuánto será el mes próximo si se ha aprobado 5.3% de incremento?

22. La deuda externa de un país se redujo 8.4%. ¿De cuánto era si ahora es de $5,000 millones de dólares?

23. ¿Cuántos desempleados habrá el año próximo si ahora hay 5,200 y se estima que este número se reducirá en 6.25%?

24. Una entidad financiera ofrece un premio equivalente a 500 veces los intereses devengados durante un mes. ¿A qué porcentaje sobre dichos intereses corresponde el premio?

En los problemas 25 a 40, encuentre en términos de porcentaje la variación dada.

25. El precio de la gasolina se incrementó de \$6.25 a \$6.50 por litro.

26. El precio de un televisor fue rebajado de \$3,600 a \$3,258.

27. Los intereses se redujeron de \$50,000 a \$36,000.

28. Linda Vázquez disminuyó su peso de 52 a 48 kilogramos.

29. La deuda externa de un país varió de \$680 millones a \$550 millones de dólares.

30. El salario mínimo diario aumentó de \$52.50 a \$57.75.

31. El número de desempleados se redujo en 3,600. Eran 27,000.

32. La temperatura ambiental aumentó de 28 a 32.2 °C en el occidente del país.

33. La Bolsa de Valores cerró el día 23 en 10,600 puntos y el 24 en 10,388 puntos.

34. El ahorro interno del país creció de \$5,300 millones a \$5,724 millones de dólares.

35. La producción anual de azúcar aumentó en 7,500 toneladas. La producción anterior fue de 150,000 toneladas anuales.

36. Las exportaciones de una fábrica de artesanías aumentaron de 15 a 19.5 millones de dólares anuales.

37. El precio del petróleo se redujo de \$29.25 por barril a \$24.70.

38. La cotización de una inversión está en \$3.5963 por cada unidad, y antes estaban en \$3.5177.

39. El número de hogares con computadora creció de 125,000 a 147,500.

40. El número de profesores que tiene un posgrado en el departamento de matemáticas creció de 13 a 19.

41. ¿Cuál fue el precio de un refrigerador si ahora cuesta \$6,850 y aumentó un 10.3% su valor?

42. ¿Qué conviene más al comprador de rollos fotográficos, adquirirlos con descuento de 32% o adquirir tres a precio de dos?

En los problemas 43 a 53, seleccione la opción correcta, justificándola.

43. El 251.3% de 251.3 es

a) $(251.3)^2$ *b*) $(251.3)^2/100^2$ *c*) 631.5169 *d*) 63.15169 *e*) Otra

44. Si el 38.3% del *x*% de 4,250 es 418 entonces *x* es aproximadamente igual a

a) 25.68 *b*) 15.63 *c*) 256.8 *d*) 156.3 *e*) Otra

45. El 16.9 del 325% de 10,400 es

a) 571,220 *b*) 5,712.20 *c*) 57,122 *d*) 571.22 *e*) Otra

46. Si el 75% del 40% del 125% de A es igual a 21.75, ¿cuál es el valor de A?

a) 580 *b*) 21.71 *c*) 58 *d*) 217.1 *e*) Otra

47. Si el P% del 40% del 35% de 2,050 es 861, entonces

a) $P = 30$ *b*) $P = 300$ *c*) $P = 250$ *d*) $P = 0.03$ *e*) Otra

48. Si el salario mínimo por día es de \$50.25, ¿de cuánto será el próximo mes si se ha aprobado un 5.3% de incremento?

a) \$50.52 *b*) \$53.02 *c*) \$51.98 *d*) \$52.91 *e*) Otra

49. Ana Lilia pesaba 52.60 kg y redujo su peso un 2.5%. ¿Cuánto pesa ahora?

a) 51.28 *b*) 50.10 *c*) 51.81 *d*) 51.35 *e*) Otro

50. El dólar costaba \$11.65 ahora se necesitan \$11.19. ¿En qué porcentaje descendió la paridad?

a) 4.1108% *b*) 4.0584% *c*) 3.9485% *d*) 3.8693% *e*) Otro

51. Hace 2 meses Lupita nadaba 18 minutos de manera continua. Ahora nada 31.5 minutos. ¿En qué porcentaje aumentó su tiempo?

a) 7.5% *b*) 175% *c*) 75% *d*) 17.5% *e*) Otro

52. La calificación promedio en el primer examen parcial de matemáticas en un grupo fue de 6.30. En el segundo fue 7.56. Si se mantiene la tasa de incremento, de aumento, de cuánto será la del tercero?

a) 8.93 *b*) 9.07 *c*) 9.01 *d*) 9.10 *e*) Otra

53. En 2002 las utilidades de Cerámicas del Sur fueron de \$875,000; y en el 2005, de \$1’006, 250. ¿De cuánto serán en 2008 si se mantiene la tasa de crecimiento?

a) \$1’243,107.30 *b*) \$1’097,487.20 *c*) \$1’165,923.43 *d*) \$1’157,187.50 *e*) Otra

1.5 Razones y variación proporcional

Se sabe que la calificación que un estudiante obtiene en un examen de matemáticas, aumenta si crece el número de ejercicios que resolvió antes de realizarlo; pero es menor cuanto mayor sea el grado de cansancio, sobre todo intelectual, con el que llega a realizar tal examen. En estas condiciones se dice que la calificación es directamente proporcional al número de problemas resueltos, aunque es inversamente proporcional al nivel o grado de cansancio al hacer el examen.

Definición 1.8

Se dice que *y varía directamente como x*, *y es directamente proporcional a x*, cuando

$$y = kx$$

donde x y y son variables, y k se llama *constante de proporcionalidad*.

Ejemplo 1

La producción en toneladas de caña de azúcar por hectárea aumenta con los kilogramos de fertilizante que se emplean, es decir, $P = kf$, donde P es la producción, y f los kilos de fertilizante. ¿Cuántas toneladas por hectárea se producen en una parcela que se abonó con 550 kg de fertilizante, si otra con condiciones semejantes produjo 130 toneladas por hectárea con 650 kg de fertilizante?

solución

El primer paso en esta clase de problemas consiste en obtener el valor de la constante sustituyendo los datos, los valores conocidos, en la ecuación de proporcionalidad, que en este ejemplo son

$$P = 130 \text{ toneladas y } f = 650 \text{ kilogramos}$$

Así, $130 = k(650)$

De donde la constante de proporcionalidad es $k = 130/650$ o $k = 0.20$

Cabe decir que la constante k no tiene dimensión y por eso no importan las unidades que se utilicen al sustituir en la ecuación de proporcionalidad, siempre y cuando se mantengan.

Con este valor de k y el de $f = 550$ se obtiene la producción por hectárea:

$$P = 0.20(550) \text{ o } P = 110 \text{ toneladas}$$

Ejemplo 2

El volumen de ventas de un complemento dietético aumenta si se incrementa el número de veces en que se anuncia en televisión, lo cual significa que

$$V = kt$$

Donde V son las ventas, t es la frecuencia o número de veces en que el complemento se anuncia, y k es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 3

Si en el ejemplo 2, el artículo que se anuncia 5 veces por hora, vende 4,500 piezas, ¿cuántas se venderán si se anuncia 6 veces por hora?

solución

Para hallar la constante de proporcionalidad, en la ecuación del ejemplo 2, se reemplazan V por 4,500 y t por 5:

$$4{,}500 = k(5)$$

De donde $k = 4{,}500/5$ o $k = 900$. Por lo tanto, si $t = 6$ entonces las ventas serán $V = 900(6)$ o $V = 5{,}400$ unidades.

Proporción inversa

Definición 1.9

La igualdad $y = k/x$ donde x y y son variables, x es diferente de cero y k es la constante de proporcionalidad significa que *y es inversamente proporcional a x.*

Ejemplo 4

El bono mensual B que un empleado recibe por su puntualidad es inversamente proporcional al número de minutos m que llega tarde a su trabajo, lo cual significa que

$$B = k/m$$

Si, por ejemplo, un empleado que llegó 3 minutos tarde recibió un bono de \$350, ¿cuándo recibirá otro que llegó 5 minutos tarde?

solución

Para obtener el valor de la constante de proporcionalidad se tiene que

$$350 = k/3 \qquad B = 350 \text{ y } m = 3$$

De donde,

$$k = 350(3) \text{ o } k = 1050$$

y entonces, cuando $m = 5$, resulta un bono de

$$B = 1050/5 \quad B = 210 \text{ o } \$210.00$$

Note que si un empleado tiene cero minutos de retardo entonces la expresión $B = k/m$ se indetermina porque no hay división entre 0, pero en ese caso el empleado percibirá el bono máximo posible. También es cierto que muchas empresas que otorgan este tipo de bonificación, lo cancelan en su totalidad con un retardo del empleado.

Proporción mixta

Es claro que la proporcionalidad puede darse con más de dos variables en proporción múltiple o mixta.

Ejemplo 5

Si se supone que la calificación C que se obtiene en un examen está en proporción directa al número de aciertos n y es inversamente proporcional al número de minutos t en que se resuelve, entonces,

$$C = kn/t$$

Por ejemplo, si Alejandra obtuvo 90 en un examen con 18 aciertos y 45 minutos, ¿qué calificación obtiene Carlos con 21 aciertos y si tardó 56 minutos para resolver su examen?

solución

Para la constante de proporcionalidad se tiene

$90 = k(18)/45$ $\quad C = 90,\quad t = 45$ y $n = 18$ de donde $\quad k = 90(45)/18 \quad$ o $\quad k = 225$

Entonces, la calificación de Carlos, puesto que $n = 21$ y $t = 56$, es

$C = 225(21)/56$ o $C = 84.38$, redondeando

Ejemplo 6

Un buen padre de familia acostumbra a dar a sus hijos, al final de cada semestre, un premio P, en dólares, que es inversamente proporcional a la expresión

$$\sqrt{(n+1)(100-c)}$$

donde n es el número de inasistencias que la escuela le reporta y c es el promedio semestral.

Entonces la ecuación de proporcionalidad es $P = \dfrac{k}{\sqrt{(n+1)(100-c)}}$

Ejemplo 7

Si en el ejemplo 6 el hijo mayor recibió \$3,250 con un promedio de 80 y 2 inasistencias, ¿cuánto recibirá el más chico si registró 4 inasistencias y logró 95 de promedio semestral? ¿Y cuánto recibirá su hermana que tuvo sólo una inasistencia y 90 de promedio?

solución

La constante de proporcionalidad es $k = 25{,}174$ aproximadamente, ya que:

$$3{,}250 = \frac{k}{\sqrt{(2+1)(100-80)}} \qquad P = 3{,}250,\ n = 2 \text{ y } c = 80$$

De donde $k = 3{,}250(\sqrt{60})$ o $k = 25{,}174.39$

Entonces, el hijo menor logra un premio de

$$P = 25{,}174.39/\sqrt{(4+1)(5)} \qquad n = 4 \text{ y } c = 95$$

$$= 25{,}174.39/5 \qquad \text{o} \qquad P = \$5{,}035, \text{ aproximadamente}$$

y la hermana obtiene:

$$P = 25{,}174.39/\sqrt{(1+1)(100-90)}$$

$$= 25{,}174.39/4.472135955 \text{ o } P = \$5{,}629.16$$

Ejercicios 1.5

1. Escriba y simbolice cinco ejemplos reales de proporcionalidad directa.
2. Mencione y simbolice cinco ejemplos de proporcionalidad inversa.
3. Escriba y represente con una ecuación tres ejemplos reales de proporcionalidad mixta o combinada.
4. Los profesores del Departamento de Matemáticas reciben un bono quincenal por desempeño, que es proporcional al número de puntos t logrados en el semestre anterior. Si un docente recibe \$450 quincenales por este concepto habiendo cumplido con 11 de los 13 posibles, ¿cuánto recibirá uno de sus compañeros que cubrió 12 puntos?
5. El costo de producción C por unidad de producción de un artículo se reduce cuando el volumen V de piezas producidas aumenta. Suponiendo que el costo unitario es de \$15 cuando se produjeron 10,000 piezas, ¿cuál será el costo de cada pieza si se producen 12,500?
6. Suponiendo que w varía directamente con el cuadrado de x e inversamente con la suma de y y z y $w = 300$, cuando $x = 10$, $y = 20$ y $z = 20$. ¿Cuál será el valor de w cuando x, y y z valgan, respectivamente, 15, 5 y 18?
7. En el problema 6, ¿cuál debe ser el valor de z, si cuando $x = 30$ y $y = 10$, el valor de w es 400?
8. Si A es directamente proporcional a la diferencia $p - q$ e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de r, ¿cuál será el valor de A cuando $p = 7$, $q = 3$ y $r = 4$, si cuando p, q y r valen 10, 5 y 2, respectivamente, A es igual a 30?
9. En el problema 8 ¿cuál será el valor de q si cuando $p = 12$ y $r = 3$, el valor de A es 40?
10. A las 5 de la tarde el poste en la esquina de una cancha de fútbol proyecta una sombra de 180 cm. ¿Cuál será la estatura del portero si a la misma hora proyecta una sombra de 392 cm? Considere que la altura del poste es de 85 cm.
11. Suponiendo que la calificación C que se obtiene en un examen está en proporción directa al número de aciertos, a, y es inversamente proporcional al número de minutos n en que se resuelve, ¿cuál es la ecuación de proporcionalidad?
12. En el ejemplo 11 Teresa obtuvo calificación de 85 con 19 aciertos y 48 minutos para resolverlo. ¿Cuánto logrará su compañero Manuel si pudo contestar acertadamente 21 preguntas en 56 minutos?
13. Jorge Eduardo invierte un capital C con plazo de 7 meses y gana \$750 por intereses. ¿Cuánto ganará Carlos con el mismo capital en 10 meses? Suponga que el banco les paga el 0.8% de interés mensual y los intereses son $I = Cin$.
14. En el ejemplo 13, ¿cuánto deberá invertir Claudia para ganar \$1,300 en un año?
15. ¿Cuánto costará una refacción automotriz al producir 12,000 piezas, si el costo unitario es de \$175 cuando se producen 10 mil unidades? Suponga que el precio se reduce conforme se incrementa la producción.

16. Con base en el problema 15, ¿será posible reducir el precio unitario a \$115, considerando que la capacidad de la planta de producción es de 15 mil piezas?

17. En el problema 15, ¿cuántas piezas deberán producirse para que el precio unitario sea de \$150?

18. Con base en el ejemplo 6, ¿qué promedio deberá lograr un estudiante con 4 inasistencias, si quiere un premio de \$5,000?

19. Georgina recibió \$17,850 por concepto de aguinaldo al final de 12 meses de trabajo en una fábrica de ropa. ¿Cuánto le darán a su compañero Raúl si él gana mensualmente el 85% de lo que gana Georgina y trabajó sólo 11.5 meses?

20. En el problema 19, ¿cuánto recibirá el supervisor de Raúl y de Georgina por aguinaldo, si laboró los 12 meses y gana un 27% más de lo que gana Georgina?

21. Cuatro amigos invierten 25 mil, 30 mil, 43 mil y 52 mil dólares cada uno para abrir una ferretería. Acuerdan repartirse las utilidades de manera proporcional a su aportación. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si en el primer semestre sus utilidades fueron de \$45,000?

22. En el problema 21, ¿cuánto reinvierte cada uno si el total es del 70% de las utilidades y cada uno lo hace con una cantidad que es inversamente proporcional a su aportación inicial?

23. Para construir un paso a desnivel la compañía Construcciones de Occidente, con 75 empleados que trabajan 8 horas diarias, proyecta terminarlo en 15 meses. ¿Cuántos obreros debe agregar trabajando 10 hrs por día y le piden concluir la obra en 10 meses? Suponga que al iniciar el tercer mes incrementa el personal.

En los problemas 24 a 34 escriba la ecuación de proporcionalidad.

24. A varía con cuadrado de x e inversamente con y.

25. P es inversamente proporcional a q y al cuadrado de la diferencia entre q y r.

26. A es proporcional a la suma de 20 y x, e inversamente proporcional a la raíz cúbica de y.

27. x varía proporcionalmente con y e inversamente con el cuadrado de la diferencia de z y w.

28. z es proporcional a la suma de los cuadrados de a y b.

29. c crece proporcionalmente al cubo de la diferencia de p y q, y se reduce con la suma de r y el cuadrado de s.

30. A es proporcional al triple de p e inversamente proporcional a la suma de 5 y q.

31. A crece con h y decrece con el cuadrado de r.

32. M es proporcional a C y a la suma de 1 y el producto de i y n.

33. C es proporcional a I e inversamente proporcional al producto de i y n.

34. V es directamente proporcional al producto de h y el cuadrado de r.

En los problemas 35 a 52, exprese con palabras cada ecuación de proporcionalidad.

35. $V = k\pi r^3$

36. $A = kbh/2$

37. $V = k/t$

38. $d = kvt$

39. $D = 2kr$

40. $A = kP\sqrt{q+r}$

41. $A = k\dfrac{b+B}{2}h$

42. $Z = ky/(x - 2w)$

43. $A = k(p - q)^2 (p + r)$

44. $Y = k(a + b)/(c - d)^3$

45. $B = k(2x + y)^4$

46. $C = k(P - 2q)^2(r)^3$

47. $D = k(a + b - 2c)$

48. $m = k(1 + in)$

49. $P = k(2 + 3a - b)^3/c$

50. $N = k \log(y + z)$

51. $M = k(p/q)^2 / \sqrt{y+x}$

52. $A = kb/(c + d)^2$

53. Por su puntualidad, Juan Pérez recibió un bono mensual de \$520 habiendo llegado 5 minutos tarde durante el mes. ¿Cuánto recibirá este mes si llegó sólo 3 minutos tarde?

54. El despachador en una gasolinera recibe una bonificación semanal que depende del número de clientes atendidos. ¿Cuánto recibirá ahora si la semana anterior le dieron \$125 y puso combustible a 375 automóviles? Suponga que ahora despachó a 432 clientes.

55. Suponiendo que la calificación que se obtiene en un examen de matemáticas es proporcional a la raíz cuadrada de $n - 30$, donde n es el número de ejercicios resueltos antes para preparar el examen, e inversamente proporcional a g que representa el grado de dificultad del propio examen: $g = 3$ si el examen está fácil, $g = 4$ para un examen regularmente difícil, y $g = 5$ para un examen difícil. Obtenga la calificación de Ana que resolvió 65 ejercicios antes del examen cuyo grado de dificultad fue intermedio. Considere que su compañero Jorge logró 95 en un examen difícil y lo preparó resolviendo previamente 100 ejercicios.

56. Suponiendo que el tiempo T en meses en que se construye una vivienda se reduce conforme crece el número de obreros n; pero aumenta con el número de inasistencias o faltas f en el primer día de labores de cada semana, de acuerdo con la ecuación

$$T = 5 + kf/n$$

¿En cuánto tiempo se construirá una casa con 8 obreros que en total acumulan 23 faltas en lunes, si con 10 obreros que faltaron 20 veces en lunes se hizo una casa semejante en 13 meses?

57. En el problema 56, ¿cuántos obreros debe contratar el responsable de la obra para terminar una vivienda en 9 meses, previendo que acumulan 12 faltas en lunes?

En los problemas 58 a 67, seleccione la opción correcta justificando su elección.

58. ¿Cuánto recibe de bonificación mensual un profesor que logró 15 puntos en su desempeño del semestre anterior? Considere que otro docente con 18 puntos percibe un bono de \$756.00 mensuales.

a) \$595 *b*) \$630 *c*) \$620 *d*) \$610 *e*) Otra

59. ¿Cuántos minutos debe anunciarse en televisión un artículo de belleza para lograr ventas de \$225,000 si con 8 minutos se vendieron \$180,000? Suponga que las ventas son proporcionales al tiempo de publicidad en televisión.

a) 9.5 *b*) 10 *c*) 10.6 *d*) 10.8 *e*) Otra

60. En el problema 59 si el artículo se anuncia 17 minutos en televisión, las ventas serán:

a) \$375,000 *b*) \$382,500 *c*) \$360,000 *d*) \$356,500 *e*) Otra

61. Carlos, Jorge y Luis emprenden un negocio, aportando, respectivamente, \$35 mil, \$47 mil y \$53 mil cada uno. Si ganaron \$63,000, ¿cuánto corresponde a Jorge considerando que se reparten las utilidades en proporción a su aportación?

a) \$21,933 *b*) \$24,266 *c*) \$23,350 *d*) \$22,067 *e*) Otra

62. En el problema 61, ¿cuánto ahorra Carlos si es el 60% de sus ganancias?

a) \$13,600.00 *b*) \$13,285.03 *c*) \$15,425.00 *d*) \$13,869.32 *e*) Otra

63. En el problema 61, ¿cuánto correspondería a Luis si invitaran a Claudia, quien aporta \$27,000 a la sociedad? Considere que las utilidades crecen en proporción directa.

a) \$24,733 *b*) \$24,826 *c*) \$25,667 *d*) \$25,033 *e*) Otra

64. Las utilidades de una cadena de 14 supermercados fueron de 35 millones de dólares, cuando otra cadena tenía 16 sucursales en la misma ciudad. ¿De cuánto serán ahora que tiene 20 y la competencia tiene 25? Suponga que las utilidades son proporcionales al número de tiendas propias e inversamente proporcionales al número de la competencia.

a) \$32 millones *b*) \$31’950,242 *c*) \$33’255,425 *d*) \$31 millones *e*) Otra

65. En el problema 64, ¿cuántos supermercados deberá tener la primera cadena para lograr utilidades de \$40 millones, si supone que la competencia tendrá 32?

a) 32 *b*) 3 *c*) 34 *d*) 36 *e*) Otra

66. En el mismo problema 64, ¿de cuánto serían las utilidades actuales si tuvieran 25 supermercados y la competencia también?

a) \$40 millones *b*) \$32’429,306 *c*) \$35 millones *d*) \$33’768,421 *e*) Otra

67. El testamento de un padre de familia estipula que su fortuna estimada en 12.5 millones de dólares se distribuya de la forma siguiente: el 10% para donarlo al Instituto de Asistencia Social y el resto entre sus tres hijos, inversamente proporcional a sus edades y proporcionalmente al número de hijos de cada uno. ¿Cuánto hereda el menor considerando que tiene 27 años de edad y tres hijos, mientras que los otros tienen, respectivamente, 30 años con dos hijos, y 34 con cuatro?

a) \$4’480,088 *b*) \$4’231,195 *c*) \$2’538,717 *d*) \$3’128,295 *e*) Otra

1.6 Logaritmos, exponenciales y sus propiedades

Para simplificar expresiones y operaciones complejas, aunque principalmente para resolver ecuaciones en que la incógnita está en el exponente, se utilizan los logaritmos. Pero, ¿qué es un logaritmo?

Como se aprecia en la siguiente definición y en los ejemplos, los logaritmos, que fueron creados al principio del siglo XVII por el matemático escocés John Napier, están muy relacionados con los exponentes y las leyes de los exponentes que se estudiaron en la sección 1.2, de tal forma que para hallar la potencia a la que se eleva un número dado para obtener otro, que también es conocido, se emplean logaritmos, como lo veremos a continuación. Definamos antes el concepto

Definición 1.10

El **logaritmo** base a de un número N es el exponente x al que se eleva la base. Para obtener el número, es decir:

$$\log_a (N) = x, \text{ si y sólo si } a^x = N$$

Donde a es un número positivo diferente de 1 y N es positivo.

Ejemplo 1

La tercera potencia de 2 es 8, esto es, $2^3 = 8$; por lo tanto, según la definición 1.10, el logaritmo base 2 de 8 es igual a 3, es decir:

$$\log_2 (8) = 3 \qquad \text{porque} \qquad 2^3 = 8$$

Ejemplo 2

La quinta potencia de l0 es 100,000, es decir, $10^5 = 100{,}000$; por lo tanto, el logaritmo base 10 de 100,000 es 5, de acuerdo con la definición 1.10:

$$\log_{10} (100{,}000) = 5 \qquad \text{porque} \qquad 10^5 = 100{,}000$$

Note que la *base* del logaritmo es igual a la *base* de la potencia, y que en la forma logarítmica está despejado el exponente, mientras que en la exponencial, es el número N el que está despejado.

Ejemplo 3

¿Cuál es el número N cuyo logaritmo base 3 es 2.45?

solución

En notación logarítmica, la pregunta se expresa como

$$\log_3 (N) = 2.45$$

y esto en forma de exponentes es lo mismo que

$$3^{2.45} = N$$

Es decir,

$$N = 14.75526705, \text{ con la calculadora}$$

Propiedades de los logaritmos

Se dijo que todo número a diferente de 0 elevado a la potencia cero es igual a l, es decir,

$$a^0 = 1 \text{ para todo } a \neq 0$$

Y esto, replanteado con logaritmos, nos da la primera propiedad

$$\boxed{\log_a (1) = 0}$$

Quiere decir que el logaritmo de cualquier base de 1 es igual a cero.

Ejemplo 4

a) $\log_5 (1) = 0$

b) $\log_{3/4} (1) = 0$

Pero $\log_{-3} (1)$ no existe porque la base debe ser positiva.

También es cierto que $a^1 = a$ porque todo número a la potencia 1 es igual al número y, por lo tanto, la segunda propiedad establece que:

$$\boxed{\log_a (a) = 1}$$

Es decir, que el logaritmo base a de la base es siempre igual a l.

Ejemplo 5

a) $\log_3 (3) = 1$

b) $\log_{10} (10) = 1$, pero

c) $\log_{-10} (-10)$ no existe porque la base y el número deben ser positivos.

Otra propiedad útil para el logaritmo de la potencia de un número es la siguiente, cuya demostración se deja como ejercicio.

$$\boxed{\log_a (p)^n = n log_a (p)}$$

Es decir, el logaritmo de la enésima potencia de un número es igual a n veces el logaritmo del número.

Ejemplo 6

$$\log_5 (4.28)^x = (x) \log_5(4.28)$$

Nótese que el exponente x de 4.28, se escribe como coeficiente del logaritmo de 4.28.

Ejemplo 7

$$\log_{10} \sqrt[4]{70} = \log_{10}(70)^{1/4} \qquad \text{porque} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$
$$= (1/4) \log_{10} (70)$$

Por supuesto que los logaritmos tienen otras propiedades importantes; sin embargo, las anteriores, y sobre todo la última, son las que se utilizan en este libro.

Ejercicios 1.6

1. Explique el significado de logaritmo base a de un número N.

2. ¿Qué significa $\text{Log}_a(4) = 1525$ en forma exponencial?

3. ¿Cómo se escribe en forma exponencial una expresión equivalente a $\log_3 (A) = 8.5$?

4. ¿Cómo se expresa $\log_7 (x + 4) = P$ en forma exponencial?

5. ¿Cómo se escribe $(1.0283)^x = 5.93$ en forma de logaritmos?

6. Cambie la ecuación $A^x = 5.93$ a forma logarítmica.

En los problemas 7 a 16, obtenga una ecuación equivalente de forma exponencial.

7. $\log_5 (p) = 10$

8. $\log_7 (4) = r$

9. $\log_6 (100) = A$

10. $\log_{10} (N) = 4$

11. $\log_x (4) = -5.35$

12. $\log_5 (30.8) = B$

13. $\log_5 (53.8) = Q$

14. $\log_{130} (x + 4) = 11.3$

15. $\log_a (25) = 3.58$

16. $\log_{10} (4.27) = c$

En los problemas 17 a 24, exprese la ecuación dada, en otra de forma logarítmica equivalente.

17. $3^5 = N$

18. $(8X)^4 = 40.5$

19. $(A + B)^3 = 3.57$

20. $(7 - 3x)^5 = 50.3$

21. $(1.258)^n = 100$

22. $10^{3x} = 15.28$

23. $(25.3)^{x-1} = 13$

24. $(3/4)^8 = A$

En los problemas 25 a 32, use calculadora.

25. ¿Cuál es el número cuyo logaritmo base 10 es 12.45?

26. ¿A qué es igual el logaritmo base 8 de 504?

27. ¿Cuál es el valor de la base si $\log_a(82) = 4.5$?

28. ¿A qué es igual el logaritmo base 6 de 3.92?

29. ¿Cuál es el número cuyo logaritmo base 6 es 3.92?

30. ¿A qué es igual el logaritmo base 5 de 81.9?

31. ¿Cuál es el número N cuyo logaritmo base 7 es 4.8?

32. Si $\log_a(14.8) = 3$, ¿cuál es el valor de la base a?

En los problemas 33 a 55, seleccione la opción correcta, justificando su elección.

33. Al expresar $\log_3(P) = 4$ en forma exponencial queda:

a) $3^p = 4$ *b*) $P^3 = 4$ *c*) $3^4 = P$ *d*) $P^4 = 3$ e) Otra

34. Una ecuación equivalente a $3^{x+2} = 105$ es:

a) $\log_p(x+2) = 3$ *b*) $\log_3(x+2) = 105$ *c*) $\log_3(105) = x+2$ *d*) $\log_{x+2}(105) = 3$ *e*) Otra

35. Si $15^x = A + 10$, entonces,

a) $\log_{15} x = A + 10$ *b*) $\log_{A+10}(x) = 15$ *c*) $\log_{15}(A+10) = x$ *d*) $\log_x(A+10) = 15$ *e*) Otra

36. Al cambiar la igual $3^x = 4$ a forma logarítmica, queda:

a) $\log_3(4) = x$ *b*) $\log_x(4) = 3$ *c*) $\log_4(x) = 3$ *d*) $\log_x(3) = 4$ *e*) Otra

37. Si 4 es igual a 10 elevado a la potencia $p + q$, entonces

a) $\log_{10}(4) = p + q$ *b*) $\log_4(p+q) = 10$ *c*) $\log_4(10) = p + q$ *d*) $\log_{p+q}(10) = 4$ *e*) Otra

38. La forma logarítmica de $5^3 + A = B$ es:

a) $\log_5(B - A) = 3$ *b*) $\log_3(B - A) = 5$ *c*) $\log_{5+A}(B) = 3$ *d*) $\log_B(5) = A - 3$ *e*) Otra

39. Si $\log_4(-3) = 10B$, entonces,

a) $4^{10B} = -3$ *b*) $4^{-3} = 10B$ *c*) La ecuación no está definida *d*) $4^{10+B} = -3$ *e*) Otra

40. Al cambiar a la forma exponencial la ecuación $\log_3(A) + 5 = B$, queda:

a) $3^B = A + 5$ *b*) $3^{B-A} = 5$ *c*) $B^5 = 3^A$ *d*)$3^{B-5} = A$ *e*) Otra

41. La forma logarítmica de $10^x = 3 + y$ es

a) $\log_{3+y}(x) = 10$ *b*) $\log_{10}(x) = 3 + y$ *c*) $\log_x(3+y) = 10$ *d*) $\log_{10}(3+y) = x$ *e*) Otra

42. ¿Cuál es el número cuyo logaritmo base 10 es aproximadamente igual a 1.25276297?

a) 15.7215 *b*) 5.300 *c*) 17.8949 *d*) 3.500 *e*) Otra

43. ¿Cuál es el número cuyo logaritmo base 8 es aproximadamente igual a –1.38629436?

a) $^1/_4$ *b*) 0.041087 *c*) No existe tal número *d*) 0.055982 *e*) Otra

44. ¿Cuál es el número cuyo logaritmo base 10 es –0.26280736 aproximadamente?

a) 0.5460 *b*) –0.5460 *c*) No existe *d*) 0.54560 *e*) Otra

45. ¿A qué es igual el logaritmo base 5 de 42.85?

a) 2.334793792 *b*) 1.631950826 *c*) 3.757705645 *d*) No existe *e*) Otra

46. ¿Cuál es el valor del logaritmo base 15 de $-^4/_5$?

a) –0.096910013 *b*) 0.223143551 *c*) –0.293210328 *d*) No está definido *e*) Otra

47. El logaritmo base 7 de 42 es aproximadamente igual a:

a) No existe *b*) 1.62324929 *c*) 3.737669618 *d*) 1.92078222 *e*) Otra

48. ¿Cuál es el logaritmo base 10 de 475.3 aproximadamente?

a) 6.163946184 *b*) 3.297214932 *c*) No existe *d*) 2.6769678 *e*) Otra

49. Encuentre el número cuyo logaritmo base 2 es aproximadamente igual a 5.5698556:

a) 47.500 *b*) 39.250 *c*) 50.4721 *d*) No existe *e*) Otra

50. Si $\log_x (50) = 2.010382$, ¿cuál es el valor aproximado de x?

a) 7.00 *b*) 6.75 *c*) 5.9 *d*) 7.25 *e*) Otra

51. Si $\log_4 (A + 5) = 1.539475671$, ¿cuál es el valor aproximado de A?

a) 3.450 *b*) 8.450 *c*) –3.450 *d*) –8.450 *e*) Otra

52. ¿A qué es igual el logaritmo base 100 de 300 aproximadamente?

a) –1.253214251 *b*) 1.238560627 *c*) 0.807388817 *d*) 2.032534211 *e*) Otra

53. ¿Cuál es el número cuyo logaritmo base 8 es 2.314171501?

a) 1.23 *b*) 123.00 *c*) 12.30 *d*) 125.25 *e*) Otra

54. ¿Cuál es el valor de x si $\log_{15} (x + 2) = 0.75852498$?

a) –1.20 *b*) 3.80 *c*) 5.80 *d*) No existe *e*) Otra

55. ¿Cuál es el valor de la base a si $\log_a (75) = 1.737485$?

a) 14 *b*) 9 *c*) 10 *d*) 12 *e*) Otra

1.7 Logaritmos comunes, naturales y ecuaciones

Los valores posibles para la base de un logaritmo son ilimitados; sin embargo, los dos más usuales son el 10 y el número *e*. Este último es aproximadamente igual a 2.71828. En las calculadoras, por ejemplo, se evalúan los logaritmos con una de estas dos bases. Los de base 10 con la tecla Log y los de base e con la tecla Ln. Los primeros se conocen como logaritmos ***comunes*** o ***decimales***; y los segundos, como logaritmos ***naturales*** o ***neperianos***. Dichos logaritmos se expresan, respectivamente, como:

$$\log_{10}(x) = \log(x) \qquad \text{y} \quad \log_e(x) = \ln(x)$$

ya que en ambos casos se omite escribir la base.

Son múltiples las aplicaciones de los logaritmos. En un curso regular de matemáticas financieras, por ejemplo, se utilizan para encontrar el plazo en inversiones o en la amortización de créditos. Por ahora, veamos cómo despejar la incógnita en las ecuaciones que la tienen como exponente.

Ejemplo 1

Despeje n de la ecuación

$$2^{n-3} = 8^n$$

solución

Si dos números positivos son iguales, entonces sus logaritmos son iguales y, por ende, en un primer paso se aplica el logaritmo común o natural en ambos lados de la ecuación

$$\log(2^{n-3}) = \log(8^n)$$

Con base en la última propiedad de los logaritmos, los exponentes $n - 3$ y n, se escriben bajándolos, es decir, multiplicando el logaritmo en cada lado de la ecuación. Luego, con algunos pasos algebraicos y el auxilio de una calculadora, se despeja n:

$$\begin{aligned}(n-3)\log(2) &= (n)\log(8)\\ n-3 &= (n)\log(8)/\log(2)\\ n-3 &= (n)(0.903089987/0.301029996)\\ n-3 &= (n)(3)\\ -3 &= 2n, \qquad n = -3/2 \ \text{ o } \ n = -1.5\end{aligned}$$

Solución alterna

Si, como en este ejemplo, los dos miembros de la ecuación son expresables con la misma base, entonces puede resolverse con las leyes de exponentes de la sección 1.2 en lugar de utilizar logaritmos.

Se sabe que el 8, la base de la potencia en el lado derecho de la ecuación dada, puede escribirse como 2^3 y, por lo tanto, la ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned}2^{n-3} &= (2^3)^n && \text{o}\\ 2^{n-3} &= 2^{3n} && \text{porque } (a^m)^n = a^{mn}\end{aligned}$$

Dado que en esta ecuación las bases son iguales, los exponentes también lo son y, por lo tanto,

$$n - 3 = 3n$$

de donde

$$\begin{aligned}-3 &= 3n - n\\ -3 &= 2n \qquad \text{o} \qquad n = -3/2\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Despejar x de la ecuación:

$$(1.0225)^x = 25.19$$

solución

Se comienza tomando logaritmo natural, o común, a los dos miembros de la ecuación. Aquí se aplica el logaritmo natural ya que algunas calculadoras no tienen la tecla $\boxed{\text{Log}}$.

$\ln (1.0225)^x = \ln 25.19$

$$(x)\ln (1.0225) = \ln (25.19) \qquad \ln (m)^n = (n)\ln(m)$$

De donde

$$x = \ln (25.19)/\ln (1.0225)$$

$$= 3.22644709/0.022250609 \quad \text{o} \quad x = 145.0048895$$

Quiere decir que:

$$(1.0225)^{145.0048895} = 25.19 \text{ aproximadamente}$$

Otra clase de ecuaciones en las que intervienen los logaritmos son las que tienen a la incógnita en el logaritmo como, por ejemplo,

$$\text{Log } (x - 2) = 1.258, \ \log (x + 2) = \log (x^2) \text{ o } \ln (3 - x) = 2$$

La primera y la última, porque log está sólo en un lado de la ecuación, se resuelven con la definición de logaritmo, cambiándolas a la forma exponencial; en la segunda se aplica la propiedad de que *si dos números son iguales y positivos, entonces sus logaritmos son iguales, o viceversa*, esto es que si log(A) = log(B) entonces A = B, y esto equivale a tomar lo que se conoce como **antilogaritmo** de un logaritmo de un número positivo.

Ejemplo 3

Despejar x de la ecuación $\log (x + 2) = \log (x^2)$

solución

Se toma el antilogaritmo común a los dos miembros de la ecuación, considerando que son positivos, y esto equivale a eliminar, o simplemente tachar, el logaritmo a los dos lados, es decir, que si

$$\log (x + 2) = \log (x^2) \text{ es la ecuación dada, entonces,}$$

$\text{antilog} (\log (x + 2)) = \text{antilog} (\log x^2)$

De donde $x + 2 = x^2$* que es una ecuación de grado dos, la cual se resuelve factorizando o con la fórmula general de las cuadráticas. Al pasar restando x y 2 al lado derecho queda

$$x^2 - x - 2 = 0$$

* Note usted que el antilogaritmo del logaritmo de un número N es igual al número N.

Para factorizar se buscan dos números cuya suma sea –1, el coeficiente de x, y el producto sea igual a la constante –2. Éstos son 1 y –2 y, por lo tanto,

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) = 0$$

de donde $x + 1 = 0$ y $x - 2 = 0$, es decir, $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$. Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$

Éstos deberán sustituirse en la ecuación original para corroborar que realmente los dos están en la solución y, por ende, que la solución es el conjunto $\{-1, 2\}$

Ejemplo 4

Despejar x de la igualdad:

$$\log (x - 2) = 1.258$$

solución

Según la definición de logaritmo, esta ecuación puede escribirse como $10^{1.258} = x - 2$ (la base es 10).

Con la tecla $\boxed{10^x}$ en la calculadora, se ve que $10^{1.258} = 18.11340093$ y, por lo tanto, $x - 2 = 18.11340093$ o $x = 20.11340093$, que se comprueba sustituyendo en la ecuación dada.

Ejemplo 5

Resolver para x la ecuación:

$$\ln (3 - x) = 2$$

solución

Puesto que la base de ln es e, se cambia a forma exponencial:

$$e^2 = 3 - x$$

$$7.389056099 = 3 - x \qquad e^2 = (2.71828)^2 \text{ aproximadamente}$$

de donde $x = 3 - 7.389056099$ o $x = -4.389056099$, que también se comprueba reemplazando en la ecuación dada.

Ejercicios 1.7

1. ¿Cómo explica el antilogaritmo del logaritmo de un número *A*?

2. ¿Cómo obtiene el logaritmo del antilogaritmo de un número *B*?

3. ¿A qué es igual antiln (ln 10.3) y log (antilog 42)?

4. ¿A qué es igual antilog (log(–3.5))?

5. ¿Cómo explica usted que antiln (ln (–10.8)) no esté definido?

6. ¿Cuál valor es mayor entre log (32.5) y antilog (32.5)?

7. ¿A qué es igual log (antilog (8.75))?

8. Si ln (e) = 1, ¿a qué es igual antiln (ln(e))?

9. ¿A qué es igual log (antilog ($4x - 2$))?

10. Si $\log(x + 4) = 5$, ¿a qué es igual antilog (5)?

11. Si antilog ($2 - x$) = 14, ¿a qué es igual log (14)?

12. Si antilog ($x^2 - 1$) = 3, cuál es el valor de x?

En los problemas 13 a 28, despeje la incógnita (use calculadora si es necesario).

13. $3^{2+x} = 9^{2x}$

14. $16^{x-4} = 2^{3x}$

15. $(1.0083)^x = 3$

16. $\log(x + 4) = 5$

17. $\ln\sqrt{32.8} = x$

18. $\ln(x) = 3.5$

19. $(1.025)^{3n} = 21.5$

20. $\log(x + 4) = 5.2$

21. $\log(10.5) = 8 - x$

22. $\ln(48.5) = \ln(x - 4)$

23. $(52.1)^{x+2} = 2000$

24. $\log(2 - x) = 2$

25. $\log\sqrt{40.3} = x + 1$

26. $\ln(1 + x^2) = 1$

27. $\log(3 - 2x) = \log(x^2)$

28. $(3.54)^{2x} = 43.8$

En los problemas 29 al 41 obtenga el logaritmo indicado utilizando calculadora y las propiedades de los logaritmos.

29. $\log(42.3)^{3/4}$

30. $\mathrm{Ln}(4.005)^2$

31. $\log\sqrt{495.3}$

32. $\ln\sqrt[4]{64.95}$

33. $\mathrm{Ln}(4/5)^{-3}$

34. $\mathrm{Ln}\sqrt[5]{365}$

35. $\mathrm{Log}(7.293)^{3/4}$

36. $\log(7/4)^4$

37. $\mathrm{Ln}(1,425)^{-2}$

38. $\mathrm{Ln}(225.63)^{3/5}$

39. $\log(73.48)$

40. $\log(351.29)$

41. $\mathrm{Ln}(-42.39)$

Justificando su elección, en los problemas 42 a 61 elija la opción correcta.

42. Si $\log(x + 3) = 4$ entonces el valor de x es

a) 1 *b*) 9,997 *c*) 1,003 *d*) $4^{10}–3$ *e*) Otra

43. El valor de $\log(4.95)^3$ es aproximadamente:

a) 2.0838 *b*) 121.2874 *c*) 4,950 *d*) No está definido *e*) Otra

44. Si $\ln(4 - x) = 4.9$, entonces el valor aproximado de x es:

a) -0.9 *b*) 0.9 *c*) -130.2898 *d*) 1.225 *e*) Otra

45. La solución de la ecuación $5^{3x-2} = 12.97$ es aproximadamente:

a) 4.99 *b*) 1.1974 *c*) 3.3233 *d*) 10.4351 *e*) Otra

46. La solución de la ecuación $43.5^x = 16.3$ es aproximadamente:

a) 0.73982 *b*) 27.2 *c*) 0.3747 *d*) -0.3747 *e*) Otra

47. La solución aproximada de la ecuación $5^{x2} = 0.5^{4x}$ es:

a) $\{0, -1.7227\}$ *b*) $\{0, 4\}$ *c*) $\{0\}$ *d*) $\{1.7227\}$ *e*) Otra

48. Al resolver la ecuación $\log(t^2 - 3) = 2$ resulta:

a) $\pm\sqrt{103}$ *b*) $\pm\sqrt{5}$ *c*) $\sqrt{103}$ *d*) $\sqrt{5}$ *e*) Otra

49. La solución de la ecuación $\log(x + 3)+3 = 0$ es:

a) 6 *b*) -2.999 *c*) -3 *d*) No tiene solución *e*) Otra

50. ¿Cuál es la solución de la ecuación $3^{x2-3} = 9^x$

a) $\{1,-3\}$ *b*) $\{2,-3\}$ *c*) $\{-1,3\}$ *d*) $\{3\}$ *e*) Otra

51. ¿Cuál es la ecuación cuya solución es $x = 4$?

a) $3^{x2} = 4^{2x}$ *b*) $4^{x+2} = 16$ *c*) $5^{x-2} = 5$ *d*) $\log(x - 2) = 2$ *e*) Otra

52. Al despejar x de la ecuación $\log(x - 3) = 2$, resulta:

a) $x = 103$ *b*) $x = 97$ *c*) $x = 5$ *d*) $x = \log(2) + 3$ *e*) Otra

53. Si antilog$(x + 2)$, ¿a qué es igual el logaritmo de 5?

a) $\log x + \log 2$ *b*) $\log(2x)$ *c*) $x + 2$ *d*) $\log(x + 2)$ *e*) Otra

54. El valor positivo de t que satisface la ecuación $\ln(t^2 - 2) = 4$ es:

a) $e^2 + \sqrt{2}$ *b*) $e^4 + 2$ *c*) $\sqrt{e^4 + 2}$ *d*) ninguno *e*) Otra

55. ¿Cuál es la solución de la ecuación antilog$(x+ 2) = 15.3$?

a) 17.3 *b*) $10^{15.3} - 2$ *c*) 17.3 *d*) 3.18469 *e*) Otra

56. Es una expresión que no está definida para $x = -3$

a) $\log_3(5 - x)$ *b*) e^{x+3} *c*) $\log_x(4 + x)$ *d*) $\ln(-x)$ *e*) Otra

57. Resuelva la ecuación antiln $(2x - 3) = e^2$

a) $(e^2 + 3)/2$ *b*) $(3 - e^2)/2$ *c*) $5/2$ *d*) No tiene solución *e*) Otra

58. Si log(antilog$(x - 3)$) = antilog(log(4.8)) entonces el valor de x es:

a) 1.6 *b*) -1.8 *c*) 7.8 *d*) 5.6 *e*) Otra

59. Si antiln(ln(5.3)) = 4 − x, entonces x es igual a:

a) −1.3 *b*) −9.3 *c*) 1.3 *d*) 9.3 *e*) Otra

60. Obtenga la solución de la ecuación log(4 − x) = 1 + log(x)

a) 3/2 *b*) 40/11 *c*) 4/11 *d*) 11/4 *e*) Otra

61. ¿Cuál es la solución de la ecuación antiln(3 − x) = 3?

a) $x = 0$ *b*) $x = 3 - \ln 3$ *c*) $e^3 - 3$ *d*) $3 - e^3$ *e*) Otra

1.8 Problemas de aplicación

Esta sección es una recopilación de aplicaciones que se relacionan con la temática del capítulo, es decir, con porcentajes, ecuaciones, logaritmos, exponentes y proporcionalidades. A causa de la extensa variedad de problemas de aplicación que se presentan en la vida real, es difícil, por no decir imposible, establecer reglas específicas para encontrar soluciones. Sin embargo, las siguientes pueden ser útiles sugerencias para plantearlos y resolverlos.

Recomendaciones para resolver un problema

1. Lea cuidadosamente el problema, tratando de separar los datos de las incógnitas.
2. Busque las palabras que sean clave, como *hallar, qué, cómo, cuánto,* etcétera, para identificar la incógnita; llamándole x o designándola con cualquier otra literal; por ejemplo, la letra inicial de la palabra clave.
3. Establezca una igualdad para relacionar los datos conocidos con la pregunta; primero con palabras y después con números y letras que representen números.
4. Resuelva la ecuación o las ecuaciones que resultaron en el paso 3, empleando principalmente las reglas de adición y multiplicación, así como el principio de sustitución, que se estudiaron en la sección 1.3.
5. De ser posible, verifique la solución que se obtuvo comprobándola en el planteamiento original y, sobre todo, en el enunciado del problema.

Si acaso no llega a la solución correcta, debe insistir de nuevo teniendo presente que aún con mucha práctica y experiencia, no siempre se resolverán los problemas atinadamente en un primer momento.

Es importante señalar que al resolver problemas de matemáticas, generalmente se utilizan fórmulas ya establecidas; por ejemplo, vimos que con la fórmula $I = Cin$, se encuentran los intereses cuando se conoce el capital C que se invierte, la tasa de interés i y el plazo n. Es evidente que con la misma fórmula se encuentre, por ejemplo, el plazo n, cuando se conocen el capital, la tasa de interés y los intereses que produce una inversión, en cuyo caso se procedería de dos maneras:

- Se despeja n de la fórmula, esto es, $n = I/Ci$. ¿Por qué?, y luego se sustituyen los datos, o
- se sustituyen los valores conocidos en la igualdad $I = Cin$ y, después, se despeja la incógnita n.

La desventaja de la primera consiste en que de una fórmula se obtienen varias (una para cada literal), con lo cual resulta una lista muy grande, entre la cual el estudiante muchas veces no sabe cuál elegir.

La segunda requiere de ciertas habilidades y destrezas algebraicas, y esto representa un buen ejercicio mental para el estudiante, ya que no se concretaría a solamente elegir la fórmula adecuada y a dejar que la calculadora realice las operaciones aritméticas.

De cualquier manera es imprescindible el recurso de una calculadora científica o financiera para las operaciones.

Ejemplo 1

Reparto proporcional de utilidades

Carlos, Jorge y Luis comparten en sociedad la propiedad de un negocio de artículos deportivos. Deciden distribuir las utilidades de acuerdo con su aportación individual: \$21,600, \$27,000 y \$32,400, respectivamente. Las utilidades del primer semestre fueron de \$68,850. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

solución

El capital aportado por los tres es la suma de las cantidades individuales:

$$C = 21{,}600 + 27{,}000 + 32{,}400 = 81{,}000$$

y esto corresponde al total, al 100%.

La aportación de Carlos fue del 26.6% del total, porque si X es el porcentaje,

$$(X/100)(81{,}000) = 21{,}600$$

$$\text{entonces, } X = 21{,}600(100)/81{,}000 = 26.\overline{6}$$

Recuerde que la testa en el 6 indica que se repite indefinidamente. La participación de Jorge es Y, tal que

$$(Y/100)(81{,}000) = 27{,}000$$

de donde $Y = 27{,}000(100)/81{,}000 = 33.\overline{3}\%$, y la de Luis es Z, tal que

$$(Z/100)(81{,}000) = 32{,}400$$

$$\text{de donde } Z = 32{,}400(100)/81{,}000 \text{ o } Z = 40\%$$

Ahora bien, a Carlos le corresponde el $26.\overline{6}\%$ de las utilidades, esto es,

$$(26.\overline{6}/100)(68{,}850) = \$18{,}360$$

y, en consecuencia, a Jorge y a Luis les corresponde, respectivamente:

$$0.3\overline{3}(68{,}850) = \$22{,}950$$

$$\text{y } 0.40(68{,}850) = \$27{,}540$$

Note que la suma de las tres cantidades es igual al total de utilidades.

Ejemplo 2

Reparto de una herencia

El testamento de un padre de familia estipula que el 20% de sus bienes, valuados en 2.5 millones de dólares, se otorgue a una institución de beneficencia, y que el 80% restante se reparta entre sus tres herederos en forma inversamente proporcional a sus edades. Tales edades son 15, 18 y 24 años. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

solución

Si X es lo que corresponde al menor, Y lo que se tiene que dar al intermedio y Z lo que toca al mayor, entonces la suma de las tres cantidades es igual al 80% de la herencia.

$$X + Y + Z = 0.80(2'500{,}000) = 2'000{,}000$$

Por otro lado: recuerde que la expresión "A es inversamente proporcional a B" significa que $A = k/B$, donde k se llama *constante de proporcionalidad*, y B es la edad de cada uno de los hijos. Por lo tanto,

$$X = k/15 \qquad Y = k/18 \qquad \text{y} \qquad Z = k/24$$

porque X, Y y Z están en proporción inversa a la edad de cada uno de los herederos.

Entonces,

$$k/15 + k/18 + k/24 = 2'000{,}000$$
$$(0.0\overline{6})k + (0.0\overline{5})k + (0.041\overline{6})k = 2'000{,}000$$
$$(0.163\overline{8})k = 2'000{,}000$$

de donde: $k = 2'000{,}000/0.163\overline{8}$ o $k = 12'203{,}389.83$ es el valor de la constante de proporcionalidad

Consecuentemente:

$$X = k/15 = \$813{,}559.32$$
$$Y = k/18 = \$677{,}966.10$$
$$\text{y} \qquad Z = k/24 = \$508{,}474.58$$

Note que la suma de los tres capitales es igual a los 2 millones de dólares y que, por ejemplo, X es el 32.54% de la herencia, porque 813,559.32/2'500,000 = 0.325423728. De igual forma, Y es el 27.12%, Z es el 20.34% y la suma de los tres porcentajes es igual al 80% de los bienes heredados.

Ejemplo 3

Plazo para pagar un crédito

En el capítulo 3, de interés simple, quedará claro que si se presta un capital, C, con intereses del 22.5%, al final de n años éste se saldará con

$$M = C(1 + 0.225n)$$

¿Cuántos días después de que se recibió, se cancela con \$18,000 un préstamo de \$16,500, con intereses del 22.5%?

solución

Con base en el principio de sustitución, en la fórmula anterior se reemplaza M por 18,000 y C por 16,500. Después, se divide entre este último número, se resta la unidad y, finalmente, se divide entre 0.225, en este orden, en los dos miembros de la ecuación; es decir,

$$18{,}000 = 16{,}500(1 + 0.225n)$$

$$18{,}000/16{,}500 - 1 = 0.225n$$

$$0.225n = 0.09090901 \qquad \text{porque } a = b \Rightarrow b = a$$

$$n = 0.09090901/0.225 \text{ o}$$

$$n = 0.404040404 \text{ años}$$

Para convertir en días, se multiplica por 360, los días que tiene el año.

$$0.\overline{40}(360) = 145.45 \text{ o } 145 \text{ días}$$

Ejemplo 4

Alternativas de inversión

Un agricultor desea invertir \$175,000. Puede hacerlo en una cuenta de ahorros que le producirá el 10.5% de interés anual o comprar onzas oro que le darán a ganar el 9.75% anual. ¿Cómo debe distribuir su capital si pretende utilidades del 10.35% anual?

solución

Si x es lo que invierte al 10.5%, entonces, $175{,}000 - x$ será lo que invierte en onzas oro. Los intereses en la primera son:

$$I_1 = (0.105)x$$

De la segunda, son

$$I_2 = 0.0975(175{,}000 - x)$$

Y la suma de los dos debe ser igual al 10.35% de la inversión total:

$$I_3 = 0.1035(175{,}000) = 18{,}112.50$$

Entonces,

$$(0.105)x + 0.0975(175{,}000 - x) = 18{,}112.50 \qquad \text{ya que } I_1 + I_2 = I_3$$

$$(0.105)x + 17{,}062.50 - (0.0975)x = 18{,}112.50$$

$$(0.105 - 0.0975)x = 18{,}112.50 - 17{,}062.50 \qquad \text{se factoriza } x$$

$$(0.0075)x = 1{,}050$$

$$\text{de donde } x = 1{,}050/0.0075 \text{ o } x = 140{,}000.$$

Quiere decir que debe invertir \$140,000 en la cuenta de ahorros y la diferencia, \$35,000, comprando onzas oro.

Ejemplo 5

Utilidad esperada en inversiones

¿Cuál es la utilidad esperada de un inversionista si se sabe que tiene 35% de probabilidades de ganar $87,500, y 65% de probabilidades de perder $20,000 en una inversión?

solución

El valor esperado de un experimento con dos resultados posibles se define, y se obtiene, con la fórmula:

$$E = p(x) + q(y)$$

Donde p es la probabilidad de x y q es la probabilidad del resultado y. En este caso, $p = 0.35$, $x = 87{,}500$, $q = 0.65$ y $y = -20{,}000$. Por lo tanto, la utilidad esperada para el inversionista es

$$E = 0.35(87{,}500) + 0.65(-20{,}000)$$
$$E = 30{,}625 - 13{,}000$$
$$E = \$17{,}625$$

Note que las pérdidas son ganancias negativas, de ahí el signo negativo en $20,000.

Ejemplo 6

Valor de rescate de un activo que se deprecia

¿Cuál será el valor de rescate de un activo que costó $375,000, tiene vida útil de 8 años y se deprecia $42,000 anuales?

solución

En el capítulo 10 se estudiará que la depreciación anual de un activo con el método de la línea recta está dada por

$$R = \frac{C - C_n}{N}$$

Donde C es el precio original, C_n es el valor de rescate, R es la depreciación por año y n es la vida útil del activo en años. Por lo tanto,

$$42{,}000 = \frac{375{,}000 - C_n}{8}$$

de donde

$$42{,}000(8) = 375{,}000 - C_n$$
$$336{,}000 - 375{,}000 = -C_n$$
$$-39{,}000 = -C_n$$

Es decir, que $C_n = \$39{,}000$ es el valor de rescate del activo.

Ejemplo 7

Saldo promedio diario en tarjeta de crédito

Los intereses que se ganan o se pagan por el uso de las tarjetas de débito, de crédito o de inversión se evalúan tomando como base el *saldo promedio* por día.

Considerando los pagos y disposiciones del mes actual o del anterior, y siendo estos los periodos que hay entre las **fechas de corte** establecidas por el banco.

Este saldo promedio se calcula de la forma siguiente, donde para ilustrar el procedimiento se consideran solamente dos movimientos en la cuenta de un usuario.

Suponga que el primer día, después del corte, el saldo en contra de un usuario de tarjeta de crédito es de \$745. El décimo día abona \$600 y el decimosexto compra \$275 en alimentos pagando con la tarjeta. ¿Cuál es el saldo promedio diario, si el periodo de corte es de 30 días?

solución

En la figura 1.1 se ilustran los plazos, el saldo en cada plazo y los movimientos en la tarjeta.

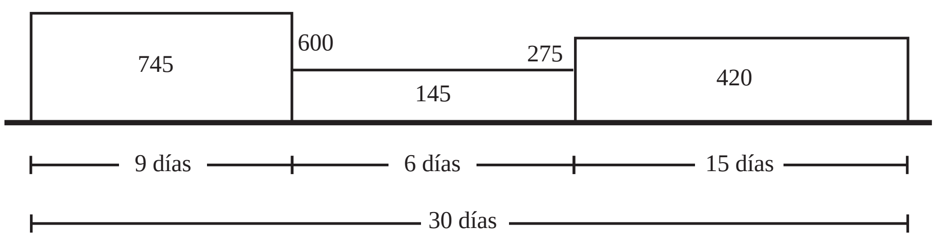


FIGURA 1.1

Al notar que el saldo cambia desde el día que se hace un movimiento en la tarjeta, el saldo promedio se obtiene sumando los productos:

(número de días)(saldo en cada plazo)

como si fueran áreas en la figura 1.1. El resultado se divide entre el total de días en el periodo de corte, es decir, que en este caso el saldo promedio diario es

$$\text{Saldo promedio diario} = \frac{745(9) + 145(6) + 420(15)}{30} = \$462.50$$

Ejemplo 8

Pago mínimo para mantener el saldo promedio diario

Si el saldo promedio mínimo por día que un cuentahabiente debe mantener en su tarjeta es de $500, ¿cuánto debe depositar el noveno día del mes para alcanzarlo, si los primeros 8 días mantuvo su cuenta en $60? ¿Cuánto deberá depositar el vigésimo octavo día, si el noveno deposita solamente $200?

solución

a) Si x es el depósito que hace el noveno día, entonces en los 22 días después del octavo habrá $(x + 60)$ en su cuenta, y el saldo promedio será

$$\frac{8(60)+22(x+60)}{30}=500$$

Para despejar x, se ejecutan las multiplicaciones en el numerador y el 30 pasa multiplicando al miembro derecho:

$$480 + 22x + 22(60) = 500(30)$$

de donde, $22x = 15{,}000 - 480 - 1{,}320$

$$x = 13{,}200/22 \quad \text{o} \quad x = \$600$$

Para comprobar, nótese que el saldo promedio es

$$\frac{8(60)+22(600+60)}{30}=\frac{480+14{,}520}{30}$$
$$= \$500$$

b) Si ahora x es el capital que se deposita el vigésimo octavo día, el saldo promedio mensual es:

$$\frac{8(60) + 20(60 + 200) + 2(x + 260)}{30}=\$500$$

porque en los dos últimos días habrá en la cuenta $x + 60 + 200$.
Para despejar, se multiplica por 30 y se realizan las operaciones del numerador:

$$480 + 5{,}200 + 2x + 520 = 15{,}000$$

de donde $2x = 8{,}800$ o $x = \$4{,}400$
Para comprobar, se tiene

$$\frac{8(60)+20(60+200)+2(4{,}400+260)}{30}=\$500$$

Ejemplo 9

Plazo en inversión con interés compuesto

¿En cuánto tiempo se acumulan $44,365 si se invierten $40,000 ganando intereses del 0.8% mensual capitalizable por mes?

solución

En el capítulo 4 se estudiará que si se invierte un capital, C, con el 0.8% mensual, al final del plazo x, en meses, el monto que se acumulará estará determinado por

$$M = C(1 + 0.008)^x$$

Recuerde que para las operaciones en el 0.8% se corre el punto decimal dos lugares a la izquierda.

Entonces,

$$44{,}365 = 40{,}000(1.008)^x$$

$$44{,}365/40{,}000 = (1.008)^x$$

o

$$(1.008)^x = 1.109125$$

que, como se dijo antes, se resuelve tomando el logaritmo en los dos miembros de la ecuación:

$$\ln (1.008)^x = \ln (1.109125)$$

$$(x)\ln (1.008) = \ln (1.109125), \quad \text{ya que } \ln (M)^n = (n) \ln (M)$$

$$x(0.00796817) = 0.103571416$$

$$\text{de donde } x = 0.10357141/0.00796817 \quad \text{o} \quad x = 12.99814396 \text{ meses}$$

Significa que en 13 meses los $40,000 iniciales se incrementarán a $44,365, aproximadamente.

Ejemplo 10

Tiempo para alcanzar niveles de producción

¿En qué año se producirán 150,000 toneladas de azúcar, si en 2004 se produjeron 84,750 toneladas y la producción aumenta a razón del 8.5% anual?

solución

Puede probarse, como se estudiará en el teorema 2.3 del siguiente capítulo, que si la producción de un bien en el primer año es P_1 y crece a razón del 8.5% anual, entonces en el enésimo año será:

$$P_n = P_1(1 + 0.085)^{n-1}$$

de donde, al sustituir los datos anteriores, queda:

$$150{,}000 = 84{,}750(1 + 0.085)^{n-1}$$

$$150{,}000/84{,}750 = (1.085)^{n-1}$$

$$(1.085)^{n-1} = 1.769911504, \text{ porque si } a = b \text{ entonces } b = a$$

Se toma logaritmo en los dos lados y se despeja n.

$$\ln (1.085)^{n-1} = \ln (1.769911504)$$

$$(n - 1)\ln (1.085) = \ln (1.769911504) \qquad \ln(M)^n = (n)\log(M)$$

$$(n - 1)(0.081579987) = 0.570929548$$

$$n - 1 = 0.570929548/0.081579987$$

$$n - 1 = 6.998402043$$

$$n = 6.998402043 + 1 \quad \text{o} \quad n = 7.998402043$$

Significa que en el octavo año, en 2011, la producción de azúcar será de 150,000 toneladas, aproximadamente.

Ejemplo 11

Distribución del ingreso salarial

El ingreso mensual del profesor Hernández es de \$7,500. Determine:

a) El porcentaje que paga de impuestos si le descuentan \$456.

b) El capital que gasta en alimentos si equivale al 45% de su ingreso.

c) El porcentaje del ingreso que destina a la renta de su departamento, si paga \$2,250 por mes.

d) La cantidad neta que ingresa mensualmente a su hogar, si su cónyuge gana 27% menos que él, y ambos pagan el mismo porcentaje de impuestos.

e) El capital que deposita en su cuenta de ahorros, si representa el 30% de su prima vacacional y ésta es el 140% de su ingreso mensual.

f) ¿Cuánto deberá ganar mensualmente el año próximo para mantener el mismo poder de compra, si se sabe que la inflación ha sido y será del 5.06% anual?

solución

a) Si x es el porcentaje que paga de impuestos y éstos son de \$456, entonces:

$$(x/100)(7{,}500) = 456$$

por lo tanto, para despejar x, se multiplica por 100 y se divide entre 7,500 a los dos miembros de la ecuación, es decir,

$$x = 456(100)/7{,}500 \text{ o } x = 6.08\%$$

b) El gasto en alimentos es el 45% del ingreso, esto es:

$$(45/100)7{,}500 = \$3{,}375$$

c) Si x es el porcentaje que paga de renta, entonces deberá cumplirse que

$$(x/100)7{,}500 = 2{,}250$$

de donde

$$x = 2{,}250(100)/7{,}500 \text{ o } x = 30\%$$

d) Si el salario de su esposa es un 27% menor que el de él, entonces ella gana:

$$7{,}500 - 0.27(7{,}500) = \$5{,}475$$

Por lo tanto, el ingreso total es

$$7{,}500 + 5{,}475 = 12{,}975$$

El pago por impuestos es el 6.08% de este resultado, es decir:

$$12{,}975(0.0608) = \$788.88$$

Por lo que el ingreso neto mensual es:

$$12{,}975.00 - 882.30 = \$12{,}186.12$$

e) Lo que deposita en su cuenta de ahorros es el 30 del 140% de su ingreso mensual, o sea, que el ahorro es

$$0.30(1.40)7{,}500 = \$3{,}150$$

f) Suponiendo que el ingreso mensual no cambia durante el año, entonces el próximo será un 5.06% mayor:

$$\begin{aligned} 7{,}500 + 0.0506(7{,}500) &= (1 + 0.0506)7{,}500 \\ &= (1.0506)7{,}500 = \$7{,}879.50 \end{aligned}$$

Ejemplo 12

Descuentos y facturación con impuesto desglosado

El precio de un reproductor de discos compactos es de $8,400, incluyendo el IVA, que es equivalente a 15%. La cadena de tiendas Viper tiene el departamento de electrónica rebajado en un 25%. El señor Martínez adquiere un reproductor de discos y al pagar en cajas logra un premio que consiste en un descuento adicional del 20% en el total de su compra.

a) ¿Cuánto pagó por el aparato y con qué descuento sobre el precio original lo obtuvo?

b) ¿Qué cantidades aparecen en la factura con el IVA desglosado?

solución

a) Con el primer descuento el señor Martínez pagaría el 75% del precio y en cajas pagará el 80% de este valor, es decir:

$$(0.80)(0.75)(8{,}400) = \$5{,}040$$

En virtud de que (0.80)(0.75)($8,400) = 0.60($8,400), el pago neto es el 60% del precio. Por lo tanto, el aparato se adquirió con el 40% de descuento, es decir, la diferencia entre el 60% que pagó y el precio original que representa el 100%.

b) Si P es el valor sin el IVA del 15%, entonces

$$P + 0.15P = 5{,}040$$

de donde

$$\begin{aligned} (1.15)P &= 5{,}040 && ab + cb = (a + c)b \\ P &= 5{,}040/1.15 && \text{o} \\ P &= \$4{,}382.61 \\ &+ \$657.39 && \text{15\% del IVA} \\ \hline \text{TOTAL} \quad & \$5{,}040.00 \end{aligned}$$

Ejemplo 13

Variación del IPC en la Bolsa de Valores

El 3 de diciembre de 2004, la Bolsa de Valores cerró en 12,109.45 puntos y al día siguiente cerró en 12,190.26 puntos. ¿Cuál es el incremento en el índice de precios (IP)?

solución

El IP es un número que indica el promedio ponderado del precio de las acciones que se negocian en la Bolsa de Valores. El incremento es la diferencia entre los dos puntajes:

$$12{,}190.26 - 12{,}109.45 = 80.81$$

y si X es el incremento IP, entonces,

$$(X/100)(12{,}109.45) = 80.81$$

Se despeja X dividiendo los dos lados entre 12,109.45 y multiplicando por 100:

$$X = 80.81(100)/12{,}109.45$$
$$X = 0.66733006 \text{ o } 0.6673\%, \text{ redondeando.}$$

Resultado que es posible corroborar con los periódicos de las fechas de los índices dados, por ejemplo.

Solución alterna

Este resultado se obtiene también al restar la unidad al cociente de las dos cotizaciones en puntos: y multiplicando por 100

$$(12{,}190.26/12{,}109.45 - 1)100 = 0.006673301$$

que en porcentaje es un 0.6673%, aproximadamente.

Ejemplo 14

Variación de la cotización de los certificados de inversión

El 3 de noviembre de 2004 un certificado de inversión se cotizó en $3.4864 y el 15 de enero anterior en $3.3590. ¿En qué porcentaje aumentó su valor?

solución

En el ejemplo 13 se observó que el porcentaje de variación se obtiene al restar la unidad al cociente de los dos valores, es decir, el actual entre el anterior:

$$(3.4864/3.3590) - 1 = 0.037927955$$

Esto representa 3.7928%, porcentaje que debe corresponder con la inflación de ese periodo, ya que de ella depende el valor del certificado de inversión.

Ejemplo 15

Incremento de títulos que se negocian en la Bolsa de Valores

El 3 de agosto se negociaron 75,441 millones de acciones en el Mercado de Valores, y cuatro meses después se negociaron 85,181 millones. ¿De cuántos puntos porcentuales fue el incremento?

solución

De manera semejante al ejemplo anterior, el incremento en porcentaje es:

$$(85{,}181/75{,}441) - 1 = 0.1291075 \quad \text{o} \quad 12.91\%$$

Ejercicios 1.8

1. Tres amigos inician en sociedad un negocio de artesanías. El primero participa con $37,800, el segundo con $27,000, y el tercero con $43,200. Los tres acuerdan repartirse las utilidades según la aportación individual. ¿Cuánto de las utilidades le corresponde a cada uno si en el primer año éstas fueron de $110,550.

2. Un tramo de carretera de cuota se construyó con una participación tripartita, compuesta por el gobierno central, el gobierno estatal y una constructora. La aportación fue de 3, 2 y 1 dólares, respectivamente, por cada 6 invertidos en la construcción. ¿Cuánto le corresponde a cada parte de las utilidades, que fueron de $175,000 en un bimestre?

3. El equipo campeón de fútbol recibe un premio de 1.8 millones de dólares, el cual se distribuye de la siguiente manera: 20% para el cuerpo técnico y el resto para sus 22 jugadores, dividido en proporción directa al número de partidos en los que cada uno intervino. Ocho participaron en 17 juegos, seis en 13, cinco en 8 y tres participaron solamente en 2 partidos. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

4. Para premiar a cuatro de sus empleados, la empresa Impresiones y Servicios, S. A., cuenta con $3,200 que distribuye en proporción inversa al número de retardos en el semestre. ¿Cuánto le corresponde a cada uno si el primero tuvo 3 retardos, el segundo 4, el tercero 6 y el último sólo 2?

5. El testamento de un padre de familia estipula que el 30% de sus bienes estimados en 1.75 millones de dólares se otorgue a su hija y que el resto sea distribuido entre sus tres hijos en proporción inversa a sus edades, que son 20, 23 y 27 años, respectivamente. ¿Cuánto le toca a cada uno?

6. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que costó $75,000, se deprecia $12,000 anuales y tiene 5 años de vida útil?

7. Los primeros 12 días del mes, un tarjetahabiente de cheque electrónico tuvo en su cuenta $150. ¿Cuánto debe depositar el treceavo día para que su saldo promedio diario sea de $300.

8. Los primeros 15 días del mes, un inversionista de una cuenta maestra tuvo un saldo de $1,525. ¿Cuánto debe depositar el decimosexto día para mantener el saldo promedio diario requerido por el banco, que es de $5,000?

9. ¿Cuál es la utilidad esperada que obtiene una persona, quien al invertir un capital tiene 25% de probabilidades de ganar $100,000, y 75% de probabilidades de perder $20,000?

10. El heredero de $180,000 tiene la opción de invertir en una cuenta universal que le produce intereses del 8.465% simple anual, o en bonos del ahorro que le reditúan el 9.815%. ¿Cuánto debe invertir en los bonos si pretende ganar el 18.6% simple anual en sus inversiones?

11. ¿Cuántos automóviles se producirán en el año 2009, si en 2005 se fabricaron 85,000 y la producción aumenta a razón del 8.3% anual?

12. ¿En qué año se duplicará la producción anual de azúcar, si en 2004 fue de 270,000 toneladas y cada año se produce 7.5% más que el anterior?

13. En 2005 la industria del vestido reportó utilidades de 12.5 millones de dólares. ¿De cuánto serán en el año 2011, si se estima que crecen a razón de 5.3% anual?

14. El ingreso mensual de un representante de ventas está determinado por la expresión $I = 3{,}200 + 0.00075(X)$, donde X es el volumen de ventas en dólares. ¿Cuánto percibió el mes anterior si vendió 8.5 millones de dólares?

15. Un famoso jugador de fútbol profesional es colocado por su club como transferible. Al realizarse la operación, el jugador recibió 150,000 dólares. Determine:

a) La cantidad por la que se hizo la transacción, si lo que recibió el jugador representó un 15% del total.

b) Lo que pagó de impuesto si éste fue el 21.5% de lo que recibió.

c) El capital que destinó a vacacionar, si tomó el 17% de lo que quedó después de pagar impuestos.

d) El capital que gastó en hospedaje, si lo hizo con el 42% de lo que destinó a vacacionar.

e) El capital que invirtió en su cuenta bancaria, si éste fue el 12% de lo que quedó después de pagar impuestos.

16. Tres máquinas, *A*, *B* y C, producen en total 350,000 tornillos. La primera produce el 35%, la segunda el 23% y la última el 42% restante.

a) ¿Cuántas piezas produce cada máquina?

b) ¿Cuántos tornillos defectuosos produce la máquina *B*, si son el 3% de su producción?

c) Si la máquina *C* produce 147 piezas con defectos, ¿a qué porcentaje corresponde en relación con la producción total? ¿Y en relación con su propia producción?

d) ¿Cuántas piezas se producirán si las máquinas *A* y *B* aumentan su producción en 8 y 10%, respectivamente, y la tercera la reduce en 15%?

e) ¿En qué porcentaje se redujo la producción total en el inciso *d*?

17. Una tienda de departamentos ofrece todos sus artículos con un 20% de descuento. Un cliente compra una radiograbadora que ya estaba rebajada 18% sobre el precio de lista de $2,750. Determine:

a) ¿Cuánto pagó el comprador por el aparato y cuánto fue el descuento total con que lo adquirió?

b) ¿Qué cantidades aparecen en la factura con el IVA del 15% desglosado?

c) ¿Cuánto pagó por la radiograbadora, dos meses después si realizó el pago con una tarjeta de crédito que carga 4.5% de interés simple mensual?

18. El índice de precios (IP) de la Bolsa de Valores el 15 de enero de 2004 fue de 9,314.53 puntos y el día 13 de agosto siguiente fue de 9,812.76 puntos. ¿En qué porcentaje creció?

19. El 6 de diciembre se negociaron 132’380,000 títulos en la Bolsa de Valores, y el día anterior, 130’746,000. ¿Cuál fue el porcentaje del incremento?

20. ¿Cuál es el porcentaje de incremento de los certificados de inversión, si el 9 de julio de 2004 se cotizaron en $3.4133 y el 27 de septiembre siguiente en $3.4512?

21. El mes anterior los certificados del Tesoro a 28 días pagaron con una tasa del 9.03% y este mes pagan el 9.51% anual. ¿Cuál es el porcentaje de incremento en las tasas?

En los problemas 22 a 31, seleccione, justificándola, la opción correcta.

22. El testamento de un padre de familia estipula que el 60% de su fortuna, que se estima es de 4.28 millones de dólares, se reparta entre sus 3 hijos de manera inversa al grado académico de cada uno otorgando 10 puntos al que concluyó los estudios de bachillerato, 12 al que tiene licenciatura y 15 al que logró una maestría ¿Cuánto le toca al último?

a) $790,625 *b*) $684,800 *c*) $701,028 *d*) $628,300 *e*) Otra

23. En el problema 22 ¿cuánto deposita el licenciado si invierte el 65% de su herencia?

a) $602,700 *b*) $556,400 *c*) $620,300 *d*) $528,200 *e*) Otra

24. La calificación en un examen es proporcional al número de veces que un alumno participó en clases, e inversamente proporcional al número de retardos durante el semestre. ¿Qué calificación obtuvo Antonio con 15 participaciones y 5 retardos, si Marisa con 6 retardos obtuvo 90 por participar 20 veces en el semestre?

a) 95 *b*) 81 *c*) 85 *d*) 88 *e*) Otra

25. En el problema 24, ¿qué calificación obtendrá otro compañero de Marisa y Antonio, si acumuló 3 retardos y participó en 10 clases?

a) 65 *b*) 90 *c*) 93 *d*) 75 *e*) Otra

26. El tiraje diario de un periódico local crece con el número de personas físicas y morales que lo utilizan para su publicidad, y decrece con el número de compañías periodísticas en la ciudad. ¿Qué tiraje tendrá el próximo año suponiendo que hay un competidor más, y que el número de personas que en él se anuncian crecerá un 12.2%? Suponga que el tiraje actual es de 23,000 ejemplares con 4 periódicos de la contraparte.

a) 21,505 *b*) 20,240 *c*) 21,420 *d*) 19,840 *e*) Otra

27. ¿Qué tiraje logrará la empresa editorial del problema 26 si el número de competidoras se mantiene en 4?

a) 25,806 *b*) 25,300 *c*) 23,920 *d*) 24,920 *e*) Otra

28. ¿Cuántos desempleados más habrá el próximo trimestre si se prevé que cerrarán 12 empresas y se crearán 7 nuevas?

Considere que en este trimestre cerraron 10, se crearon 9 nuevas y hay 1,350 desempleados.

a) 1,640 *b*) 2,083 *c*) 1,920 *d*) 1,480 *e*) Otra

29. En el problema 28, ¿cuántas empresas deberán crearse para que no haya más desempleados?

a) 11 *b*) 10 *c*) 7 *d*) 9 *e*) Otra

30. La producción de granos por hectárea depende de la cantidad de abono y fertilizantes que se emplea y del temporal de lluvias. Considerando que a un buen temporal se le asignan 30 puntos, 27 a uno regular y 25 a un mal temporal, ¿cuál será la producción por hectárea si se consumieron 150 kg por hectárea en abono, es un buen temporal y el año pasado con mal temporal se gastaron 153 kg por hectárea en abono y fertilizantes, y se lograron producir 3.8 toneladas por hectárea?

a) 5.168 *b*) 5.203 *c*) 4.962 *d*) 4.872 *e*) Otra

31. En el problema 30, ¿qué producción se espera para el año entrante, suponiendo que será un temporal regular y se consumirán 160 kg por hectárea en abonos y fertilizantes?

a) 4.321 *b*) 4.978 *c*) 5.032 *d*) 4.864 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio del presente capítulo, usted debe estar capacitado para:

- Aplicar el conocimiento de que los números y las cantidades que se utilizan en las matemáticas de los negocios y en las finanzas son reales.
- Redondear los números con cifras decimales.
- Utilizar las leyes de los exponentes para simplificar y resolver ecuaciones.
- Distinguir y resolver ecuaciones lineales.
- Plantear ecuaciones, es decir, modelos matemáticos lineales para resolver problemas de índole financiera como inversiones, depreciación, producción, comercialización de bienes y capitales.
- Calcular el por ciento de números y resolver problemas relacionados con porcentajes como:
  - La cotización de los certificados de inversión.
  - La variación en el índice de precios IP, de la Bolsa de Valores.
  - La depreciación de un activo con el método de la línea recta.
  - El volumen de las acciones y otros títulos que se negocian en la bolsa de valores y su variación en puntos porcentuales.
- Plantear y resolver problemas reales con cantidades que varían en proporción directa, inversa y mixta, con otras.
- Explicar el concepto de logaritmo y resolver ecuaciones utilizando los logaritmos y sus propiedades.
- Plantear ecuaciones y modelos exponenciales para resolver problemas en el campo de la administración y los negocios, como:
  - Plazo en inversiones con interés simple y compuesto.
  - Tiempo necesario para lograr niveles de producción preestablecidos.
  - Incrementos en la población, en las exportaciones, en la producción, etcétera.

Conceptos importantes

Antilogaritmos
Ecuación lineal
Ecuación y solución de ecuaciones
Ecuaciones con la incógnita en el exponente y logarítmicas
Enésima potencia de un número
Exponente cero y exponente negativo
Expresión algebraica
Leyes de los exponentes
Logaritmos comunes y naturales
Logaritmos y exponenciales
Números reales e imaginarios
Proporcionalidad directa, inversa y mixta
Raíz enésima de los números
Redondeo de números
Tanto por ciento

Problemas propuestos para exámenes

Conteste verdadero o falso en los problemas 1 a 9. Justifique su respuesta.

1. $(3^4)^X = 3^{4X}$ ___________
2. $(a + 2)^2 = a^2 + 2^2$ ___________
3. $3^5/3^{-5} = 3^0$ ___________
4. $\log_3 (64) = 4$ ___________
5. La raíz quinta de 243 es 3 ___________
6. 2.505335 redondeado a 5 decimales es 2.50533 ___________
7. $\log_x (4) = 8$ es lo mismo que $8^x = 4$ ___________
8. La solución de la ecuación $3/x + 5 = 1/2$ es $x = 2/3$ ___________
9. $8^x = 5.07$ es lo mismo que $\log_8 (5.07) = x$ ___________

En los problemas 10 a 22, complete la frase.

10. La raíz cúbica de 125 es 5 porque ____
11. 4^{-2} es igual a 1/16 porque ___________
12. $\log_3 (5) = Q$ es equivalente a ___________ en forma exponencial.
13. $(70.5)^x = 24.3$ es lo mismo que ___________ en forma logarítmica.
14. La solución de la ecuación $x/3 + 2 = x$ es ____
15. El valor de n que satisface la ecuación $(3.5)^n = 42$ es ______________________________

16. La solución de $(1.53)^x = 9$ es ____

17. La solución de la ecuación $(1 + x/12)^5 = 3$ es __________________________________

18. Una ecuación es lineal si es de la forma __________________________________

19. La generación de empleos en 2004 fue de 15,250. En 2011 será de ___________ suponiendo que crece un 0.5% anual.

20. El 16 de enero de 2004 los certificados de inversión se cotizaron en \$3.3595 y al día siguiente en \$3.3601. Por lo tanto, el incremento fue del ___________%.

21. En los últimos 6 meses el IP cambió de 4,560.35 puntos a 4,628.30 puntos. Así que el incremento fue del ___________%

22. La tasa de interés interbancaria de equilibrio cambió de 7.05 a 7.43, entonces la variación fue del ___________%.

En los problemas 23 a 32, simplifique.

23. $3^0(4^5)/4^3$

24. $(3a)^3(3a)^2$

25. $(2^3)^2$

26. $\left(\sqrt{2.5}\right)^2$

27. $(x + y)^3/(x + y)$

28. $\sqrt{5.4}(5.4)^{1/2}$

29. $x^4\sqrt{(x-3)^{5/2}/(x^5)(x-3)^{1/2}}$

30. $(3^4)(3^{-2})$

31. $(10^5)^{1/5}$

32. $(4)^5/(4)^3$

En los problemas 33 a 42, evalúe las expresiones utilizando calculadora.

33. $\sqrt[4]{35.3}$

34. $(5.23)^4$

35. $(85.2)^{2/5}$

36. $(2.03)^{-2}$

37. $\sqrt[12]{50.83}$

38. $\log_5(42.3)$

39. $\ln(28.3)^{1/2}$

40. $\log_8(50.382)$

41. $(27.95)^{5/3}$

42. $\ln(10.93)^3$

En los problemas 43 a 50, despeje la incógnita.

43. $\sqrt[12]{1+i} = 1.22$

44. $x + 2 = 2/3 - x/2$

45. $30 = 35(1 - 0.15d)$

46. $(1 + x)^2 = 58.2$

47. $5^{x-2} = 3.8$

48. $\log(x + 1) = 1.35$

49. $\sqrt[6]{1+i/4} = 2.5$

50. $\sqrt{1+i/2} = 1.253$

51. Si el 27 de agosto se negociaron 68.4 millones de acciones en la Bolsa de Valores y 79.7 millones al siguiente día, ¿cuál fue el porcentaje de incremento?

52. El 1 de octubre el IP cerró en 9,310.3 puntos. ¿Con cuántos puntos cerró el día anterior si subió 0.98%? ¿Con cuántos puntos cerró el mismo día la Bolsa de Nueva York, si al siguiente día ésta cotizó los 7,945.26 puntos y bajó 0.57%.

53. Obtenga el valor de rescate de un activo que costó \$250,000 y se depreciará \$22,300 anuales durante los 9 años de su vida útil. Utilice el método de la línea recta.

54. ¿Cuál es la utilidad esperada del inversionista que tiene un 38% de probabilidades de ganar \$49,500, y un 62% de perder \$7,300?

55. ¿En cuántos años una fábrica triplicará su producción si la aumenta a razón del 20% anual?

56. Si en 2005 la población de la ciudad fue de 750,000 habitantes, ¿en qué año habrá 1'275,000, si crece a razón del 5.8% anual?

57. ¿Cuánto vendió la semana anterior un agente de ventas que gana \$850 por semana más el 6.5% de comisión por ventas, si percibió \$2,475?

En los problemas 58 a 79, seleccione la opción correcta justificando su elección.

58. La tercera potencia de A es 40 porque:

a) $\sqrt[3]{A} = 40$ *b*) $\sqrt[3]{40}$ *c*) $A(A)A = 40$ *d*) $40^3 = A$ *e*) Otra

59. Al redondear $\sqrt[2]{1{,}228.75}$ a cuatro cifras decimales resulta:

a) 35.0533 *b*) 35.0536 *c*) 35.0534 *d*) 35.0530 *e*) Otra

60. Una expresión equivalente a $25^{3/4}$ es:

a) $(25^4)^{1/3}$ *b*) $5^{3/2}$ *c*) $5^{3/8}$ *d*) $\sqrt[3]{25}$ *e*) Otra

61. La raíz cuarta de 81 es 3 porque:

a) $\sqrt[4]{81} = 3$ *b*) $3^4 = 81$ *c*) $3^{1/4} = 81$ *d*) $4^3 = 81$ *e*) Otra

62. Es una expresión equivalente a $x^{-1/2}$

a) $1/x^2$ *b*) $1/\sqrt{x}$ *c*) $(1/2)x$ *d*) $\sqrt{x}$ *e*) Otra

63. Obtenga una expresión equivalente a $(x^{-3})x^2$

a) x^{-6} *b*) x^{-5} *c*) x *d*) x^{-1} *e*) Otra

64. La raíz k-ésima de a es x porque:

a) $x^{1/n} = a$ *b*) $1/(a^k) = x$ *c*) $a^k = x$ *d*) $a = x^k$ *e*) Otra

65. Al despejar x de la ecuación $1 + y = 3/x$ resulta:

a) $x = 1 + 1/y$ *b*) $x = \dfrac{3}{1+y}$ *c*) $x = 1/y - 3$ *d*) $x = (1+y)/3$ *e*) Otra

66. Diga cuál es ecuación lineal:

a) $x + 2 = 1/x$ *b*) $x - \sqrt{3} = 4 - 3x$ c) $x = \sqrt{3 - x}$ *d*) $x = 5 - \sqrt{x}$ *e*) Otra

67. Obtenga el 15.38% de 429.5:

a) 66.0571 *b*) 27.9258 *c*) 6,605.71 *d*) 0.000358091 *e*) Otra

68. Es el 200.3% del 4.53% de 15,208:

a) 137,991.16 *b*) 1,379.9116 *c*) 13’799,115.67 *d*) 1,379.9116 *e*) Otra

69. El precio actual de un televisor es de $5,521.50. ¿Cuál fue un precio anterior si aumentó un 2.25%?

a) $5,400 *b*) 5,645.73 *c*) 4,525.82 *d*) 4,507.35 *e*) Otra

70. Dos meses después de comprarlo, el señor Cárdenas pagó con tarjeta de crédito $2,750 por un traje de $2,560.00. ¿Qué tasa de interés simple mensual le cargaron?

a) 7.4219% *b*) 0.5371% *c*) 3.7109% *d*) 0.0371% *e*) Otra

71. La ecuación de proporcionalidad $P = k(x/y + 1)$ significa que

a) P es proporcional a x e inversamente proporcional a $y + 1$.

b) P es proporcional a x e inversamente proporcional a y.

c) P es proporcional a $x + y$ e inversamente proporcional a y.

d) P es proporcional a $x + 1$ e inversamente proporcional a y.

e) Otra

72. Si A es proporcional al cubo de x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la suma de 3 y el cuadrado de y, entonces,

a) $A = kx^3\sqrt{3 + y^2}$ *b*) $A = 3kx\Big/\sqrt{3 + y^2}$ *c*) $A = kx^3\Big/\sqrt{3^2 + y}$ *d*) $A = kx^3\Big/\sqrt{3 + y^2}$ *e*) Otra

73. Es una expresión equivalente a $A = \log_b(x + 4)$

a) $b^A = x + 4$ *b*) $A^b = x + 4$ *c*) $(x + 4)^A = b$ *d*) $(x + 4)^b = A$ *e*) Otra

74. Si $P^{x+y} = 100$ entonces

a) $\log_p(x + y) = 100$ *b*) $\log_{100}(x + y) = P$ *c*) $\log_p(100) = x + y$ *d*) $\log_p(x) = 100 - y$ *e*) Otra

75. Si $(32.52)^{x+2} = 8$, entonces el valor de x es

a) 0.597222277 *b*) –1.402777723 *c*) 1.194444557 *d*) 1.402777723 *e*) Otra

76. Al despejar x de la ecuación $\log(3 + x) = 1.8$ resulta

a) $x = 60.0957$ *b*) $x = 3.0496475$ *c*) $x = 66.0957$ *d*) $x = -1.2$ *e*) Otra

77. La producción de zapatos en 2004 fue de 365,750 pares. ¿Cuántos pares se producirán en 2009 si la producción anual aumenta el 1.85%.

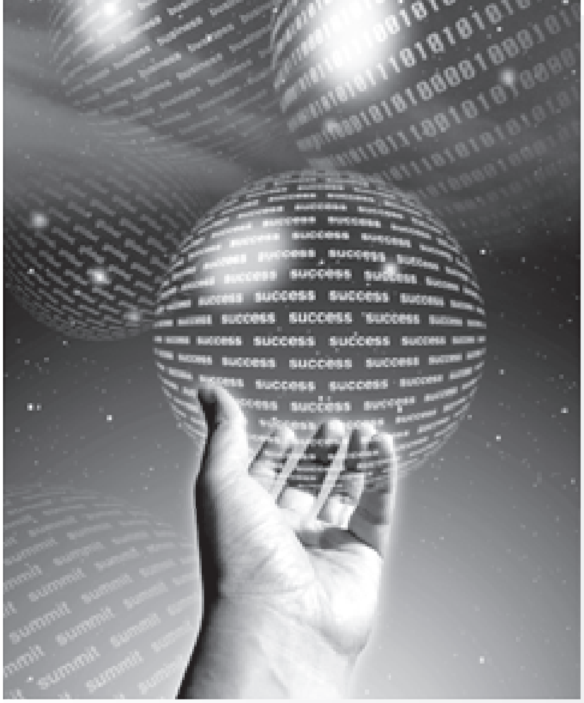
a) 393,576 *b*) 399,582 *c*) 400,857 *d*) 408,273 *e*) Otra

78. El valor de rescate de un activo que se deprecia 25 mil dólares anuales, con el método de la línea recta, es de $60,000. ¿Cuál fue un precio original si se consideran 7 años de vida útil?

a) 235,000 *b*) 115,000 *c*) 291,667 *d*) 175,000 *e*) Otra

79. ¿Cuánto deberá depositar el vigésimo tercer día después del corte un cuentahabiente para mantener el saldo promedio de $500 en su tarjeta de crédito, si el primer día su saldo fue de $1,750, el octavo dispuso de $475, y el vigésimo pagó con su tarjeta $569 en el supermercado? Considere 30 días entre las dos fechas de corte.

a) $3,354.11 *b*) $4,146.43 *c*) $3,981.75 *d*) $4,095.71 *e*) Otra



Capítulo 2

Series y sucesiones

Contenido de la unidad

En este capítulo se analiza un tema fundamental en el aprendizaje de las matemáticas financieras: las *progresiones* o *sucesiones.* Se emplean en la resolución de problemas que tienen que ver con la transferencia de capitales en partidas sucesivas, como la amortización de créditos, las compras a plazos, la renta de viviendas o las inversiones con depósitos periódicos.

Buena parte de la temática de los capítulos posteriores se fundamenta en los conceptos que aquí se presentan. Por ello, es importante y útil que se entiendan y se asimilen cabalmente por parte del estudiante antes de continuar con el estudio de los otros capítulos que conforman esta obra.

Las sucesiones que se conocen también como **progresiones**, tienen múltiples aplicaciones en diversas áreas como la ingeniería, la economía, la estadística y otras; sin embargo, las que más se utilizan en matemáticas financieras y en finanzas son las **aritméticas** y las **geométricas**. Las primeras se caracterizan porque la diferencia entre dos términos sucesivos cualesquiera es siempre la misma; mientras que en las segundas, el cociente entre dos términos sucesivos es constante: es siempre el mismo.

No obstante, hay progresiones donde los términos no guardan relación alguna, tal como se aprecia en los primeros ejemplos.

2.1 Terminología y clasificación de las sucesiones

Definición 2.1

Sucesión es el conjunto ordenado de números, llamados *términos* de la sucesión y se denotan con a_n, donde el subíndice n indica la posición del término.

A partir de esta definición, se dice que las sucesiones, en general, se representan como:

$$a_1, a_2, ..., a_n$$

Ejemplo 1

Sucesión, ventas anuales de una exportadora

Las ventas anuales de la exportadora Cítricos y Derivados, S. A., en los últimos 7 años son:

6.80, 7.25, 8.30, 8.60, 9.70, 10.25 y 12.45,

cantidades que representan una sucesión, donde el primer término es $a_1 = 6.80$, el segundo es $a_2 = 7.25$ y el último es $a_7 = 12.45$.

Ejemplo 2

Sucesión, tasas de rendimiento anual de los certificados del Tesoro

Suponiendo que, durante las últimas semanas de 2004, la tasa de rendimiento anual de los certificados del Tesoro (CT), a 28 días correspondió a los siguientes porcentajes:

8.21, 8.25, 8.29, 8.31, 8.32, 8.34, 8.37, y 8.36

Éstos son valores que constituyen una sucesión, cuyo primer término es $a_1 = 8.21$, el segundo es $a_2 = 8.25$, y el octavo es $a_8 = 8.36$.

Es común expresar los términos de las sucesiones mediante una fórmula en función de n o de cualquier otra literal, la cual se reemplaza sucesivamente por los números enteros positivos 1, 2, 3, …

Ejemplo 3

Términos de las sucesiones

Los primeros cinco términos de la sucesión dada por $a_n = 4n + n^2$ son:

$a_1 = 4(1) + 1^2 = 5$ $\quad$ $a_2 = 4(2) + 2^2$ o $a_2 = 12$

$a_3 = 4(3) + 3^2$ o $a_3 = 21$ $\quad$ $a_4 = 4(4) + 4^2$, es decir, $a_4 = 32$

y $\quad$ $a_5 = 4(5) + 5^2$, esto es, $a_5 = 45$

Ejemplo 4

Suponiendo que los términos de una sucesión están dados por la fórmula:

$$a_n = 3n + 2$$

a) ¿Cuáles son los primeros cinco?

b) ¿Qué lugar ocupa el número 2,177 en la sucesión?

c) ¿Qué característica se observa en los términos de la sucesión?

solución

a) Para los primeros cinco se reemplaza sucesivamente n por 1, 2, 3, 4, 5 y, entonces, $a_1 = 3(1) + 2$ o $a_1 = 5$, $a_2 = 3(2) + 2$ o $a_2 = 8$ y, de igual manera, y $a_3 = 11$, $a_4 = 14$ y $a_5 = 17$.

b) Se reemplaza a_n por 2,177 y se despeja n

$$2{,}177 = 3n + 2$$

de donde $3n = 2{,}177 - 2$, $n = 2{,}175/3$ o $n = 725$

c) Los términos crecen de 3 en 3 y este número corresponde al coeficiente de n en la fórmula dada; puede decirse que para expresar los números que van de 5 en 5, por ejemplo, el coeficiente de n en la fórmula que lo representa debe ser 5, si la ecuación es lineal.

Ejercicios 2.1

1. Explique brevemente los conceptos de *sucesión, término de una sucesión, progresión aritmética* y *progresión geométrica.*
2. Escriba 10 ejemplos de sucesiones en la vida real.
3. ¿Qué significan n y a_n en una progresión?

4. Obtenga los términos séptimo y vigésimo tercero de las progresiones dadas por:

a) $a_n = 5 - n$ *b*) $a_n = 2 + 1/n$
c) $a_n = 2n - 1$ *d*) $a_n = n(n - 3)$
e) $a_n = 1 + n/2$ *f*) $a_n = 5$

5. ¿Cómo se expresan los múltiplos positivos de 4 con una fórmula?

6. ¿Qué término es el 180 en la progresión dada por

$a_n = 5n - 10$?

7. ¿Qué lugar ocupa el cero en la progresión definida por la fórmula

$a_n = n^2 - 20n$

8. Escriba los términos del quinto al séptimo de la sucesión dada por

a) $a_n = 1/(n + 4) + 2n$
b) $a_n = 12n - n^2$

9. ¿Cuál es el vigésimo término de la sucesión determinada por

$a_n = 4n - (n - 2)^2/6$

10. ¿Qué posición ocupa el 167 en la progresión

$a_n = 8n + 7$?

11. Si el primer término de una sucesión es 15 y cada uno es igual al anterior más 4, ¿cuál es el decimotercero?

12. Si en una progresión el primer término es 20 y cada uno es igual al anterior menos 5, ¿cuál es el vigésimo?

13. ¿Cuál es el primer término de una progresión donde cada uno es igual al anterior multiplicado por 3 y el cuarto término es 54?

14. ¿Cuál es el decimoquinto término de una sucesión donde cada uno es igual a la mitad del anterior y el décimo es 48?

15. ¿A qué es igual el decimosexto término de una progresión si cada uno es el triple del anterior y el decimotercero es 5?

16. En una progresión el séptimo término es 8 y el quinto es –10. ¿Cuál es el sexto si entre dos sucesivos existe la misma diferencia?

17. En una progresión, todo término es igual al anterior multiplicado por 0.5. ¿Cuál es el décimo si el octavo es 28?

18. ¿Cuál es el primer término de una progresión donde el quinto término es 18 y donde cada uno es igual al anterior multiplicado por 3?

19. ¿Cuál es el undécimo término de una progresión donde el octavo es 3 y donde cada uno es igual al que le precede más 4?

En los ejercicios 20 a 33 seleccione la opción correcta justificando su elección.

20. El término 52º de la progresión dada por $a_n = 2n - n^2$ es

a) –1,980 *b*) 2,600 *c*) 2,160 *d*) –2,600 *e*) Otra

21. Es la posición que ocupa el número 49 en la progresión dada por $a_i = 4 + \sqrt{i + 2}$

a) 2,023 *b*) 1,320 *c*) 2,027 *d*) 53 *e*) Otra

22. El término 105º de la progresión dada por $a_n = 10 + n^2 - 80n$ es

a) 2,173 *b*) 2,635 *c*) 2,703 *d*) 1,978 *e*) Otra

23. Obtenga el término número 50 de la progresión dada por $a_n = \dfrac{1}{n^2 - 40n}$

a) 0.008 *b*) 0.05 *c*) 0.002 *d*) 0.02 *e*) Otra

24. ¿Cuánto suman los primeros tres términos de la sucesión representada por $a_n = 20 - n^2 + 5n$?

a) 87 *b*) 92 *c*) 51 *d*) 76 *e*) Otra

25. La suma de los primeros 4 términos de la progresión dada por $a_n = (-1)^n(n^2 + 4)$ es

a) –29 *b*) 85 *c*) 29 *d*) –42 *e*) Otra

26. En la progresión –4.5, –3, 0, 7, 10, 25, 25 el quinto término es

a) –3 *b*) 10 *c*) 25 *d*) 0 *e*) Otra

27. La forma de representar a los números pares mayores que –9, donde *n* es un número entero positivo, es

a) $a_n = 10 - n$ *b*) $a_n = -7 - 2n$ *c*) $a_n = 2n - 10$ *d*) $a_n = 3n - 12$ *e*) Otra

28. Es un número que está en la sucesión dada por $a_n = 4n - 5$

a) 221 *b*) –13 *c*) 73 *d*) 95 *e*) Otra

29. ¿Cuál es la posición del número 23 en la sucesión dada por $a_n = \sqrt{n} + 7$

a) 256ª *b*) 49ª *c*) 16ª *d*) 81ª *e*) Otra

30. La suma de los términos 14°, 19°, 26° y 35° inclusive en la sucesión dada por $a_i = \sqrt{i - 10} + 8$ es

a) 124 *b*) 86 *c*) 78 *d*) 94 *e*) Otra

31. ¿Cómo expresa mediante una ecuación la sucesión 7, 11, 15, 19... *

a) $a_n = 8n + 1$ *b*) $a_n = n + 6$ *c*) $a_n = 4n + 3$ *d*) $a_n = 3n + 1$ *e*) Otra

32. Son los primeros términos de la sucesión dada por $a_n = 5n - n^2$

a) 4, 6, 8 *b*) 4, 5, 6 *c*) 4, 6, 9 *d*) 4, 6, 6 *e*) Otra

33. ¿Cuál es la ecuación que representa la sucesión –10, –3, 4, 11...

a) $a_n = 7n - 17$ *b*) $a_n = -(4n + 6)$ *c*) $a_n = 2n - 12$ *d*) $a_n = 4n - 14$ *e*) Otra

* Los puntos suspensivos indican que los términos continúan con la misma regla.

2.2 Progresiones aritméticas

Suponga que cada litro de gasolina aumenta 3 centavos por mes y que el producto interno bruto, PIB, de su país, crece a razón del 2.5% anual.

En el primer caso el precio de la gasolina en un mes cualquiera es igual al precio del mes anterior ***más*** un valor constante 3. Sin embargo, en el segundo, el PIB de cualquier año será igual al PIB del año anterior multiplicado ***por*** la constante 1.025 ¿Por qué?

Estos dos casos ejemplifican la diferencia entre las progresiones aritméticas y las geométricas. En esta sección se abordan las primeras.

Definición 2.2

Una progresión es **aritmética** si cada término es igual al anterior **más** una constante d llamada diferencia común, es decir, si el enésimo término es

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Note usted que para hallar la diferencia de cualquier término se resta el que le precede, es decir,

$d = a_n - a_{n-1}$ se despeja d de la ecuación de la definición 2.2

Ejemplo 1

Progresión aritmética

Los primeros términos de la progresión $a_n = 5n + 1$ son

$a_1 = 5(1) + 1 = 6$, $a_2 = 5(2) + 1 = 11$, $a_3 = 5(3) + 1 = 16$, $a_4 = 5(4) + 1 = 21$, $a_5 = 5(5) + 1 = 26$

La anterior es una progresión aritmética, ya que cada término es igual al anterior más 5 y la diferencia común es 5.

Ejemplo 2

Términos de la progresión aritmética

¿Cuáles son los primeros tres términos de la progresión aritmética si el cuarto es $a_4 = 13$ y el octavo es $a_8 = 27$?

solución

Como se aprecia en la figura 2.1, la diferencia entre los términos cuarto y octavo es igual a 4 veces la diferencia común.

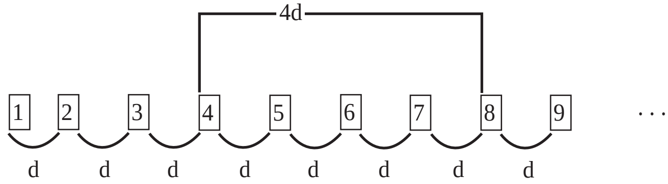


FIGURA 2.1

Por lo tanto, $a_8 = a_4 + 4d$ o

$27 = 13 + 4d$ se sustituye a_8 por 27 y a_4 por 13

$27 - 13 = 4d$

$4d = 14, \quad d = 14/4, \quad d = 7/2 \quad$ o $\quad d = 3.5$

Los términos anteriores al cuarto, es decir, los tres primeros, se obtienen restando sucesivamente la diferencia, por ejemplo:

$a_3 = a_4 - d \quad a_3 = 13 - 3.5$ o $a_3 = 9.5$ $a_2 = a_3 - d \quad a_2 = 9.5 - 3.5 \quad a_2 = 6$ y

$a_1 = a_2 - d \quad a_1 = 6 - 3.5$ o $a_1 = 2.5$

En la misma figura 2.1, donde los puntos suspensivos indican que los términos continúan indefinidamente, se observa que para obtener cualquier término n, se debe sumar al primero $(n - 1)$ veces la diferencia común. Esto quiere decir que para el quincuagésimo término del ejemplo 2 se deberá hacer lo siguiente:

$$a_{50} = 2.5 + (50 - 1)(3.5) \quad \text{o} \quad a_{50} = 174 \qquad n - 1 = 50 - 1$$

Esto se verifica fácilmente al observar que los términos de cualquier progresión aritmética pueden escribirse, dependiendo del primer término, de la siguiente forma:

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d$

$a_3 = (a_1 + d) + d$ o $a_3 = a_1 + 2d$ porque $a_2 = a_1 + d$

$a_4 = a_3 + d$

$a_4 = (a_1 + 2d) + d$ o $a_4 = a_1 + 3d$ ya que $a_3 = a_1 + 2d$

También se observa que en cada uno de estos términos el coeficiente de d es uno menos que el subíndice de a, lo que da lugar al siguiente teorema.

Teorema 2.1

El **enésimo término** de la progresión aritmética con a_1 como primer término y d como la diferencia común, es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Ejemplo 3

Término de la progresión aritmética

Encuentre el vigésimo cuarto término de la progresión aritmética 10, 4, …

solución

Puesto que $a_2 = a_1 + d$, la diferencia es $d = a_2 - a_1$, es decir, $d = 4 - 10$ o $d = -6$. El vigésimo cuarto término es, entonces,

$$a_{24} = 10 + (24 - 1)(-6) \qquad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{o} \qquad a_{24} = -128$$

Ejemplo 4

Valor de un término

Obtenga el valor de x en la progresión aritmética -3, x, 15, …

solución

La diferencia entre el primero y el tercero es igual a 2 veces la diferencia común d, es decir,

$$2d = 15 - (-3), \qquad 2d = a_3 - a_1$$

de donde $2d = 18$, $d = 18/2$ o $d = 9$

Por lo tanto, x es igual al primero más esta diferencia pero también es igual al tercero, menos la diferencia

$$x = -3 + 9 \qquad x = 6 \qquad \text{o} \qquad x = 15 - 9 \qquad a_2 = a_3 - d$$

Ejemplo 5

La diferencia entre los términos 10º y 25º en una progresión aritmética es 45; además, el cuarto es -10. Obtener los tres primeros.

solución

Para llegar al vigésimo quinto término, debe sumarse al décimo 15 veces la diferencia común y como esta suma es igual a 45, se cumple que

$$15d = 45$$

de donde $d = 45/15$ o $d = 3$

Asimismo, para llegar al cuarto, al primero debe sumarse 3 veces la diferencia, es decir,

$$a_4 = a_1 + 3d$$

o $-10 = a_1 + 3(3)$ ya que $a_4 = -10$ y $d = 3$

de donde $a_1 = -10 - 9$ o $a_1 = -19$

Para el segundo y el tercero, se suma la diferencia común, es decir, $a_2 = a_1 + 3$ o $a_2 = -16$ y $a_3 = -13$.

Se sugiere comprobar este resultado hallando los términos siguientes hasta el vigésimo quinto.

Suma de los primeros términos

Tan útil como el enésimo término de las progresiones aritméticas es la suma de sus primeros términos. Esta suma recibe el nombre de **serie** y puede ser finita o infinita, aunque aquí se tratan las que son finitas.

Puesto que cada término es igual al anterior *más* una constante d, también es cierto que cada uno es igual al que le sigue menos d, por eso la suma se expresa como:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

o como $$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

si se invierte el orden de los términos.

Al sumar las dos ecuaciones, en el miembro izquierdo se tiene $2S_n$ y en el derecho se obtiene n veces a_1 y n veces a_n, puesto que se cancelan todos los términos con d.

$$2S_n = na_1 + na_n$$

Por lo que al dividir entre 2 y factorizar n, esta ecuación se reduce a:

$$S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$$

o también $S_n = (n/2)[a_1 + a_1 + (n - 1)d]$ puesto que $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$S_n = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$ $a_1 + a_1 = 2a_1$

Teorema 2.2

La **suma** desde el primer término a_1, hasta el enésimo a_n, en una serie aritmética con diferencia común *d es*

$$S_n = (n/2)(a_1 + a_n) \quad \text{o} \quad S_n = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$$

Veamos una anécdota en relación con esta suma. Se asegura que cuando Carl F. Gauss, uno de los más grandes matemáticos del siglo XVIII nacido en Alemania realizaba sus primeros estudios, sorprendió a sus condiscípulos y maestros al dar la respuesta correcta antes que los demás, cuando se le planteó la suma de los primeros 100 números enteros positivos

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

Argumentó que sumó el primero y el último términos, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente hasta llegar a los términos medios notando que tales sumas eran siempre iguales a 101; esto es, $a_1 + a_{100}$ o $a_1 + a_n$ con n =100, resultado que multiplicó por 50, es decir, por $n/2$. ¿Por qué? Su respuesta fue 5050, lo cual significa que 50(101) o $(n/2)(a_1 + a_n)$ es igual a la fórmula anterior.

Ejemplo 6

Suma de términos de una serie aritmética

Se desea encontrar la suma de los primeros 20 términos de la serie aritmética:

$$(-8) + (-4) +, \ldots$$

solución

La diferencia común es $d = a_2 - a_1 = (-4) - (-8) = 4$, el primer término es $a_1 = -8$ y además $n = 20$, entonces, la suma es

$$S_{20} = (20/2)[2(-8) + (20 - 1)4]$$

$$S_{20} = 10(-16 + 76) \qquad \text{o} \qquad S_n = 600$$

Ejemplo 7

Los primeros 10 términos en una serie aritmética suman 75 y el primero es –15. ¿Cuál es el décimo?

solución

En la primera ecuación del teorema 2.2 se reemplaza a_1 por –15, n por 10 y S_n por 75. Después se despeja a_{10}.

$$75 = (10/2)(-15 + a_{10})$$

$$75 = 5(-15 + a_{10})$$

$$15 = -15 + a_{10} \qquad \text{el 5 pasa dividiendo}$$

$$15 + 15 = a_{10} \qquad \text{el 15 pasa sumando}$$

Por lo que el décimo término es $a_{10} = 30$.

Ejemplo 8

Hallar la suma de los términos desde el 15º hasta el 28º de la progresión aritmética 6, 10, …

solución

La diferencia común es $d = 4$ porque $d = a_2 - a_1$. La suma de los primeros 28 es

$$S_{28} = (28/2)[2(6) + (27)(4)] \qquad S_n = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{28} = 14(120) \qquad \text{o} \qquad S_{28} = 1{,}680$$

La suma de los primeros 14 términos es:

$$S_{14} = (14/2)[2(6) + 13(4)]$$

$$S_{14} = 7(64) \qquad \text{o} \qquad S_{14} = 448$$

y la suma desde el 15º hasta 28º es igual a la diferencia entre los dos resultados, esto es:

$$S = 1{,}680 - 448 \qquad \text{o} \qquad S = 1{,}232$$

Ejercicios 2.2

1. Obtenga el término indicado en las progresiones aritméticas:

a) 1, –3, … el décimo

b) 4, 1, … el vigésimo

c) –10, –5, … el octavo

d) 4, 7, … el trigésimo

e) 100, 80, … el noveno

f) –5, 3, … el duodécimo

2. Obtenga la suma hasta el término pedido en las sucesiones del problema 1.

3. Encuentre los primeros tres términos de la progresión aritmética si:

a) $a_{12} = -13$ y $a_{15} = -28$

b) $a_5 = -3$ y $a_6 = 4$

c) $a_{10} = -2$ y $a_{20} = 8$

d) $a_6 = 10$ y $a_{10} = 6$

e) $S_7 = 70$ y $S_8 = 75$

f) $a_{15} = 8$ y $S_{15} = 20$

4. Calcule el primer término de la sucesión aritmética, donde el quinto sea 20 y el undécimo 23.

5. ¿Cuál es el cuarto término de la progresión aritmética si el que está en el lugar 49 es 25 y en el lugar 50 es 21?

6. ¿Cuál es el primer término de la progresión aritmética donde el octavo es –3 y es igual al tercero más 10?

7. Si la diferencia entre los términos décimo y decimosexto en una progresión aritmética es 10 y este último es igual a 75, ¿cuál es el primero?

8. En una serie aritmética, la suma desde el primero hasta el decimosegundo es 25, siendo éste igual a 1/6. ¿Cuál es el primero?

9. Obtenga los primeros 3 términos de la serie aritmética si suman 60 y la diferencia entre el primero y el tercero es 16.

10. Encuentre el primer término de la serie aritmética si el cuarto es −4 y la suma de los primeros cuatro es 18.

11. Los primeros 10 términos en una serie aritmética suman 35 y el primero es −5. Determine el décimo.

12. Evalúe la suma de los primeros 45 términos de la sucesión aritmética 3, −1 …

13. El duodécimo término en una progresión aritmética es 30 y la diferencia entre éste y el séptimo es 25. ¿Cuáles son los tres primeros?

14. Obtenga el valor de x en la progresión aritmética

a) 70, x, 48, … *c*) 10, −3, $(x + 2)$, …

b) −5, 7, x, … *d*) x, 5, −1, …

15. Encuentre la suma de los 20 primeros términos de la sucesión aritmética 3, x, −5, …

Seleccione la opción correcta en los problemas 16 a 25 y justifique su elección.

16. El valor de x en la progresión aritmética x, −5, 4, … es

a) −13 *b*) 13 *c*) −14 *d*) 4 *e*) Otra

17. El vigésimo quinto término de la sucesión aritmética 10, −4, … es

a) −418 *b*) 326 *c*) −326 *d*) 412 *e*) Otra

18. ¿Cuál es el valor de x en la progresión aritmética 5, $x - 3$, 13, …?

a) −4 *b*) 4 *c*) 10 *d*) 12 *e*) Otra

19. La suma de los primeros 15 términos de una progresión aritmética es 450 y el 15º es 65. Determine los primeros tres.

a) −5, 0, 5 *b*) 2, 7, 12 *c*) −3, 5, 13 *d*) −10, −5, 0 *e*) Otra

20. Si los primeros tres términos en una sucesión aritmética suman 219 y el primero es 80, ¿cuánto suman los primeros 15?

a) 875 *b*) 465 *c*) 1,935 *d*) 1,325 *e*) Otra

21. Encuentre la suma de los primeros 40 términos de la progresión aritmética, donde el octavo es 20 y el vigésimo es 8.

a) 312 *b*) 260 *c*) 300 *d*) 420 *e*) Otra

22. La suma de los 15 primeros términos en una progresión aritmética es 630 y la de los primeros 25 es 630. ¿Cuáles son los tres primeros?

a) 70, 65, 60 *b*) 50, 55, 60 *c*) −10, −4, 2 *d*) 70, 66, 62 *e*) Otras

23. ¿Cuál es el valor de x en la sucesión aritmética $x + 4$, 4, 11, …?

a) −7 *b*) 3 *c*) −1 *d*) −3 *e*) Otra

24. ¿Cuánto suman los primeros 20 términos de la sucesión del problema 23?

a) 2,720 *b*) 1,270 *c*) 2,120 *d*) 870 *e*) Otra

25. ¿Cuánto suman los términos del 70º al 75º en la progresión aritmética dada por $a_n = 3n - 5$?

a) 725 *b*) 975 *c*) 850 *d*) 720 *e*) Otra

2.3 Progresiones geométricas

Definición 2.3

Una progresión es **geométrica** si cada término es igual al anterior ***por*** una constante r llamada *razón común*, es decir, si

$$a_n = a_{n-1}(r)$$

Note que para hallar la razón se divide un término entre el que le precede, esto es:

$$r = a_n/a_{n-1}$$

Ejemplo 1

Términos de una progresión geométrica

Los primeros seis términos de la progresión geométrica con $a_1 = 4$, el primer término, y $r = 1/2$, la razón común, son:

$a_1 = 4$	$a_2 = 4(1/2) = 2$	o	$a_2 = 2$
$a_3 = 2(1/2)$ o $a_3 = 1$	$a_4 = 1(1/2)$	o	$a_4 = 1/2$
$a_5 = (1/2)(1/2)$ o $a_5 = 1/4$ y	$a_6 = (1/4)(1/2)$	o	$a_6 = 1/8$

Ejemplo 2

Cálculo del valor de los términos de una sucesión geométrica

Encontrar el cuarto y el décimo términos de la sucesión geométrica –3, 2, …

solución

La razón es $r = 2/(-3)$ o $r = -2/3$ $r = a_2/a_1$

El cuarto término es igual al primero multiplicado 3 veces por la razón, ¿por qué?

$$a_4 = a_1 r(r)(r) \quad \text{o} \quad a_4 = a_1 r^3$$

$$a_4 = (-3)(-2/3)^3$$

es decir, $a_4 = 8/9$

Para llegar al décimo, el cuarto se multiplica 6 veces por la razón. ¿Por qué?

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_4(r)^6 \\ &= (8/9)(-2/3)^6 \\ &= 512/6{,}561 \quad \text{o} \quad a_{10} = 0.078036885, \text{ aproximadamente.} \end{aligned}$$

Ya que en las progresiones aritméticas puede encontrarse cualquier término sin tener el inmediato anterior, se propone el siguiente teorema para hacerlo en las progresiones geométricas.

Teorema 2.3

El **enésimo término** de la progresión geométrica, cuyo primer término es a_1 y la razón es r, está definido por

$$a_n = a_1(r^{n-1})$$

Aplicando sucesivamente la definición de progresión geométrica se comprueba esta fórmula:

$$\begin{array}{llll} a_2 = a_1 r & & & \\ a_3 = a_2 r = (a_1 r)r & \text{o} & a_3 = a_1 r^2 & a_2 = a_1 r \\ a_4 = a_3 r = (a_1 r^2)r & \text{o} & a_4 = a_1 r^3 & a_3 = a_1 r^2 \\ a_5 = a_4 r = (a_1 r^3)r & \text{o} & a_5 = a_1 r^4 & a_4 = a_1 r^3, \text{ etcétera.} \end{array}$$

Se observa que el exponente de r, en cada término, es uno menos que el subíndice de a, es decir, tal como se indica en el teorema.

Ejemplo 3

Cálculo del valor de un término de una progresión geométrica

Hallar el vigésimo término de la progresión geométrica

$$1.02, (1.02)^3, \ldots$$

solución

La razón es $r = (1.02)^3/1.02$ o $r = (1.02)^2$, el primer término es $a_1 = 1.02$, $n = 20$, porque se pregunta el vigésimo, entonces,

$a_{20} = (1.02)((1.02)^2)^{20-1}$ $\qquad a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_{20} = (1.02)(1.02)^{38}$ $\qquad (x^m)^n = x^{mn}$

$a_{20} = (1.02)^{39}$ $\quad$ o $\quad$ $a_{20} = 2.164744768$, aproximadamente, $(x^m)(x^n) = x^{m+n}$

Ejemplo 4

Los términos décimo y vigésimo sexto en una progresión geométrica son $a_{10} = 1/128$ y $a_{26} = 512$. ¿Cuáles son los primeros tres?

solución

El término a_{26} debe ser igual al décimo multiplicado 16 veces por la razón, es decir,

$$a_{26} = a_{10}(r)^{16} \text{ o } 512 = (1/128)r^{16}, \text{ sustituyendo,}$$

de donde $\qquad r^{16} = 512(128)$, $r^{16} = 65{,}536$ $\quad$ o $\quad$ $r = 2$

sacando la raíz décimo sexta.

También es cierto que $a_{10} = a_1 r^9$ según el teorema 2.4. Entonces, al sustituir quedará

$$1/28 = a_1(2)^9 \qquad \text{o} \qquad 1/128 = a_1(512)$$

de donde $\qquad a_1 = (1/128)/512 \qquad a_1 = 1/65{,}536$ $\quad$ o $\quad$ $a_1 = 1/2^{16}$

Esto se multiplica por 2 para el segundo y, de nuevo por 2, para el tercero; es decir,

$a_2 = (1/2^{16})(2)$ $\quad$ o $\quad$ $a_2 = 1/2^{15}$ $\qquad a_2 = a_1 r$

y $\quad a_3 = (1/2^{15})(2)$, $a_3 = 1/2^{14}$ $\quad$ o $\quad$ $a_3 = 0.000061035$ aproximadamente

Suma de los primeros términos

La primera ecuación de las dos siguientes es la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica. La segunda se obtiene multiplicando la primera por $(-r)$. Después, se suman las dos:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-3} + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$$
$$-rS_n = -a_1 r - a_1 r^2 - \ldots - a_1 r^{n-3} - a_1 r^{n-2} - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n$$

Entonces $\quad S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$

Note que al multiplicar por $(-r)$ se suma 1 a los exponentes de r en la primera ecuación y, con excepción de a_1 y a_n, todos los términos se cancelan al sumar las dos ecuaciones. Después, se factoriza S_n en el miembro izquierdo de la ecuación que resultó y a_1 en el derecho, es decir,

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n) \qquad x + bx = x(1 + b)$$

de donde $\quad S_n = a_1\left(\dfrac{1-r^n}{1-r}\right)$ o $S_n = a_1\left(\dfrac{r^n-1}{r-1}\right)$

Esta ecuación no es válida para $r = 1$, ya que no existe la división entre cero; pero si $r = 1$, todos los términos son iguales y la suma será simplemente

$$S_n = a_1 n$$

Esto se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 2.4

Si a_1 es el primer término y r es la razón constante en una serie geométrica, la **suma** de los primeros n términos es

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{si} \quad r \neq 1 \quad \text{o} \quad S_n = na_1 \quad \text{si} \quad r = 1$$

Ejemplo 5

¿Cuánto suman los primeros 12 términos de la progresión geométrica 3, x, 1/3, …

solución

Para aplicar la ecuación del teorema 2.4 necesitamos hallar la razón, y como el tercer término es igual al primero, multiplicado 2 veces por la razón, se tiene

$$\tfrac{1}{3} = (3)r^2$$

de donde, al pasar al lado izquierdo el 3 que está multiplicando, queda:

$^1\!/_9 = r^2$ y al sacar raíz cuadrada nos da que $r = \pm^1\!/_3$ y esto significa que hay dos soluciones. Hallamos la primera con $r = {}^1\!/_3$ para que el lector obtenga la segunda con $r = -{}^1\!/_3$

$$S_{12} = (3)\frac{1-(\frac{1}{3})^{12}}{1-\frac{1}{3}} \qquad\qquad a = 3,\ n = 12$$

$$= (3)(1.499997178) \qquad \text{o} \qquad S_{12} = 4.499991534$$

Ejemplo 6

Suma de términos de una progresión geométrica

Se desea obtener la suma de los primeros 25 términos de la progresión geométrica si el decimoquinto y el decimoctavo son, respectivamente, 2 y 16.

solución

El decimoquinto término es $a_{15} = 2$, para llegar al decimoctavo se multiplica éste 3 veces por la razón, esto es,

$$a_{18} = 2(r)(r)(r) \quad \text{o} \quad 16 = 2r^3$$

Por lo que al dividir entre 2 y sacar la raíz cúbica, queda:

$$r^3 = 8, \quad r = \sqrt[3]{8} \quad \text{o} \quad r = 2$$

Se reemplazan en el teorema 2.3: $a_{15} = 2$, $n = 15$ y $r = 2$, para hallar a_1:

$$2 = a_1(2)^{14} \qquad\qquad a_{15} = a_1 r^{14}$$

de donde $\quad a_1 = 2/2^{14} \quad$ o $\quad a_1 = (1/2)^{13}$

La suma de los primeros 25 es, por lo tanto,

$$S_{25} = (1/2)^{13}\left(\frac{1-2^{25}}{1-2}\right) \qquad S_{25} = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$= 0.00012207(33'554,431)$$

o $\quad S_{25} = 4{,}096$ (redondeando)

Es importante señalar que siempre que un término sea un porcentaje mayor o menor que el que le precede, la sucesión será geométrica, se aprecia en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7

Cálculo del valor de un término y la suma de términos determinados

Se pretende obtener el decimosexto término y la suma de los primeros 16 de la progresión, donde cada término es 5% mayor que el anterior y el primero es 80.

solución

a) El segundo, puesto que el primero es $a_1 = 80$, es:

$$a_2 = a_1 + 0.05a_1 \qquad \text{5\% se expresa 0.05}$$
$$a_2 = a_1(1 + 0.05) \qquad \text{se factoriza } a_1$$
$$\text{o} \quad a_2 = a_1(1.05)$$

El tercero es

$$a_3 = a_2 + 0.05a_2$$
$$a_3 = a_2(1.05) \qquad \text{Se factoriza } a_2$$
$$a_3 = (a_1(1.05))(1.05) \qquad \text{o} \quad a_3 = a_1(1.05)^2$$

Y el decimosexto, puesto que la razón es $r = 1.05$, tal como se observa en a_2 y a_3, será:

$$a_{16} = a_1(1.05)^{15} \qquad a_n = a_1(r^{n-1})$$
$$a_{16} = 80(1.05)^{15} \text{ o}$$
$$a_{16} = 166.3142543$$

b) La suma de los primeros 16 es

$$S_{16} = 80\frac{1-(1.05)^{16}}{1-1.05} \qquad S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$= 80(23.65749176)$$

o $$S_n = 1{,}892.599341$$

Advertencia

Mientras que si v es la tasa de incremento en los términos, cuando cada uno es un porcentaje mayor, o menor, que el anterior; $1 + v$ es la tasa o razón r de la progresión geométrica. Confundir v con $1 + v$ es un error común de nuestros alumnos.

Ejercicios 2.3

1. Explique la característica de las progresiones *geométricas* y defina la *razón* en una progresión geométrica.
2. ¿Es posible que en una progresión geométrica algún término sea cero?
3. Obtenga los primeros tres términos de la progresión geométrica si:

   a) El quinto es $a_5 = 1$ y la razón es $r = 1/2$

   b) La suma de los primeros tres términos es $S_3 = 6$ y el tercero es $a_3 = 2$

   c) El cuarto término es $a_4 = -16$ y el séptimo es $a_7 = 128$
4. ¿Por qué no es posible que en una sucesión geométrica el primer término sea 8 y el tercero –2?
5. Obtenga el trigésimo término de la sucesión geométrica si el primero es 3/4 y el cuarto es 6.
6. El primer término de una sucesión geométrica es 64 y el sexto es 2. Halle los intermedios.
7. Encuentre el valor de x en las progresiones geométricas

   a) 3, x, 48, …

   b) x, 4, –4/3, …

   c) 5, –1, x, …

   d) 3, $(x - 3)$, 4/3, …

   e) x, 2, 4/3, …

   f) 10, 2.5, x, …
8. Obtenga el término indicado en las progresiones geométricas

   a) 2, 3, … el décimo

   b) 5, 2, … el octavo

   c) 1/4, 1/3, … el vigésimo cuarto

   d) 1/4, x, 4, … el decimoquinto
9. Obtenga el vigésimo cuarto término en la progresión geométrica 2, 2^3, …
10. ¿Cuál es el trigésimo término en la progresión geométrica 3^{-1}, 3^{-2}, …
11. El quinto término en una sucesión geométrica es 21 y el séptimo es 7/3. Determine los tres primeros.
12. Encuentre el término medio en la progresión geométrica de 11 términos:

$$4{,}096, \ldots , 1/256$$

13. ¿Cuánto suman los términos de la sucesión del problema 12?
14. Obtenga la suma de los primeros 10 términos de la serie geométrica

$$3^{-1} + 3^{-2} +, \ldots$$

15. ¿Cuánto suman los primeros 28 términos de la progresión geométrica

$$1.025, (1.025)^2, \ldots$$

16. Encuentre la suma de los primeros 12 términos de la serie geométrica

$$15 + 12 +, \ldots$$

17. Evalúe la suma de los primeros 36 términos de la serie geométrica

$$(1.027)^{-1} + (1.027)^{-2} +, \ldots$$

18. Evalúe la suma de la serie geométrica

$$(1.75)^{-4} + (1.75)^{-6} +, \ldots + (1.75)^{-48}$$

19. El séptimo término y el primero de una serie geométrica son, respectivamente, $(2.05)^3$ y $(2.05)^{15}$. Encuentre la suma de los primeros siete.

En los problemas 20 a 31 seleccione la opción correcta.

20. El 23º término de la progresión geométrica, 100, 70,… es

a) 33.32421 *b*) 333.2421 *c*) 3,251.9245 *d*) 325.19245 *e*) Otra

21. El primer término de la progresión geométrica con $a_{12} = 1.25^3$ y $a_{13} = 1.25^4$ es

a) $(1.25)^{-6}$ *b*) $(1/1.25)^8$ *c*) $(1/1.25)^7$ *d*) $(1.25)^{-9}$ *e*) Otra

22. El valor de x en la progresión geométrica 3, x, 48, … es

a) 12 *b*) 25.5 *c*) 9 *d*) 16 *e*) Otra

23. Es el 9º termino de la progresión geométrica $^1/_2$, 4, …

a) 1’048,576 *b*) 8’388,608 *c*) 131,072 *d*) 67’108,864 *e*) Otra

24. Es el término medio de la sucesión $^1/_{81}$, … , 81 que consta de 9 términos

a) –3 *b*) 3 *c*) 1 *d*) 9 *e*) Otra

25. ¿Cuál es el 25º término de la progresión geométrica 10, 0, …?

a) 250 *b*) –100 *c*) 500 *d*) No es posible *e*) Otra

26. El valor de x en la progresión geométrica 8, 7, x, … es:

a) 6.125 *b*) 6 *c*) –4 *d*) 8.1429 *e*) Otra

27. Hallar la suma de los primeros 10 términos de la progresión geométrica, donde el primero es 10 y el décimo es 19,683/512.

a) 423.83 *b*) 377.7669 *c*) 3,777.669 *d*) 512 *e*) Otra

28. La suma de los primeros 8 términos de la progresión geométrica 4, x, … es 1020. Determine el valor de x.

a) 12 *b*) 4/3 *c*) 8 *d*) 6 *e*) Otra

29. El 5º término de una sucesión geométrica es 162 y el décimo es 2/3. ¿Cuánto suman los primeros 8?

a) 59,040 *b*) 29,520 *c*) 9,840 *d*) 19,680 *e*) Otra

30. La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 35 y el primero es igual a 5. ¿Cuánto suman los primeros 8?

a) 6,284 *b*) –8,200 *c*) –6314 *d*) 4,328 *e*) Otra

31. El primero y el sexto términos de una progresión geométrica son, respectivamente, 1/16 y 2. Encuentre la suma de los primeros 6.

a) 256 *b*) 124 *c*) 132 *d*) 126 *e*) Otra

32. ¿Cuánto suman los primeros 25 términos de la serie geométrica $(1.03)^{-1} + (1.03)^{-2} + \ldots$ aproximadamente?

a) 17.41314769 *b*) 16.90596863 *c*) 17.93554212 *d*) 16.54238276 *e*) Otra

33. Al sumar los términos del 8º al 13º en la progresión geométrica 3, 42, … resulta:

a) 71.560128 *b*) 23.853376 *c*) 47.706752 *d*) 100.1841792 *e*) Otra

34. ¿Cuál es el primer término de la progresión geométrica con $a_{10} = 3$ y $a_{13} = 81$?

a) 1/2,187 *b*) 1/6,561 *c*) 1/19,683 *d*) 1/4,374 *e*) Otra

2.4 Algunas aplicaciones

Esta sección es un compendio de ejercicios que son aplicaciones reales de progresiones aritméticas y geométricas. Su propósito principal es ayudar al estudiante a reafirmar los conceptos y a diferenciar unas sucesiones de otras; sin embargo, puede omitirse sin que con esto se pierda continuidad en el aprendizaje.

Ejemplo 1

Cotización futura de los certificados de inversión

Suponiendo que los certificados de inversión, aumentan su cotización en 475 millonésimas de dólares por día, ¿qué día estarán a $4.203193, si el primer día del mes valían $4.191318?

solución

Para encontrar el número de días, *n*, en la ecuación del teorema 2.1 se reemplazan: a_1 por 4.191318, a_n por 4.203193 y *d*, la diferencia común, por 0.000475.

$$4.203193 = 4.191318 + (n - 1)(0.000475) \qquad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

de donde con algunos pasos algebraicos queda

$$\frac{4.203193 - 4.191318}{0.000475} = n - 1$$

$$25 = n - 1$$

$$25 + 1 = n \qquad \text{es decir} \qquad \text{el 26º día}$$

Ejemplo 2

Devaluación de la moneda nacional

Si la moneda se devalúa 2 milésimas de la unidad monetaria de su país por día, ¿cuánto se devaluará en 6 meses? Si el 10 de enero la paridad fue de $11.37 por dólar, ¿cuál será para el 15 de mayo siguiente?

solución

a) La devaluación que se alcanza en 6 meses (180 días) es simplemente la multiplicación del número de días por la devaluación diaria en unidad monetaria de su país.

$$180(0.002) = \$0.36 \text{ o } 36 \text{ centavos}$$

b) Con ayuda de un calendario o de la tabla 1 del apéndice (véase pearsoneducacion.net/villalobos), notamos que el 15 de mayo corresponde al 136º día del año. Si a_1 es la paridad del 10 de enero, entonces la del 15 de mayo será a_{126}. La diferencia común en unidades monetarias es $d = 0.002$, por lo que

$$a_{126} = a_1 + (126 - 1)d \qquad 136 - 10 = 126 \text{ días}$$

$$a_{126} = 11.37 + 125(0.002) \text{ y, finalmente,}$$

$$a_{126} = 11.62 \text{ será el valor de cada dólar el 15 de mayo}$$

Ejemplo 3

Fondo de ahorro con renta creciente

¿Cuánto acumulará el señor Hernández si realiza depósitos semanales durante 12 meses, sin incluir intereses, comenzando con $260 e incrementando los siguientes depósitos en $20 cada 4 semanas? ¿Por qué cantidad será el último pago?

solución

a) En 12 meses, es decir, en un año, se tienen 52 semanas y si los pagos crecen cada 4, entonces tenemos 13 grupos de 4, donde cada uno forma una progresión aritmética con:

$$a_1 = 260, \text{ el primer término, el primer depósito}$$

$$d = 20, \text{ la diferencia común}$$

$$n = 13, \text{ el número de términos}$$

La suma de los 13, según la ecuación del teorema 2.2, es, entonces,

$$S_{13} = (13/2)[2(260) + (13 - 1)20] \qquad S_n = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{13} = (13/2)(760) \qquad \text{o} \qquad S_{13} = 4{,}940$$

El total que se invierte en las 52 semanas es igual a 4 veces este resultado:

$$4(4{,}940) = \$19{,}760$$

b) El último pago es igual al término decimotercero de la sucesión: 260, 280, 300, ... y está determinado por:

$$a_{13} = 260 + (13 - 1)20 \qquad \text{o} \qquad a_{13} = \$500$$

Puesto que el primer término es $a_1 = 260$ y la diferencia es $d = 20$.

Ejemplo 4

Utilidades y capital reinvertido por una constructora

En 2002 las utilidades de la compañía constructora VIPAR, S.A., fueron de 18 millones de dólares. En 2005 fueron de 20.25 millones. Suponiendo que el incremento se sostiene de manera geométrica, determine:

a) La tasa de incremento anual en las utilidades.

b) Las utilidades que se estima tendrá en el año 2014.

c) La reinversión total entre 2002 y 2014 inclusive, si la empresa reinvierte el 45% de sus ganancias.

solución

a) Si las utilidades de 2002 son U_1, las de 2003 son

$$U_2 = U_1 + U_1(v) \qquad \text{o} \qquad U_2 = U_1(1 + v)$$

Donde v es la tasa de crecimiento.
Las de 2004 y 2005 son, respectivamente,

$$U_3 = U_1(1 + v)^2 \qquad \text{y} \qquad U_4 = U_1(1 + v)^3$$

Dado que $U_1 = 18$ y $U_4 = 20.25$ millones, al sustituir en la última de estas igualdades, quedará:

$$20.25 = 18(1 + v)^3 \qquad \text{ya que } a_4 = a_1 r^{n-1}$$

de donde $$20.25/18 = (1 + v)^3$$

$$1.125 = (1 + v)^3$$

$$1 + v = \sqrt[3]{1.125}$$

$$1 + v = 1.040041912$$

$$v = 1.040041912 - 1, \text{ por lo tanto, } v = 0.040041912$$

Significa que el incremento anual en las utilidades fue del 4% aproximadamente.

b) Las utilidades del 2014 tendrán 12 incrementos respecto de las de 2002, por esto serán

$$U_{13} = 18(1.040041912)^{12}$$
$$U_{13} = 18(1.601806649)$$
$$U_{13} = \$28.83251968 \text{ millones de dólares}$$

c) Para hallar el capital que se reinvierte es necesario sumar las utilidades de los 13 años, las cuales conforman una serie geométrica con:

$a_1 = 18$ millones, el primer término
$r = 1.040041912$, la razón constante
$n = 13$, el número de términos

La suma, tal como se estudió en la sección 2.3, es:

$$S_n = 18\,\frac{1-(1.040041912)^{13}}{1-(1.040041912)} \quad \text{ya que} \quad S_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r}$$
$$S_n = 18(16.63122505)$$
$$S_n = 299.3620509$$

De esto, el 45% se reinvierte:

$$0.45(299.3620509) = 134.7129229 \text{ o } \$\ 134'712{,}922.90$$

Ejemplo 5

Precio futuro de un bien con devaluación

¿Dentro de dos años cuál será el precio en moneda nacional de una impresora digital, cuyo precio actual es de \$9,750, mismo que se incrementa un 1.8% cada semestre? Considere que la moneda se devalúa un 0.5% cada mes y el tipo de cambio actual es \$11.21 por cada dólar.

solución

Para calcular el valor del dólar al cabo de 2 años, suponga que P_0 es el tipo de cambio actual, por lo que dentro de 1 mes éste será:

$$P_1 = P_0 + 0.005P_0$$
$$P_1 = (1.005)P_0$$

Al final del segundo mes, será un 0.5% mayor:

$$P_2 = P_1 + 0.005P_1$$
$$P_2 = (1.005)P_1$$
$$P_2 = (1.005)(1.005)P_0 \qquad \text{porque } P_1 = 1.005P_0$$
$$P_2 = (1.005)^2P_0 \qquad \text{ya que } a(a) = a^2$$

Continuando de forma semejante, se llegará a que al finalizar el vigésimo cuarto mes, el tipo de cambio será:

$$P_{24} = (1.005)^{24}P_0 = (1.127159776)(11.21) \quad \text{ya que} \quad P_0 = 11.21$$

o $$P_{24} = \$12.63546109$$

De manera semejante, el precio de la impresora en dólares dentro de 4 semestres será:

$$C = 9{,}750(1.018)^4$$
$$C = 10{,}471.18247 \text{ US dólares}$$

y en moneda nacional será:

$$\text{C} = 10{,}471.18247(12.63546109)$$

o $$C = \$132{,}308.22$$

Observe usted que si el tipo de cambio actual es P_1, en vez de P_0, entonces al término del 24º mes será P_{25} y $P_{25} = P_1(1.005)^{24}$ porque $P_n = P_1(r)^{n-1}$ según el teorema 2.3, y lo mismo puede decirse de C.

Ejemplo 6

Monto en el fondo de ahorro para el retiro

¿Qué cantidad, sin contar intereses ni descuentos por comisiones, tendrá en su fondo de retiro o pensión dentro de 10 años, un trabajador que ahora gana 35 mil dólares anuales. La aportación anual que hace a su Fondo de retiro es del 6.5% de su salario y éste crece a razón del 4.5% por año? Considere que la primera aportación es en este año.

solución

La aportación en el primer año es un 6.5% de su salario:

$$A_1 = 35{,}000(0.065) = 2{,}275.00$$

En el segundo, es un 4.5% mayor, ya que así es como aumenta su salario:

$$A_2 = 2{,}275 + 0.045(2{,}275)$$
$$A_2 = 2{,}275(1.045) \qquad x + xa = x(1 + a)$$
$$A_2 = 2{,}377.38$$

En el tercero es:

$$A_3 = ((2{,}275(1.045))(1.045)$$
$$A_3 = 2{,}275(1.045)^2 = 2{,}484.36$$

Es posible apreciar que las 10 aportaciones anuales constituyen una serie geométrica, cuya razón es 1.045; por lo tanto, la suma es

$$S_{10} = 2{,}275\,\frac{1-(1.045)^{10}}{1-1.045} \qquad S_m = a_1\frac{1-r^m}{1-r}$$

$$S_{10} = 2{,}275(12.28820938)$$
$$S_{10} = \$27{,}955.68$$

Pérdida del poder adquisitivo

La devaluación de la moneda, la inflación, el desempleo y otros factores son la causa de que la moneda de un país pierda su capacidad para adquirir bienes y servicios, con el paso del tiempo.

Aunque esta pérdida podría darse y comportarse de varios modos, a continuación analizamos uno donde se supone que la tasa de variación se mantiene fija y de forma geométrica.

Ejemplo 7

Pérdida del poder adquisitivo

Considerando que el poder adquisitivo de la moneda se pierde en un 5.2% anual, determinar:

a) ¿En qué porcentaje se reduce el poder de compra en 5 años?

b) ¿Cuál es la pérdida mensual en porcentaje?

c) ¿De qué porcentaje deberá ser el incremento salarial anual para recuperar el poder de compra original?

solución

a) Si a_1 es lo que ahora se compra, digamos, con mil dólares, en un año se comprará un 5.2% menos, es decir,

$$a_2 = a_1 - (0.052)a_1$$
$$a_2 = a_1(1 - 0.052) \qquad \text{o} \qquad a_2 = a_1(0.948)$$

En dos años se pierde otro 5.2% y, por eso,

$$a_3 = a_2 - (0.052)a_2$$
$$a_3 = a_2(1 - 0.052) \qquad \text{o} \qquad a_3 = a_2(0.948)$$
$$a_3 = [a_1(0.948)](0.948) \qquad \text{ya que} \qquad a_2 = a_1(0.948)$$
$$a_3 = a_1(0.948)^2 \qquad\qquad a(a) = a^2$$

Se aprecia que estos valores forman una progresión geométrica, donde la razón es $r = 0.948$ y, por lo tanto, la capacidad de compra al final del quinto año, cinco años después de ahora será:

$$a_6 = a_1(0.948)^5 \text{ o } a_6 = a_1(0.765670098).$$

Esto quiere decir que, al cabo de 5 años, se comprará solamente el 76.567% de lo que se compra ahora.

Puesto que 0.765670098 puede escribirse como $1 - 0.23432992$, a_6 es expresable como:

$$a_6 = a_1(1 - 0.23432992)$$

Esto significa que la pérdida del poder adquisitivo será del 23.432992%, que, claro, también se obtiene con la diferencia

$$100 - 76.5670098$$

b) Si v es la pérdida mensual, entonces el poder de compra es $1 - v$ y en los 12 meses será $(1 - v)^{12}$ que, a la vez, debe ser igual al poder de adquisición dado por año: $1 - 0.052$ o 0.948, esto es,

$$(1 - v)^{12} = 0.948$$

$$\text{de donde } 1 - v = \sqrt[12]{0.948}$$

$$1 - v = 0.995559822 \qquad \text{o} \qquad v = 0.004440178$$

Y esto se interpreta como el 0.444% mensual, aproximadamente, suponiendo, claro, que la tasa se mantiene fija durante los meses del año.

c) Si con mil dólares al comenzar el año se compraban 10 kilogramos de frijol, digamos, al final se pueden comprar solamente 9.48 kilogramos. ¿Por qué? Por lo tanto, deberá cumplirse que $9.48 + (9.48)x = 10$, donde x es el incremento en el salario para recuperar el poder de adquisición original. Para despejar x, se factoriza el 9.48, se pasa dividiendo y al final se resta la unidad, es decir,

$$9.48(1 + x) = 10$$
$$1 + x = 10/9.48$$
$$x = 0.054852321 \qquad \text{o} \qquad 5.485\%, \text{ aproximadamente}$$

Es importante señalar que siempre que cualquier cantidad se reduzca con una tasa fija, se puede proceder como en este ejemplo. Resolvamos otro para confirmar lo anterior.

Ejemplo 8

Reducción de la deuda externa del país

Si la deuda externa de un país se reduce anualmente un 2.75%, ¿cuánto se reduce en un periodo presidencial de seis años?

solución

Se designa con D_0 la deuda original, es decir, la del primer año. Puesto que la deuda se reduce 2.75% en cada año, en el sexto será:

$$D_6 = (1 - 0.0275)^6 D_0$$
$$D_6 = (0.845936297) D_0$$
$$D_6 = (1 - 0.154063703) D_0 \text{ entonces,}$$
$$D_6 = D_0 - 0.154063703\, D_0$$

Esto quiere decir que se reduce 15.41%, aproximadamente, en el sexenio.

Note que la reducción total no es igual a la multiplicación de la anual por el número de años, sino menor. ¿Por qué?

Ejercicios 2.4

1. ¿Cuánto costará el litro de gasolina en el mes de noviembre, si en mayo del año anterior costaba $6.57 y aumenta 4 centavos por mes?
2. El 28 de julio de 2004 unos certificados de inversión se cotizaron en $3.4183. ¿En cuánto se cotizarán el 3 de diciembre siguiente, suponiendo que aumentan su valor a razón de 128 millonésimas de dólares por día?
3. ¿Cuál será el valor de los certificados de inversión el día 31 si el primer día del mismo mes se cotizaron en $3.4116 e incrementan su valor en 412 millonésimas de dólares por día?
4. Un empleado ahorra $150 dólares la primera semana, 152 la segunda y en cada semana, sucesivamente, 2 pesos más que la anterior. ¿Cuánto ahorrará en la vigésima? ¿En qué semana ahorrará $300.00? ¿Cuánto tendrá en su cuenta de ahorros al final de un año? ¿En cuántas semanas tendrá $35 mil dólares? No considere los intereses.
5. Se organiza un evento artístico en el que cada pareja paga $0.50 más que su predecesora. Se sabe que la que llegó en sextuagésimo lugar pagó $102.00, y que la última pareja en llegar ingresó pagando $500.00. Determine:

   a) Lo que pagó la primera pareja al ingresar al evento.

   b) ¿Cuánto pagó la trigésimo quinta?

   c) ¿Cuántas personas asistieron al evento con boleto pagado?

   d) ¿A cuánto asciende el ingreso total por concepto de admisión?
6. Para ayudar a un compañero de trabajo que sufrió un accidente, un grupo de empleados organizaron una rifa. El premio es de $10,000.00. Los boletos están numerados del 1 al 1,000 y el precio de cada uno es igual al número que tiene marcado multiplicado por 20 centavos. ¿Cuánto entregaron al beneficiario?
7. Suponiendo que las primeras 6 jugadas en una partida de ajedrez se realizaron en 3 minutos y las siguientes aumentaron, 1 minuto cada 6, ¿cuánto tiempo duró una partida de 60 jugadas en total? Considere que cada una de las primeras 6 consumieron el mismo tiempo.
8. ¿Cuál será el precio de un automóvil nuevo dentro de 5 años, si ahora cuesta $155,000.00 y aumenta su precio un 7% anual?
9. Las utilidades de una exportadora crecieron un 12% anual en los últimos 6 años. ¿Cuánto dinero reinvirtió en ese lapso, si la reinversión corresponde al 65% de la utilidad total y en el primer año tuvo utilidades de 1.8 millones de dólares?
10. El primero de un total de 48 abonos mensuales que se hicieron para cancelar una hipoteca, incluyendo intereses, fue de $4,600.00. ¿Cuánto se pagó, en total, por la hipoteca, si cada abono fue un 1.5% mayor que el que le precedió?
11. Las exportaciones aumentan 8% cada año. ¿A cuánto ascenderán en 2010 si en 2005 fueron de $50 millones de dólares?

12. ¿Cuántas unidades monetarias de su país por cada dólar se pagarán el 9 de mayo, si el 5 de enero anterior se pagaron $11.75? ¿Y qué día el dólar costará $12.60? Suponga que las unidades monetarias de su país se devalúan:

a) 0.3 centavos por día *b*) 0.04% diario.

13. Si se sabe que la *inflación* en los primeros 5 meses del año fue de 0.98% mensual, ¿cuál será la inflación acumulada al finalizar el año si se mantiene el mismo crecimiento?

14. ¿Cuánto se devaluará respecto al dólar la moneda del país en un periodo de 6 meses si se devalúo un 0.2% cada mes?

15. ¿Cuántas unidades monetarias de su país por cada dólar se requerirán el 25 de abril, si el 14 de diciembre anterior se necesitaron $11.81 y la devaluación diaria es de 0.002% en promedio?

16. ¿Cuál es el porcentaje de inflación mensual si ésta fue del 18.3% anual?

17. ¿Cuál es el total que un obrero aportará en 17 años a su fondo de ahorros anuales para el retiro, si éstos corresponden al 1.125% de su salario, que actualmente es de $ 25,000 al año y se prevé que aumentará un 11.5% en promedio anual?

En los problemas 18 a 25 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

18. El sueldo actual de un empleado es de $32,000 anuales. ¿Cuánto aportará a su administradora de fondos de retiro durante 10 años, a partir del presente, si la aportación es del 1.125% de su salario y éste aumenta a razón del 8% anual?

a) $5,794.62 *b*) $6,201.35 *c*) $5,429.68 *d*) $6,002.29 *e*) Otra

19. ¿Cuál será el precio en moneda nacional dentro de 1.5 años de un yate, si se considera que el valor actual es de $35,000.00, que aumenta un 1.2% cada trimestre, que la moneda se devalúa un 0.15% por bimestre y que el tipo de cambio actual es de $11.65 unidades monetarias por dólar?

a) $456,033.08 *b*) $443,951.60 *c*) $408,923.68 *d*) $465,329.32 *e*) Otra

20. ¿Cuántas unidades monetarias de su país necesitará Claudia para adquirir $2,500.00 el 18 de diciembre para irse de vacaciones, si el 16 de julio pasado la paridad unidad monetaria-dólar fue de $11.25 y la devaluación diaria es de 0.015%?

a) $28,782.20 *b*) $31,421.12 *c*) $30,926.43 *d*) $25,963.36 *e*) Otra

21. ¿En qué porcentaje se reduce el poder adquisitivo de la moneda del país en 7 meses, si disminuye 0.9% por mes?

a) 7.140629% *b*) 6.843207% *c*) 7.234152% *d*) 6.132429% *e*) Otra

22. Si la deuda externa de un país disminuye 80,000 dólares cada mes y en enero de este año fue de 5 millones de dólares, ¿de cuánto será dentro de 4 años a partir de enero de este año?

a) 1’265,000 *b*) 987,428 *c*) 1’008,328 *d*) 1’160,000 *e*) Otra

23. ¿Cuál será el precio en moneda nacional dentro de tres años, de un tractor de $30,275 actuales, considerando que este precio se incrementa un 2.3% cada semestre, que la moneda se devalúa un 0.3% cada mes y que el tipo de cambio actual es de $11.76 por cada dólar.

a) 424,412.93 *b*) 369,425.08 *c*) 401,104.42 *d*) 435,098.33 *e*) Otra

24. Para comprar una camioneta cuyo precio actual es de \$275,000, Rodolfo abre una cuenta de ahorros con \$12,000 y luego hace 17 depósitos mensuales. Considerando que el precio del vehículo se incrementa en 0.7% cada mes, y sin tomar en cuenta los intereses, determine en cuánto crecen sus pagos si el incremento es

A) aritmético:

a) \$626.08 *b*) \$530.63 *c*) \$702.45 *d*) \$595.02 *e*) Otra

B) geométrico:

a) 3.725% *b*) 4.624% *c*) 4.450% *d*) 4.145% *e*) Otra

Suponga que la compra se realiza un mes después de su último pago.

25. ¿Cuánto deposita en su cuenta de ahorros durante 8 años un empleado que actualmente gana \$102,500 anuales, considerando que ahorra el 15% de su salario, el cual se incrementa

A) \$8,250 anuales

a) \$157,650 *b*) \$165,368 *c*) \$160,728 *d*) \$143,963 *e*) Otra

B) 4.75% anual

a) \$150,728.329 *b*) \$139,913.09 *c*) \$144,217.71 *d*) \$147.068.23 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo usted debe estar capacitado para:

- Definir los conceptos de *progresión*, *serie* y *término* de una sucesión.
- Distinguir las progresiones aritméticas y geométricas.
- Encontrar cualquier término de las progresiones aritméticas con la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- Obtener el enésimo término de las progresiones geométricas con la fórmula:

$$a_n = a_1(r^{n-1})$$

- Calcular la suma de los primeros n términos de las progresiones aritméticas. Con las fórmulas:

$$S_n = (n/2)(a_1 + a_n) \quad \text{o} \quad S_n = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

- Hallar la suma de los primeros n términos de las progresiones geométricas con la fórmula:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{o} \quad S_n = a_1(r)$$

- Plantear y resolver problemas de aplicación en el área económico-administrativa y de negocios, utilizando sucesiones.

Conceptos importantes

Fórmulas para el enésimo término y la suma de los primeros términos de las series aritméticas y geométricas.
Progresión aritmética
Progresión geométrica
Razón constante y diferencia común en las sucesiones
Sucesiones y series

Problemas propuestos para exámenes

En los problemas, 1 a 7 conteste falso o verdadero, justificando su respuesta.

l. a_n representa el término que ocupa la posición n en una progresión. _____________

2. El quinto término de la progresión aritmética 2, 5, … es 18. _____________

3. La suma de los primeros 6 términos de la serie aritmética $-3 + 2 +, \ldots$ es 25. _____________

4. La sucesión 3, 8, … puede ser aritmética o geométrica. _____________

5. El primer término de la sucesión aritmética con $a_9 = 15$ y $a_{10} = 13$, es $a_1 = 33$. _____________

6. 6, 3, 2, … son los primeros términos de una progresión geométrica. _____________

7. La suma de los primeros cinco términos de la serie geométrica 4, −2, … es $S_5 = 11/4$. _____________

En los problemas 8 a 16 complete la frase.

8. La progresión dada por $a_n = n - 2$ es __________________________.

9. La sucesión dada por $a_n = (1/2)n$ es __________________________.

10. Si $a_n = (-1)^n$ la progresión es __________________________

11. __________________________ es el primer término de la progresión aritmética con $a_5 = 4$ y $d = -2$.

12. La suma de los primeros 20 términos de la serie aritmética $15 + 12 +, \ldots$ es ______________.

13. La suma de los primeros 1,500 pares positivos es una serie __________________________.

14. El primer término de una sucesión geométrica es 5, la razón es 1/3, entonces, el sexto es _____________.

15. El enésimo término de una progresión geométrica está determinado por ________________.

16. La suma de los primeros términos en una serie aritmética está dada por ________________.

17. Obtenga el undécimo término de la progresión geométrica 1/2, 1/3, ...

18. Obtenga el valor de x en la progresión −3, x, 5, … suponiendo que es:

a) aritmética *b*) geométrica.

19. Encuentre el valor de x suponiendo que la sucesión 4, $(x - 2)$, 7, … es:

a) aritmética *b*) geométrica

20. El tipo de cambio el 20 de julio fue de 11.05 unidades monetarias por dólar. ¿De cuánto será el 15 de abril del año siguiente si la devaluación es de 0.075 centavos por día?

21. Una persona ahorra un total de $8,250.00 en 10 meses y cada mes, después del primero, ahorra $100.00 más que el anterior. ¿Cuánto ahorró el primer mes? ¿Cuánto el octavo? ¿Cuánto tendrá en su cuenta un semestre después de que comenzó, sin contar intereses?

22. Un hombre paga inicialmente $750.00 por su membresía en un club de golf y paga, además, $50.00 el primer mes por servicio y mantenimiento. ¿Cuánto pagará el vigésimo quinto mes por este concepto si la cuota crece en:

a) $4.00 cada mes *c*) $15.00 cada 4 meses

b) 0.50% cada mes respecto del anterior *d*) 1.3% cada 3 meses

23. ¿Cuántos automóviles se fabricarán en el octavo año si en el primero se produjeron 250,000 y la producción crece un 8% anualmente?

24. La inflación en 2004 fue de un 4.25%. ¿Cuál será el porcentaje en el año 2011 si aquélla crece a razón de 0.5 puntos porcentuales por año?

25. La capacidad de producción de la empresa "Empaques del Sur, S.A." es de 100 millones de dólares anuales. ¿En cuántos años alcanzará la producción máxima, si ésta fue en el primer año de 27 millones, en el sexto de 50 millones de dólares y se sostiene la tasa de crecimiento geométrico?

26. Durante el primer año de actividades, una sociedad mutualista tiene ingresos de $50,000.00 y los incrementa a razón del 3% anual. ¿Qué ingresos tendrá en el sexto año? ¿En qué año alcanzará los $65,500 de ingreso anual?

27. En 2002, las utilidades de la empresa Comercial Beta, S.A., fueron de 5 millones de dólares y en 2004 fueron de $6'612,500. ¿A cuánto equivalieron en 1997? ¿De cuánto serán en el año 2011, suponiendo que se sostiene la razón de incremento

a) aritmético? *b*) geométrico?

28. La exportación de calzado en 2001 fue de 350,000 pares y, en 2005, de 2.5 millones. ¿Qué cantidad de pares de zapatos exportarán en el año 2012, si se mantiene la tasa de crecimiento geométrico anual? ¿Cuál es ésta?

29. En el primer año, un empleado logra invertir 800 dólares. ¿En qué año invertirá 1,300 dólares? ¿Cuánto invierte en el sexto? Suponga que cada año deposita un 5% más que el anterior.

30. En los primeros 5 años de operaciones, una empresa tuvo utilidades de 30,000 dólares anuales; pero a partir del sexto se incrementó a 4% anual. ¿De cuánto serán las utilidades en el décimo año? ¿En qué año se alcanzarán los 50,000 dólares anuales?

31. ¿De cuánto fue la devaluación trimestral si ésta fue del 1.8% mensual?

32. La población del país crece a razón del 2.8% anual. ¿En cuántos años se duplicará? ¿En qué año crecerá un 70%?

33. En el primer bimestre del año, 15,300 personas asistieron al zoológico de la ciudad. ¿Cuántas personas lo harán el último bimestre del año, suponiendo un incremento constante del 8% bimestral?

34. En el mes de mayo el consumo de agua en la ciudad fue de 250 litros diarios por habitante. ¿Cuántos litros por día se consumirán en el mes de diciembre, si se reduce el consumo 3.2% cada mes?

35. En el occidente del país se produjeron 30,000 toneladas de gramíneas en 2004 y 32,500 toneladas en 2005. ¿Cuántas se producirán en 2012 si se mantiene el incremento

a) aritmético? *b*) geométrico?

36. ¿En qué porcentaje disminuye el poder de compra de la moneda en 8 meses, si éste se reduce 0.7% cada mes?

37. La deuda del país se reduce 2.5% cada trimestre. ¿En qué porcentaje disminuye en 6 años?

En los problemas 38 a 51 seleccione la opción correcta justificando su elección.

38. El término número 18 de la progresión aritmética 10, 7, … es

a) 35 *b*) 38 *c*) 41 *d*) 40 *e*) Otra

39. El valor de x en la progresión aritmética -2, x, 11, … es

a) 13/2 *b*) 7/3 *c*) 9/2 *d*) $-11/2$ *e*) Otra

40. La suma de los primeros 30 términos de la progresión aritmética -4, 3, … es:

a) 2,925 *b*) 2,875 *c*) $-2,925$ *d*) $-2,875$ *e*) Otra

41. Encuentre el término número 15 de la progresión geométrica 1, 2, …

a) 16,384 *b*) 32,768 *c*) 8,192 *d*) 20,480 *e*) Otra

42. El tercer término en una progresión geométrica es 256 y el undécimo es 1, entonces el décimo sexto es:

a) 0.0625 *b*) 0.0078125 *c*) 0.015625 *d*) -0.0625 *e*) Otra

43. Si el décimo y el decimoquinto términos de una sucesión geométrica son 8, ¿cuánto suman los primeros 30?

a) 2^{29} *b*) 240 *c*) 2^{30} *d*) 480 *e*) Otra

44. La progresión 10, –5, 10 … puede ser:

a) aritmética *b*) geométrica *c*) aritmética o geométrica *d*) No es progresión *e*) Otra

45. La suma de los primeros 20 términos de una sucesión aritmética es –70 y el decimoquinto término es –17. Determine los tres primeros:

a) 19, 22, 25 *b*) –59, –56, –53 *c*) –25, –22, –19 *d*) 25, 22, 19 *e*) Otra

46. Considerando que la industria del calzado se ha mantenido con un crecimiento sostenido del 6.8% anual, durante los últimos 10 años, ¿cuántos pares de zapatos se hicieron en 1997 si en 2005 se fabricaron 750 mil pares?

a) 414,878 *b*) 473,219 *c*) 443,089 *d*) 118,192 *e*) Otra

47. Resuelva el problema 46, suponiendo que la producción ha decrecido en 3.2% anual.

a) 941,746 *b*) 972,878 *c*) 1’005,039 *d*) 855,805 *e*) Otra

48. Cinco meses antes de iniciar las obras, una constructora de un núcleo de viviendas presenta un presupuesto por $18‘750,000 dólares que incluyen un efecto inflacionario del 0.85% mensual. ¿Por qué cantidad sería dicho presupuesto si no se considera la inflación?

a) $18’325,273.52 *b*) $17’973,049.05 *c*) $17’655,923.08 *d*) $18,125,819.95 *e*) Otra

49. Adriana deposita en su cuenta bancaria $750, y decide continuar con depósitos mensuales que incrementa en $ 25 cada vez hasta completar $21,000. ¿Con cuántos pagos lo logra?

a) 25 *b*) 20 *c*) 25 *d*) 21 *e*) Otras

50. En el problema 49, ¿cuánto depositará Adriana al hacer el pago número 15?

a) $1,260 *b*) $1,035 *c*) $1,110 *d*) $1,035 *e*) Otra

51. Carlos compra una bicicleta con un anticipo de $1,500 y 18 abonos mensuales que crecen 0.7% de forma sucesiva e incluyen intereses. ¿Cuánto dinero pagó por su bicicleta si el último abono fue de $325?

a) $7,016.83 *b*) $8,122.45 *c*) $7,233.50 *d*) $7,843.61 *e*) Otra

Capítulo 3

Interés y descuento simple

Contenido de la unidad

3.1 Algunas definiciones

Luego de un breve repaso de algunos conceptos básicos en los primeros dos capítulos, propiamente aquí comenzamos con el estudio de las matemáticas financieras, un área importante de la matemática aplicada, en la que se analizan los elementos y la metodología para trasladar, en el tiempo y de manera simbólica, pero que refleja la situación de la vida real, los capitales que intervienen en cualquier operación de índole financiera y comercial. Como en los otros, al final de este capítulo se incluyen interesantes ejemplos de aplicación, relacionados con la temática que aquí se aborda; sin embargo, antes veremos algunos conceptos y definiciones importantes.

Definición 3.1

Interés es el pago por el uso del dinero ajeno, se denota con I.

Otras formas de conceptualizar los intereses o réditos son:

- El cambio en el valor del dinero con el paso del tiempo.
- El dinero que produce un capital al prestarlo o invertirlo para que otros lo usen sin ser de su propiedad. Por ejemplo, si usted consigue un préstamo bancario, estará utilizando un dinero que no es suyo sino del banco. También si invierte un capital en un banco, entonces el banco le pagará intereses por usar el dinero de usted.
- Es el precio que tiene el dinero como cualquier otro bien; es el pago por la adquisición de bienes y servicios en operaciones de crédito, etcétera.

Numéricamente hablando, los intereses son la diferencia entre dos cantidades: el capital y el monto.

Definición 3.2

Si al transcurrir el tiempo una cantidad de dinero, C, se incrementa hasta otra, M, entonces el interés es $I = M - C$, donde C es el **capital,** y M el **monto** del capital.

Dependiendo del caso y de las circunstancias, el *capital* también tiene el nombre de *principal*, *valor presente* o *valor actual.* De igual manera, algunos sinónimos del *monto del capital* son *valor futuro*, *montante*, *valor acumulado* o simplemente *monto.*

Definición 3.3

Al número de días u otras unidades de tiempo que transcurren entre las fechas inicial y final en una operación financiera se le llama **plazo** o **tiempo**.

En la figura 3.1 se ilustran estos conceptos.

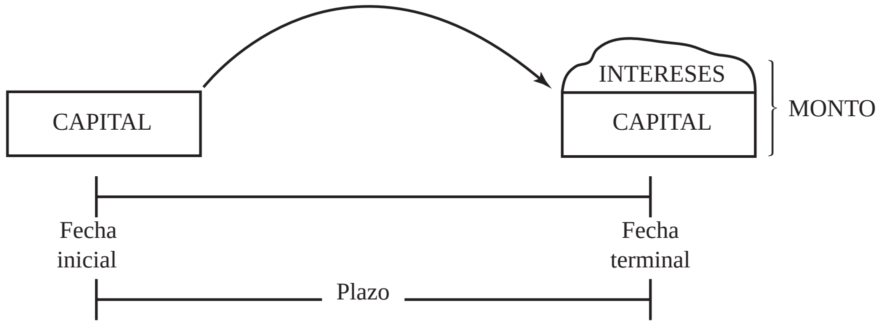


FIGURA 3.1

Desde este punto de vista, el monto siempre es mayor que el capital y se ubica en un tiempo futuro respecto del capital.

Definición 3.4

La razón entre el interés I y el capital C por unidad de tiempo se llama **tasa de interés**, por lo tanto:

$$i = I/C$$

Gracias a la estabilidad económica que actualmente se vive en el país, las tasas de interés son relativamente bajas, muy por debajo de las que se tuvieron en épocas anteriores, cuando a la par que la inflación, llegaron a porcentajes aun mayores del 100% anual. No obstante, a pesar de lo anterior, estas tasas son variables y se determinan sumando puntos porcentuales a las **tasas de referencia** siguientes:

a) La *tasa líder*, de rendimiento, con que se ofrecen los certificados del Tesoro (CT) a 28 días de plazo en su colocación primaria.

b) El CPP, o costo porcentual promedio de captación.

c) La TIIE o tasa de interés interbancaria de equilibrio.

Éstas varían con lapsos diferentes y su nuevo valor se publica en el *Diario Oficial*; por ejemplo, la TIIE se publica a diario, ya que cotidianamente se determina por las cotizaciones que algunos bancos presentan al Banco Central. El CPP, por otro lado, es una tasa que el mismo banco estima de acuerdo con los saldos de captación bancaria en un periodo mensual, para aplicarse en el siguiente mes.

Si la tasa de interés se multiplica por 100 se obtiene la tasa de interés en porcentaje. De esta manera, la tasa de interés es el valor de una unidad monetaria en el tiempo. Si está en porciento será el valor de 100 unidades monetarias en el tiempo.

Cuando la tasa de interés se expresa en porcentaje se le llama *tipo* de interés, y al valor correspondiente expresado en decimales, el que se emplea para las operaciones, se denomina como *tasa* de interés, pero en la práctica es al primero al que le llaman *tasa de interés*.

Ejemplo 1

Intereses, capital, monto, tasa de interés, plazo y tipo de interés

La licenciada Adriana invierte \$4,000 y al término de 1 año recibe \$4,500 por su inversión. El valor presente es $C = \$4,000$, el monto es $M = \$4,500$ y los intereses son la diferencia de M y C:

$$I = 4,500 - 4,000$$
$$I = \$500$$

La tasa de interés es $i = 500/4,000 = 0.125$. El *tipo* de interés es, por lo tanto, $0.125(100) = 12.5\%$ anual, y el plazo es de 1 año.

Interés simple e interés compuesto

Las dos clases de interés que más comúnmente se utilizan son el interés *simple* y el *compuesto.*

Definición 3.5

El interés es **simple** cuando sólo el capital gana intereses y es **compuesto** si a intervalos de tiempo preestablecidos, el interés vencido se agrega al capital. Por lo que éste también genera intereses.

Suponga que hace una inversión a plazo fijo. Si al final retira el capital y los intereses, entonces estará ganando un interés simple; sin embargo, si no hace retiro alguno, entonces los intereses, al término del plazo fijo, se suman al capital y a partir del segundo periodo ganarán intereses, puesto que ya forman parte integral de dicho capital y en tales condiciones la inversión estará devengando con interés compuesto.

Cabe señalar que es práctica común que al final de un periodo se retiren sólo los intereses, por lo que en ese caso se estará ganando un interés simple.

3.2 Interés simple

En la sección anterior se dijo que la tasa de interés por unidad de tiempo es $i = I/C$. Si se despeja I multiplicando los dos miembros de la ecuación por C, se obtienen los intereses:

$$I = Ci$$

Pero si el plazo no es la unidad sino cualquier otro valor, digamos n periodos, entonces los intereses serán

$$I = Cin$$

Es decir, que son proporcionales al capital, al plazo y a la tasa de interés, lo cual se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 3.1

Los **intereses** que produce un capital C con una tasa de interés simple anual i durante n años están dados por

$$I = Cin$$

Ejemplo 1

Tasa de interés simple en un préstamo

¿Cuál es la tasa de interés simple anual, si con \$14,644 se liquida un préstamo de \$14,000 en un plazo de 6 meses?

solución

Los intereses son la diferencia entre el monto y el capital prestado.

$$I = 14{,}644 - 14{,}000 \qquad\qquad I = M - C$$

o $$I = \$644$$

El plazo en años es $n = 1/2$, que equivale a un semestre. La tasa anual, i, se despeja de la ecuación siguiente que resultó de sustituir los valores anteriores en $I = Cin$.

$$644 = 14{,}000(i)(1/2)$$

de donde, $644(2)/14{,}000 = i$

$$i = 0.092 \text{ o } 9.2\% \text{ simple anual}$$

Advertencia

- La unidad de tiempo para la tasa de interés puede no ser anual, sino mensual, diaria, trimestral o de cualquier otra unidad de tiempo. Sin embargo, en cualquier caso es importante hacer coincidirla con las unidades de tiempo del plazo; por ejemplo, si la tasa de interés es semanal entonces el plazo debe expresarse y manejarse en semanas.

- Si no se dice otra cosa con respecto a la tasa de interés, ésta se considerará como *simple anual*. Por ejemplo, al decir una tasa del 11.5% se sobreentenderá como 11.5% simple anual, al menos así se considera en este libro.
- Recuerde, además, que para las operaciones la tasa dada debe dividirse entre 100, recorriendo el punto decimal dos lugares hacia la izquierda y, lo más importante, debemos en todo caso aclarar la forma en que se están tratando las tasas de interés de cualquier operación financiera o comercial, ya que de no hacerlo podrían suscitarse ciertos problemas entre las partes que intervienen en tales operaciones. Veremos que, una tasa del 13% arroja diferentes resultados si es simple, compuesta por mes o compuesta por semestre, por ejemplo, aunque en todo caso es una tasa anualizada.

Fórmula del interés simple

Anteriormente se mencionó que los intereses son la diferencia entre el monto y el capital:

$$I = M - C$$

Si pasamos sumando la C al lado izquierdo, se despeja M.

$M = C + I$ porque $I = Cin$

$M = C + Cin,$

$M = C\,(I + in),$ ya que se factoriza C

Teorema 3.2

El ***valor acumulado*** M de un capital C que devenga intereses con la tasa de interés simple anual, i, al final de n periodos anuales es

$$M = C(1 + in)$$

Es muy importante insistir en que si la tasa de interés no es anual, entonces es necesario que tanto la tasa como el plazo estén en las mismas unidades de tiempo.

Ejemplo 2

Monto acumulado en cuenta bancaria

¿Cuánto acumula en 2 años en su cuenta bancaria el señor Morales, si invierte $28,000 ganando intereses del 7.3% simple anual?

solución

Los valores a sustituir en la ecuación 3.2 son:

C = \$28,000, el capital
n = 2, el plazo en años
i = 0.073, la tasa de interés simple anual

M es la incógnita, entonces,

$$M = 28{,}000[1 + 0.073(2)]$$
$$M = 28{,}000(1.146)$$
$$M = \$32{,}088$$

Recuerde que de esta fórmula, o de cualquier otra, puede determinarse una de las variables que en ella aparecen. Para despejar una cualquiera, es recomendable hacerlo hasta después de haber reemplazado los valores que son conocidos, es decir, los datos.

Ejemplo 3

Plazo en que se duplica una inversión con interés simple

¿En cuánto tiempo se duplica una inversión con un tipo de interés del 13% simple anual?

solución

Si C es el capital inicial, entonces el monto M al final del plazo será el doble de C, es decir, $M = 2C$, por lo que al reemplazar esto en la ecuación del teorema 3.2, ésta quedará así:

$$2C = C(1 + 0.13n), \quad \text{ya que } M = C\,(1 + in)$$

Para despejar la incógnita n, la ecuación se divide entre C y se anula, se resta el l y, por último, se dividen los dos miembros entre 0.13.

$$2 = 1 + 0.13n$$
$$1 = 0.13n$$
$$1/0.13 = n \qquad \text{o} \qquad n = 7.692307692 \text{ años}$$

Conversión de años en años con meses y días

Para expresar este plazo en años con meses y días, la parte decimal se multiplica por 12, que son los meses que tiene un año.

$$0.692307692\ (12) = 8.307692304$$

Esto significa que 0.692307692 años son equivalentes a 8.307692304 meses. Ahora bien, la parte fraccionaria de este número se multiplica por 30, los días contenidos en un mes.

$$0.307692304(30) = 9.23076912$$

Resultado que se redondea a 9, por lo que el plazo queda como: 7 años, 8 meses y 9 días. Note que

a) El plazo puede expresarse hasta en horas, mediante la multiplicación de la fracción por 24. Por lo que esto pudiera continuar sucesivamente.

b) En el resultado no tiene importancia el tamaño del capital que se invierta, *C*, puesto que se eliminó desde el primer paso en el desarrollo anterior, lo cual quiere decir que cualquier capital se duplicará en este plazo a una tasa del 13% simple anual.

Ejemplo 4

***Precio de un bien con interés simple,* TIIE**

¿Cuál es el precio de un televisor que se paga con un anticipo del 30% y un documento a tres meses con valor nominal de $3,600? Suponga que la tasa de interés es igual a la TIIE más 4 puntos porcentuales y que el día de la compra la TIIE fue de 9.8%.

solución

Primero se encuentra el valor presente de los $3,600 sustituyendo la tasa $i = 0.098 + 0.04 = 0.138$ en la fórmula del interés simple y los demás valores:

M por $3,600, el valor futuro del crédito, y *n* por 3/12 o 0.25 años, que es el plazo. La ecuación queda así:

$$3{,}600 = C[l + 0.138\ (0.25)] \qquad M = C(1 + in)$$

$$3{,}600 = C(1.0345)$$

De donde el valor presente del documento es

$$C = 3{,}600/1.0345 \qquad \text{o} \qquad C = \$3{,}479.94$$

Puesto que el anticipo fue del 30%, este resultado corresponde al 70% del precio del televisor y por eso:

$$(0.70)\ \text{Precio} = 3{,}479.94$$

de donde

$$\text{Precio} = 3{,}479.94/0.70 \qquad \text{o} \qquad \$4{,}971.35$$

Ejemplo 5

Tasa de interés simple

¿Con qué tasa de interés simple se realizó una operación crediticia que se liquidó con un pago a los 10 meses con $42,350, suponiendo que el crédito fue por $37,644.44?

solución

Los valores a sustituir en la fórmula del interés simple son:

$M = 42{,}350$, el valor futuro del crédito

$C = 37{,}644.44$, el valor presente, es decir, el valor del crédito

$n = 10$ meses, el plazo o $n = 10/12$ años

$i =$ la tasa de interés simple anual es la incógnita

Entonces,

$$42{,}350 = 37{,}644.44[1 + (10/12)i] \qquad M = C(1 + ni)$$

Para despejar la incógnita i, el 37,644.44 pasa dividiendo al lado izquierdo, el 1 pasa restando y el coeficiente de i, 10/12, pasa dividiendo; esto es:

$$42{,}350/37{,}644.44 = 1 + (10/12)i$$

$$1.125 - 1 = (10/12)i$$

$$0.125 = (10/12)i$$

de donde $i = 0.125/(10/12)$, $i = 0.15$ o 15% simple anual.

Ejercicios 3.2

1. Explique brevemente los conceptos de *interés, monto, valor presente* y *plazo* en operaciones financieras.
2. ¿Qué diferencia hay entre *tasa* de interés y *tipo* de interés?
3. ¿Cuál es la diferencia entre interés simple e interés compuesto?
4. ¿Qué es mayor, el capital o el monto del capital?
5. ¿Qué capital produce \$3,500 por concepto de intereses en 18 meses al 7.5% simple anual?
6. ¿En cuántos días un capital de \$65,000 produce intereses de \$7,000, si se invierte al 8.25% simple anual?
7. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual, si un capital de \$17,500 genera \$750 de intereses en 65 días?
8. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital que se invierte con un tipo de interés del 11.8% simple anual?
9. ¿Con cuánto se cancela a los siete meses un préstamo por \$8,250 si se cargan intereses del 17.5%?
10. ¿Qué produce más intereses: invertir al 9.76% simple anual o al 2.44% trimestral?
11. El 21 de junio se depositan \$14,250 en un banco que abona el 7.3% simple anual. ¿Cuánto se acumula el 3 de noviembre siguiente?

12. ¿Cuál es el valor nominal de un documento que ampara un préstamo por $37,500 con intereses del 15% simple anual y 7 meses de plazo?

13. ¿En qué fecha se recibió un préstamo por $7,200, si el pagaré correspondiente tiene un valor nominal de $8,100, vence el 5 de marzo y los intereses son del 11.3% simple anual?

14. En la siguiente tabla se dan algunos datos. Obtenga los que falten.

	Capital	Monto	Plazo (*n*)	Tipo de interés
1	15,000	–	3 meses	9% anual
2	–	1’000,000	2 años	11% trimestral
3	23,800	25,000	–	0.12% diario
4	2,000	3,200	32 meses	–
5	5,200	6,000	–	6.5% semestral
6	–	5’000,000	3 meses	13.6% anual

15. Calcule los intereses en el problema 14.

16. ¿Cuánto debe pagar cada mes un país para cubrir los intereses de su deuda externa, que asciende a 750 millones de dólares a un interés del 4.5% simple anual?

17. El señor Gómez adquiere diversas prendas en una tienda departamental, por la cantidad de $25,550. Liquida su compra con un enganche del 30% y dos abonos iguales a 30 y 60 días. ¿De cuánto es cada uno de los tres pagos si se tienen cargos del 15.8% simple anual?

18. Lorena invierte ahora $15,300 en una institución que paga intereses del 8.7% simple anual. ¿Cuánto tendrá tres meses después en su inversión? ¿En cuántos días tendrá $16,700?

19. Un obrero recibe $25,000 de indemnización y los deposita en un banco que abona el 7.9% simple anual. ¿Cuánto recibe cada mes por concepto de intereses?

20. ¿Cuál de las siguientes opciones de gratificación conviene más a los intereses de un empleado?

a) Recibir ahora $7,700.

b) Recibir $4,000 ahora y otros $4,000 en dos meses.

c) Recibir tres pagos de $2,800 cada uno a 30, 60 y 90 días.

Suponga que al invertir el dinero se gana un interés del 11.4% simple anual.

21. Sabiendo que el dinero gana el 6.2% de interés simple anual, diga qué le conviene más a una persona que desea comprar un automóvil usado.

a) Pagar al contado con $76,000.

b) Pagar un enganche de $35,000 y firmar un documento a tres meses por $43,000.

c) No pagar enganche y efectuar 3 pagos a l, 2 y 3 meses por $26,000 cada uno.

22. La exportadora Quirarte, S. A., realizó una importante operación de compra-venta por $350,000, y le pagan en tres abonos iguales. El primero el día de la compra y los otros dos a 30 y 60 días. ¿De cuánto es cada uno si tienen cargos del 13.2% de interés simple anual? ¿A cuánto ascienden los intereses?

23. Usted compra una computadora cuyo precio de contado es de $20,000, y se liquida con un anticipo y otro pago a los 2 meses por $12,000. ¿De cuánto es el anticipo, si se tienen cargos del 10.3% simple anual?

24. ¿Cuánto debe invertirse ahora en una cuenta bancaria con intereses del 13.6% simple anual, para disponer de $10,300 dentro de 3 meses y de $7,800 dos meses después? Calcule los intereses.

25. Una persona invierte $20,000 y a los 3 meses retira $8,500. ¿Cuánto tiene en su cuenta dos meses después? Suponga intereses del 19.8% simple anual.

26. El 28 de enero Lupita depositó $23,500 en una cuenta bancaria que le abona el 5.3% de interés simple anual, el 8 de mayo retira el 50% de lo que tiene en su cuenta y el 3 de septiembre el resto. ¿Cuánto dinero le dieron por concepto de intereses?

27. La Comercializadora López compra pinturas que liquida con un pago de $15,000 el día de la compra, y otros dos a 30 y 60 días cada uno. ¿De cuánto es cada pago considerando que

a) Los dos son iguales.

b) El último es un 15% menor que el anterior.

c) El último es igual al anticipo.

Suponga que le cargan el 9.25% de interés simple anual y el anticipo corresponde al 30% del precio de las pinturas.

28. El 15 de junio una persona invierte $40,000 en una cuenta que le paga el 8.3% de interés simple anual con plazo de 6 meses, y $35,000 en otra que le da a ganar $4,350 por intereses hasta el 3 de marzo del año siguiente. Determine:

a) ¿Cuánto recibe en la primera cuenta?

b) ¿Cuál le fue más conveniente y porqué?

29. ¿Cuánto recibe por intereses el arquitecto Rivera, si el 10 de abril le dan $20,312.20 por un capital que depositó en una cuenta con intereses del 14.4% el 23 de agosto anterior?

30. En el problema 29, ¿cuánto depositó el arquitecto el 23 de agosto?

Seleccione la opción correcta, justificando su elección, en los problemas 31 a 45.

31. ¿En cuántos días un capital que se deposita al 9.6% simple anual crece un 15%?

a) 563 *b*) 265 *c*) 695 *d*) 429 *e*) Otra

32. ¿Cuánto debe invertirse ahora para disponer de $9,600 en 20 semanas, si se devenga el 11.6% simple anual?

a) $9,352.45 *b*) $9,189.99 *c*) $9,275.23 *d*) $9,205.43 *e*) Otra

33. ¿Cuánto se acumula en una cuenta que bonifica el 12.4% simple anual en 15 meses, si ahora se depositan $28,000?

a) $32,112 *b*) $31,980 *c*) $32,340 *d*) $31,050 *e*) Otra

34. ¿Con qué tasa de interés simple anual se tendrán aproximadamente $24,650 el 5 de abril próximo, si ahora, 23 de diciembre, se invierten $24,078?

a) 8.435% *b*) 9.017% *c*) 9.252% *d*) 8.305% *e*) Otra

35. ¿Qué conviene más a un inversionista, abrir una cuenta bancaria ganando el 14.4% simple anual, o comprar onzas-oro cuyo valor crece con una tasa del 0.28% por semana? Considere un plazo de 3 meses.

a) onzas-oro *b*) Cuenta bancaria *c*) Es indiferente *d*) Prestar su dinero al 3.6% anual *e*) Otra

36. Un crédito de $50,000 se amortiza con 3 pagos iguales a uno, tres y cinco meses de plazo, con cargos del 13.8% simple anual. ¿De cuánto es cada uno?

a) $17,235.98 *b*) $17,326.43 *c*) $16,987.23 *d*) $17,008.36 *e*) Otra

37. En el problema 36, ¿por qué cantidad es el primer abono, si crecen 20% con respecto al anterior?

a) $15,230.45 *b*) $14,921.30 *c*) $14,243.74 *d*) $15,020.35 *e*) Otra

38. En el problema 36, ¿cuál es el costo por pagar a crédito?

a) $1,830.43 *b*) $1,801.29 *c*) $1,847.22 *d*) $1,707.95 *e*) Otra

39. En el mes de junio un profesor deposita su prima vacacional de $7,250 en una cuenta que le reditúa el 10.6%. ¿Cuánto podría retirar en el mes de diciembre?

a) $7,695.25 *b*) $7, 690.29 *c*) $7,702.45 *d*) $7,634.25 *e*) Otra

40. ¿Cuánto debe invertirse el 13 de marzo al 12.72%, para disponer de $23,000 el 7 de septiembre, y de $36,000 el 23 de enero siguiente?

a) $58,646.06 *b*) $58,126.35 *c*) $57,902.95 *d*) $58,595.34 *e*) Otra

41. ¿Qué día se depositaron $25,000 en una cuenta que bonifica el 15.6% de interés simple, si el 3 de noviembre se retiraron $26,350? Como en todos los problemas, debe suponerse que la cuenta quedó en ceros.

a) 20 de julio *b*) 1 de julio *c*) 15 de julio *d*) 25 de junio *e*) Otra

42. El 8 de mayo se depositaron $19,300 y para el 3 de diciembre se ganaron $1,250 por concepto de intereses. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual?

a) 11.029% *b*) 11.293% *c*) 10.958% *d*) 11.156% *e*) Otra

43. Por incumplimiento de contrato, un entrenador de fútbol recibe $625,000. El 40% de su percepción lo deposita en una cuenta que paga intereses del 9.96% y el 45% lo invierte comprando onzas-oro, cuyo valor crece a razón del 0.18% por semana. ¿Qué monto tendrá 15 meses después en sus dos inversiones?

a) $597, 250.34 *b*) $529,276.42 *c*) $556,923.76 *d*) $582,724.60 *e*) Otra

44. En el problema 43, ¿cuál de las dos inversiones le produjo más utilidades y de cuánto fue ésta?

a) Inversión en cuenta, $36,250.53 *b*) onzas-oro, $10,495.05
c) onzas-oro, $10,209.63 *d*) Inversión en cuenta, $35,000.34 *e*) Otra

45. En el problema 43, ¿cuánto ganaría por intereses si el entrenador invierte el 85% de lo que percibió, en la cuenta?

a) $603,201.45 *b*) $608,423.52 *c*) $597,390.63 *d*) $615,204.75 *e*) Otra

3.3 Diagramas de tiempo

Para plantear y resolver situaciones en las que interviene un número relativamente grande de cantidades y fechas —por ejemplo, cuando un conjunto de obligaciones que deudores y acreedores contrajeron con anterioridad se reemplaza por otro que es equivalente, pero con otros tiempos y otras cantidades—, se utilizan gráficas que se conocen como *diagramas de tiempo*. Éstos consisten en una simple línea recta en la que se anotan los valores, los montos, los capitales, las fechas y los plazos del problema a resolver.

Algunas veces, cuando los periodos son iguales, en el tema de anualidades, por ejemplo, en lugar de la recta se utilizan rectángulos que representan los periodos. En todo caso, es preciso señalar que un diagrama de tiempo o temporal sirve para ilustrar cantidades en el tiempo.

En los siguientes ejemplos se muestra lo anterior.

Ejemplo 1

Inversión con interés simple para montos preestablecidos

¿Cuánto deberá invertirse al 5.1% simple anual el 15 de febrero, para disponer de $7,000 el 9 de mayo, de $15,500 el 20 de junio, y de $10,000 el 23 de diciembre?

solución

En la figura 3.2 está el diagrama de tiempo con las cuatro fechas, las cantidades de dinero y el número de días entre dos fechas sucesivas.

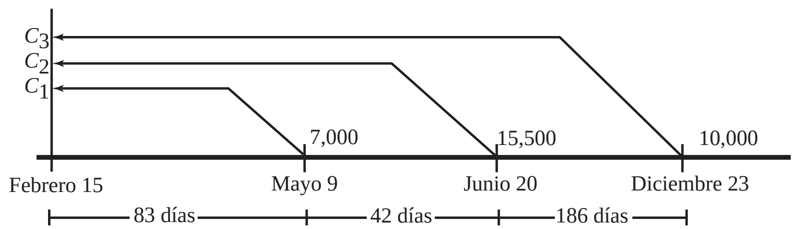


FIGURA 3.2

Los plazos se obtienen con un calendario a la vista, con la tabla 1 del apéndice (véase pearsoneducacion.net/villalobos) o de la siguiente forma, donde se requiere saber cuántos días tiene cada mes; por ejemplo, como se observa en la lista, entre el 20 de junio y el 23 de diciembre, se tienen 186 días.

junio	10 (30 − 20)
julio	31
agosto	31
septiembre	30
octubre	31
noviembre	30
diciembre	23
TOTAL:	186 días

Los otros dos plazos se calculan de igual manera.

El procedimiento consiste en quitar los intereses a los tres montos, para luego sumar los tres capitales, y obtener así el capital a invertir el 15 de febrero. Para esto se usa la fórmula del interés simple.

$$M = C(1 + in)$$

de donde, al pasar dividiendo $(1 + in)$ queda:

$$C = M/(1 + in) \text{ o } C = M(1 + in)^{-1} \qquad \text{ya que } a/b = ab^{-1}$$

El primer capital es:

$$C_1 = 7{,}000[1 + 0.051(83/360)]^{-1} \qquad C = M(1 + in)^{-1}$$
$$C_1 = 7{,}000(1.011758333)^{-1}$$
$$C_1 = 7{,}000(0.988378319) \quad \text{o} \quad C_1 = \$6{,}918.65$$

Para el segundo, el plazo es de 125 días y el monto es de $15,500, y por eso:

$$C_2 = 15{,}500[1 + 0.051(125/360)]^{-1}$$
$$C_2 = 15{,}500(0.982599796) \text{ o}$$
$$C_2 = \$15{,}230.30$$

El plazo para el último es de 311 días y el monto es de $10,000, entonces:

$$C_3 = 10{,}000[1 + 0.051(311/360)]^{-1}$$
$$C_3 = 10{,}000(0.95780089) \text{ o}$$
$$C_3 = \$9{,}578.01$$

El capital que debe invertirse el 15 de febrero es, entonces,

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \text{ o } C = \$31{,}726.96$$

Ejemplo 2

Diagramas de tiempo

El 11 de marzo Adriana depositó $10,000 en una cuenta que devenga intereses del 12.48% simple anual. El 15 de diciembre había depositado otros $15,000, pero el 28 de enero retiró $9,500. ¿Cuánto podrá retirar el 9 de mayo? ¿Cuánto ganó por intereses?

solución

a) Un diagrama de tiempos es el de la figura 3.3, donde se marcan las fechas, los plazos y las cantidades de dinero en miles de dólares, los depósitos por encima y los retiros por debajo.

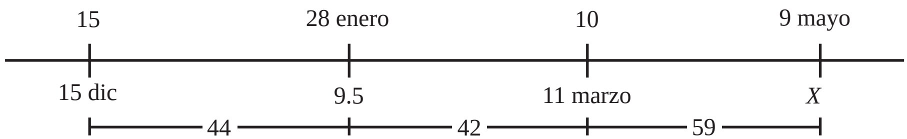


FIGURA 3.3

De las tres cantidades se obtiene el monto al 9 de mayo, al primer depósito, porque el plazo es de 145 días, corresponde:

$$M_1 = 15{,}000[1 + (0.1248/360)145] \qquad M = C(1 + in)$$

$$M_1 = 15{,}000(1.050266667) \qquad \text{o} \qquad M_1 = 15{,}754.00$$

Al segundo depósito, con plazo de 59 días, corresponde:

$$M_2 = 10{,}000[1 + (0.1248/360)59]$$

$$M_2 = 10{,}000(1.020453333) \qquad \text{o} \qquad M_2 = 10{,}204.53$$

Y la suma de los dos al 9 de mayo es:

$$M = M_1 + M_1 \qquad \text{o} \qquad M = 25{,}958.53$$

El valor futuro del retiro, con plazo de 101 días, es:

$$M_3 = 9{,}500\ [1 + (0.1248/360)101]$$

$$M_3 = 9{,}500(1.035013333) \qquad \text{o} \qquad M_3 = \$9{,}832.63$$

La diferencia entre M y este resultado es lo que Adriana podrá retirar al 9 de mayo, es decir,

$$X = 25{,}958.53 - 9{,}832.63$$

o $$X = \$16{,}125.90$$

b) *Los* intereses son la diferencia entre los dos retiros y los depósitos; esto es:

$$I = 9{,}500 + 16{,}125.90 - (15{,}000 + 10{,}000)$$

o $$I = \$625.90$$

Ejemplo 3

Inversión en cuenta de ahorros y adquiriendo onzas-oro

El 40% de su indemnización la deposita el señor González en una cuenta de ahorros que le bonifica el 13.2% simple anual y con el resto, $45,000, compra onzas-oro. Siete meses después retira su dinero del banco y adquiere más onzas-oro. ¿Cuánto valen sus monedas un año y medio después de su retiro laboral, considerando que su valor se incrementa un 1.05% mensual en promedio? ¿A cuánto ascienden las utilidades para el señor González?

solución

a) En la figura 3.4, se localizan las cantidades en miles de dólares y los plazos.

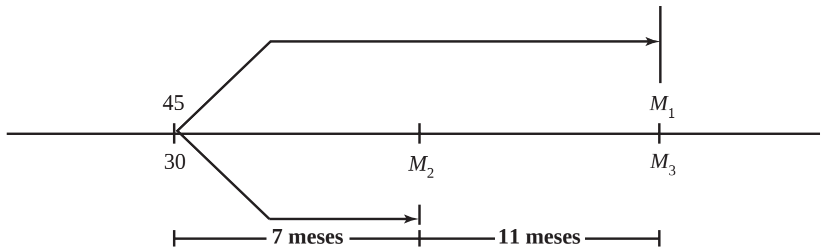


FIGURA 3.4

Primero se encuentra el valor futuro de los onzas-oro, considerando que aumentan su valor de forma geométrica con razón $r = 1.0105$. El primer término es 48 y, por lo tanto, el último es

$$M_1 = 45{,}000(1.0105)^{18} \qquad a_{19} = M_1$$
$$= 45{,}000(1.206851185)$$

o $$M_1 = 54{,}308.30, \text{ redondeando.}$$

Por otro lado, si C es el capital que percibe el señor González, en su indemnización entonces el 60% de C es lo que destinó a comprar onzas-oro, es decir,

$$0.60C = 45{,}000$$

de donde

$$C = 45{,}000/0.60 \quad \text{o} \quad C = \$75{,}000$$

que es lo que le dieron al indemnizarlo, y el 40% fue a la cuenta de ahorros.

$$0.40(75{,}000) = 30{,}000$$

lo cual, al final de 7 meses con los intereses, crece hasta:

$$M_2 = 30{,}000[1 + (0.132/12)7] \qquad M = C(1 + in)$$
$$M_2 = 30{,}000(1.077) \qquad \text{o} \qquad M_2 = 32{,}310$$

Once meses después el valor de los onzas-oro que ahora se adquieren es

$$M_3 = 32{,}310(1.0105)^{11}$$
$$M_3 = 32{,}310(1.121758829) \qquad \text{o} \qquad M_3 = 36{,}244.03$$

El valor de los onzas-oro es, entonces,

$$M = 54{,}308.00 + 36{,}244.03 \qquad M = M_1 + M_3$$

o $$M = \$90{,}552.33$$

b) Las utilidades son la diferencia entre este resultado y lo recibido con la indemnización, es decir,

$$U = 90{,}552.33 - 75{,}000$$

o $$U = \$15{,}552.33$$

Ejemplo 4

Capital, monto e intereses

El 15 de noviembre un comerciante compró mercancía que liquidó con un 35% de contado, un pago por $32,050, que corresponde al 40% el día 3 de marzo, y otro por el resto el día 22 de abril. Considerando cargos del 16.8% anual determinar:

a) El valor de la mercancía el día de la compra.
b) El monto que se paga al 22 de abril.
c) Los intereses o cargos por no pagar de contado.

solución

a) En la figura 3.5 se aprecian las cantidades, los plazos y las fechas, C es el valor de la mercancía y X el último pago.

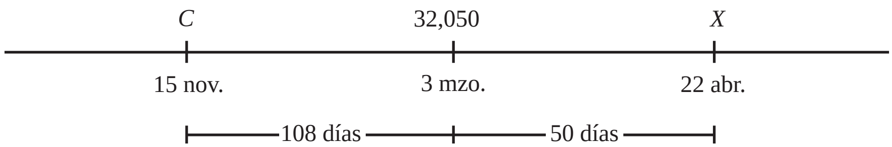


FIGURA 3.5

El valor presente del segundo pago es

$$C_1 = 32{,}050[1 + (0.168/360)108]^{-1} \qquad C = M(1 + in)^{-1}$$
$$C_1 = 32{,}050(0.952018279)$$
o
$$C_1 = 30{,}512.19$$

Puesto que esto corresponde al 40% del valor de la mercancía, C, se cumple que

$$0.40C = 30{,}512.19 \text{ de donde}$$
$$C = 30{,}512.19/0.40 \quad \text{o} \quad C = \$76{,}280.48$$

b) El 25% de este valor, es el valor presente del último pago,

$$C_2 = 0.25(76{,}280.48) \qquad \text{25\% es lo que resta}$$
o
$$C_2 = 19{,}070.12$$

Y el valor futuro, puesto que el plazo es de 158 días, es

$$X = 19{,}070.12[1 + (0.168/360)158]$$
$$X = 19{,}070.12(1.07373333) \text{ o } \qquad X = 20{,}476.22$$

c) Los intereses son la diferencia entre el total pagado, sin contar el anticipo, y el 65% del valor de la mercancía, esto es,

$$I = 32{,}050 + 20{,}476.22 - 0.65(76{,}280.48)$$
$$= 52{,}526.22 - 49{,}582.31$$
o
$$I = \$2{,}943.91$$

Ejercicios 3.3

En los problemas haga un diagrama de tiempo ya que puede ayudarle.

1. Se compra un reproductor de DVD, con un anticipo y 2 pagos a 2 y 3 meses de plazo por $3,750 y $2,000, respectivamente, con cargos del 17.4% simple anual. ¿Cuál es el precio del aparato electrónico si el anticipo fue del 25%?

2. En el problema 1, ¿de qué cantidad sería cada pago y el anticipo si los tres fuesen iguales?

3. En el mismo problema 1, ¿de cuánto es el anticipo y un pago único a los 4 meses, considerando que

a) son iguales?

b) el enganche es un 15% menor que el pago posterior?

4. Para comprar un departamento, un profesor deposita en un banco $25,000 en julio, $35,000 en diciembre, y $75,000 en marzo del año siguiente. ¿Cuánto tendrá en su cuenta 2 años después del primer depósito, considerando intereses del 9.6% simple anual?

5. Con base en el problema 4, ¿cuánto deberá depositar en agosto del mismo año en que realizó su tercer depósito para lograr los $395,000 que necesita para el departamento?

6. Verónica compra un automóvil con un anticipo del 40% y 3 abonos de $30,000, $35,000 y $45,000, respectivamente, a 2, 5 y 8 meses de plazo con cargos del 18.72%. Determine:

a) ¿Cuál es el precio de contado del automóvil?

b) ¿Cuál es el costo por no pagarlo de contado, es decir, los intereses?

7. ¿Cuánto debe depositarse el 5 de enero, el 13 de febrero y el 25 de abril, en una cuenta que bonifica el 11.4% simple anual, para lograr un monto de $50,000 el 20 de diciembre siguiente, suponiendo que:

a) los tres pagos son iguales.

b) cada uno es un 15% mayor que el anterior.

c) cada uno es $500 menor que el siguiente.

d) Los dos últimos son iguales entre sí y el primero es igual a la suma de los dos.

8. Se planea liquidar un préstamo con 3 abonos de $10,000 cada uno a 2, 3 y 7 meses de plazo; pero poco antes de hacer el primero se conviene en pagarlos de la forma siguiente: $20,000 a los 4 meses de la fecha inicial, y otro 2 meses después. ¿De qué magnitud es éste si se cargan intereses del 20.4% simple anual?

9. Hace 7 meses se consiguió un préstamo con cargos del 16.8% simple anual. Se liquida con un pago de $14,350 el día de hoy y otro por $22,000, 45 días antes. ¿Cuánto se recibió en préstamo?

10. ¿Qué día se consiguió un crédito por $65,000 si se cancela con un abono de $30,000 el 15 de octubre y otro por $40,000 el 28 de diciembre siguiente? Suponga cargos del 21.2% simple anual.

11. Una mueblería ofrece un refrigerador con un anticipo del 45% y 3 pagos mensuales de $2,300 cada uno con cargos del 19.7%. ¿Cuál es el precio de contado?

12. En el problema 11, un cliente no tiene para el anticipo y solicita que se lo carguen en cuatro mensualidades. ¿De cuánto es cada una si

a) las 4 son iguales?

b) cada una es un 10% mayor que la anterior?

c) la primera es igual a la suma de las otras tres, que son iguales?

13. Al nacer su hijo, el arquitecto Javier invierte $15,000 y otros $28,500 tres años después, en una cuenta bancaria que le da a ganar el 11.9% simple anual en promedio. ¿Cuánto tiene el hijo al cumplir los 18 años?

14. En el problema 13, ¿cuánto debió depositar al nacer su hijo el arquitecto Javier si a los 18 años requiere de $150,000 en la cuenta?

15. La profesora Laura necesitará $15,000 para remodelar el baño de su casa, ¿cuánto debe invertir 3 meses antes al 10.8%, si un mes antes había depositado $5,300 en la misma cuenta?

16. ¿Con cuánto se cancela el día de hoy un crédito que se liquidaría con $53,000, si se supone que el plazo fue de 7 meses, hoy se cumplen 5 meses y la tasa de interés simple anual es del 18.6%?

17. El día de hoy Eduardo se entera de que tiene $18,350 en su cuenta de ahorros. ¿Cuándo depositó $25,000, si 25 días antes de ahora había retirado $7,250 de la misma cuenta, que le bonifica el 9.6% simple anual? Suponga que su cuenta estaba en ceros, claro.

18. El primer día de enero Lilí deposita $5,000 en un banco, que le reditúa el 8% anual, el primero de febrero $8,000, y otros $7,000 el 1 de marzo. ¿Cuánto tendría en su cuenta el 1 de abril del año siguiente?

19. Para vacacionar en el mes de abril, el licenciado Cortés invierte $5,000 7 meses antes, $4,000 tres meses después del primer depósito, y $6,000 un mes antes de vacacionar. ¿De cuánto dinero podrá disponer al salir de vacaciones si le paga intereses del 11.4%?

20. ¿Cuánto gana por concepto de intereses una persona que el 10 de marzo deposita $15,000, después otros $18,000, y el 23 de octubre siguiente tiene $36,000 en su cuenta, que le reditúa el 10.2% anual? ¿Qué día hizo el segundo depósito a su cuenta?

21. ¿Cuánto tiene en sus tres cuentas bancarias el doctor Amezcua, si 3 meses antes tenía $6,500 en la primera, que le bonifica el 9.4% de interés simple anual, la segunda le genera intereses del 10.3% y hace 5 meses tenía $10,350, y 8 meses antes de ahora tenía $15,750 en otra que le da a ganar el 11.2% simple anual?

En los problemas 22 a 28, seleccione la opción correcta justificando su elección.

22. ¿Cuál es el monto del que puede disponer una persona, si 5 meses antes depositó $10,000 en una cuenta que le produce intereses del 12.6% simple anual, y 45 días después del primero deposita otros $13,000 en la misma cuenta?

a) $24,128.08 *b*) $23,968.36 *c*) $24,002.75 *d*) $24,622.63 *e*) Otra

23. ¿Cuánto debe ahora el señor Pérez, si en agosto del año pasado obtuvo un crédito automotriz por $135,000, hizo un pago por $43,000 en diciembre y otro por $27,500 en marzo? Considere que le cargan intereses del 12% y ahora es el mes de septiembre.

a) $62,975 *b*) $65,429 *c*) $68,972 *d*) $64,895 *e*) Otra

24. El 7 de junio Marisela consigue un crédito por $45,000 para remodelar su sala de belleza, con cargos del 16.56% simple anual. Realiza un abono el 15 de agosto y otro por $15,750 el 20 de diciembre. ¿Por qué cantidad es el primer abono si el 15 de enero debe todavía $13,000?

a) $19,352.48 *b*) $18,973.21 *c*) $20,005.42 *d*) $19,038.26 *e*) Otra

25. En el problema 24, ¿con cuánto liquidaría su deuda Marisela el 1 de octubre?

a) $32,309.35 *b*) $33,297.23 *c*) $29,975.43 *d*) $32,987.43 *e*) Otra

26. Al momento de firmar contratos una constructora recibe un anticipo por $1'750,000 para ampliar un tramo de carretera. Siete semanas después le pagan otros $3'000,000, y el resto cuando entrega las obras 6 meses después de la firma. ¿Por qué cantidad es este pago, si el costo al comenzar los trabajos fue por $6'250,700? Considere que el dinero genera intereses del 18.2% simple anual y la ampliación se inició dos semanas después de la firma del contrato.

a) $1'423,429.35 *b*) $1'695,876.70 *c*) $1'703,429 *d*) $1'640,373.28 *e*) Otra

27. Para regalar en navidad, Patricia hace un depósito por $5,350 tres meses antes de su compra, y un pago de $4,950 dos meses después del primero. ¿Qué cantidad de dinero pagó el día de la compra, si el total que gastó fue de $13,725.45 y a cuánto ascienden los intereses o cargos? Suponga intereses del 15.30% simple anual.

a) $3,157.25 *b*) $3,329.52 *c*) $2,868.36 *d*) $3,565.00 *e*) Otra

28. ¿Cuánto gana por intereses el contador Martínez al invertir $35,000 con plazo de 7 meses e intereses del 1.2% simple mensual?

a) $2,760.00 *b*) $2,940.00 *c*) $3,028.00 *d*) $2,670.00 *e*) Otra

3.4 Descuento simple

Cuando se consigue un préstamo por un capital C, el deudor se compromete a pagarlo mediante la firma de un pagaré, cuyo *valor nominal* generalmente es mayor que C, puesto que incluye los intereses. Es práctica común que el acreedor, es decir, el propietario del documento, lo negocie antes de la fecha de vencimiento, ofreciéndolo a un tercero —a una empresa de factoraje, por ejemplo—, a un precio menor que el estipulado en el propio documento, con un *descuento* que puede evaluarse de dos formas:

a) *Descuento real*.

b) *Descuento comercial*.

El primero se calcula utilizando la fórmula del interés simple $M = C(1 + in)$, donde M es el valor nominal. Este descuento se explica en el primer ejemplo.

Ejemplo 1

¿Cuál es el descuento real de un documento con valor nominal de $25,300, 72 días antes de su vencimiento con una tasa de descuento del 11.4% simple anual?

solución

En la fórmula del interés simple, se sustituyen

M por 25,300, el valor nominal del documento
n por 72 días, el plazo o tiempo que falta para el vencimiento
i por $d = 0.114$, la tasa de interés, es decir, de descuento

Entonces,

$$25{,}300 = C[1 + (0.114/360)72] \qquad M = C(1 + in)$$

$$25{,}300 = C(1.0228)$$

de donde $C = 25{,}300/1.0228$ o $C = 24{,}736.02$

El descuento real es, entonces, $D = M - C$, es decir,

$$D = 25{,}300 - 24{,}736.02 \quad \text{o} \quad D = \$563.98$$

A diferencia del anterior, el *descuento comercial*, llamado así por su semejanza con la rebaja que los comerciantes hacen a sus artículos cuando los venden, quitando algunos dólares al precio de lista, se calcula restando al valor nominal un descuento. La adquisición de certificados del Tesoro es un claro ejemplo de inversiones que se manejan con descuento comercial, el cual, en general, se obtiene multiplicando el valor nominal del documento por el plazo y por la tasa de descuento, es decir,

$$D = Mnd$$

donde d es la tasa de descuento simple anual, n es el plazo en años, D es el descuento comercial y M es el valor nominal del documento correspondiente.

Ejemplo 2

Descuento comercial de un pagaré

El descuento comercial de un documento con valor nominal de $6,500, tres meses antes de vencer, es decir, $n = 3/12$, puesto que éste es el plazo en años, con un tipo de descuento del 11.2% simple anual, es

$$D = 6{,}500(3/12)(0.112) \quad \text{o} \quad D = Mnd$$

$$D = \$182$$

Si al valor nominal del pagaré se le resta este descuento, entonces se obtendrá su *valor comercial* o *valor descontado P,* que en este caso será:

$$P = 6{,}500 - 182 \quad \text{o} \quad P = \$6{,}318$$

Fórmula general

El resultado anterior se expresa generalmente como

$$P = M - Mnd \qquad \text{ya que } \; D = Mnd$$

donde, al factorizar M, se obtiene la fórmula del siguiente teorema.

Teorema 3.3

El **valor comercial** P de un documento con valor nominal M, n años antes de su vencimiento es

$$P = M(1 - nd)$$

donde d es la tasa de descuento simple anual.

Ejemplo 3

Valor comercial de un pagaré

¿Cuál es el valor comercial del 12 de mayo de un documento que ampara un préstamo de \$26,500, recibido el 25 de enero pasado con intereses del 12% simple anual y cuyo vencimiento es el 30 de julio? Suponga que la tasa de descuento simple anual es del 12.5%.

solución

En la figura 3.6 se muestra un diagrama temporal, donde aparecen las fechas, las cantidades de dinero y los plazos.

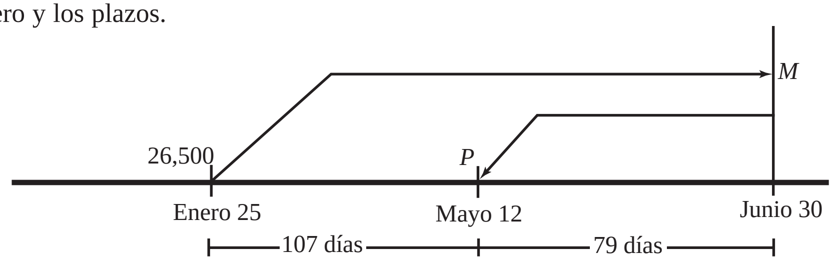


FIGURA 3.6

Primero es necesario hallar el valor futuro de los \$26,500 del préstamo, mediante la fórmula del interés simple:

$$M = 26{,}500[1 + (186/360)(0.12)] \qquad M = C(1 + ni)$$
$$M = 26{,}500(1.062) \quad \text{o} \quad M = \$28{,}143$$

Con este valor futuro, el plazo $n = 79/360$ años y la tasa de descuento $d = 0.125$, se obtiene el valor descontado.

$$P = 28{,}143[1 - (79/360)(0.125)]$$
$$P = 28{,}143(0.972569445) \quad \text{o} \qquad P = \$27{,}371.02$$

Ejemplo 4

Plazo y tasa de interés en un documento

¿Qué día se negocia en $32,406 el siguiente documento con descuento del 10.02% simple anual? Suponiendo que ampara un crédito en mercancía por $32,000, ¿cuál fue la tasa de interés simple anual?

Bueno por $33,050.00

Por este pagaré me obligo a pagar incondicionalmente a la orden de CH Impresiones el día 17 de febrero de 2009 la cantidad de $33,050.00 (treinta y tres mil cincuenta dólares 00/100 m.n.), valor recibido a mi entera satisfacción.

Lugar y fecha: Naucalpan, Estado de México, a 5 de octubre de 2008

Nombre: Antonio Gutiérrez

Domicilio: Calle 4 # 27, Col. Alce Blanco

acepto

solución

a) El valor nominal es de $33,050, el valor en que se comercializa es de $32,406, la tasa de descuento es $d = 0.1002$, por lo tanto,

$$32{,}406 = 33{,}050[1 - n(0.1002)] \qquad P = M\,(1 - nd)$$

de donde $32{,}406/33{,}050 - 1 = -n(0.1002)$

$$n(0.1002) = 0.019485628$$

$$n = 0.019485628/0.1002$$

$n = 0.194467343$ años, porque la tasa es anual, esto es,

$$0.194467343(360) = 70.00824359 \text{ días}$$

Significa que 70 días antes del 17 de febrero, es decir, el 9 de diciembre de 2004, el documento se comercializa en $32,406.

b) El plazo entre el 17 de febrero y el 5 de octubre anterior es de 135 días, el capital es el valor de la mercancía $32,000, el monto es $M = 33{,}050$ y la tasa de interés i se obtiene despejándola de la siguiente ecuación:

$$33{,}050 = 32{,}000[1 + i(135)] \qquad M = C(1 + in)$$

$$33{,}050/32{,}000 - 1 = i(135)$$

$$0.0328125 = i(135) \qquad \text{o}$$

$$i = 0.000243056 \text{ diaria, porque el plazo está en días.}$$

Para la tasa anual se multiplica por 360:

$$0.000243056(360) = 0.0875, \text{ es decir, } 8.75\%$$

Ejemplo 5

Descuento interbancario

El Banco del Sur descuenta al señor Gómez el 15% de interés simple anual de un documento con valor nominal de $30,000 que vence 45 días después. El mismo día, el banco descuenta el pagaré en el Banco Nacional con el 13.5% anual. ¿Cuál fue la utilidad para el Banco del Sur?

solución

El plazo es $n = 45/360$ años, el monto (valor nominal) es $M = 30{,}000$, la tasa de descuento es $d = 0.15$; entonces, el capital que el señor Gómez recibe por el documento es

$$P = 30{,}000[1 - (45/360)(0.15)]$$

$$P = 30{,}000(0.98125) \qquad \text{o} \qquad P = \$29{,}437.50$$

Ahora bien, el capital que el Banco del Sur recibe del Nacional, dado que la tasa de descuento es $d = 0.135$, es

$$P = 30{,}000[1 - (45/360)(0.135)]$$

$$P = 30{,}000(0.983125)$$

$$P = \$29{,}493.75$$

La diferencia entre los dos resultados es la utilidad para el Banco del Sur:

$$U = 29{,}493.75 - 29{,}437.50$$

$$U = \$56.25$$

Note que esto es igual a la utilidad de los $30,000 al 1.5% en 45 días.

$$U = 30{,}000(0.015)(45/360)$$

$$U = \$56.25$$

El 1.5% es la diferencia entre los porcentajes.

Ejercicios 3.4

1. Defina o explique los conceptos de *descuento real, descuento comercial, valor nominal* y *valor descontado* de un documento.
2. ¿Cuál es el valor comercial de un pagaré con valor nominal de $750, si se descuenta con el 6.7% simple anual 3 meses antes del vencimiento?
3. ¿En cuánto se negocia el 15 de marzo un documento con valor nominal de $350,000, vencimiento al 15 de agosto y descuento del 7.4% simple anual?
4. ¿Cuál es el valor nominal de un documento que 5 meses antes de vencer se negocia en $25,000, con un tipo del 8.12% de descuento simple anual?
5. ¿Cuántos días antes del vencimiento se comercializa un pagaré en $19,000, si su valor nominal es de $20,800 y el descuento es del 13.2% simple anual?
6. Obtenga la tasa de descuento simple anual de un documento, cuyo valor nominal es de $24,000 y que se vende en $22,400, tres meses antes de vencer.
7. La empresa Papelera Occidental descuenta un documento y recibe $9,150. Si la tasa de descuento es del 10.75% simple anual y el valor nominal es de $10,000, ¿cuánto faltaba para su vencimiento?
8. ¿Qué descuento se hace a un documento cuyo valor nominal es de $120,000, 75 días antes de vencer y con una tasa del 11.8% de descuento simple anual?
9. Calcule la tasa de descuento que se aplicó a un documento cuyo valor nominal es de $175,000, si se descontó 90 días antes de su vencimiento y el descuento fue de $18,000.
10. ¿Cuál es el valor de compra de los certificados del Tesoro a 28 días con valor nominal de $10 y 5.3% de descuento simple anual?
11. ¿En cuánto se negocia el 21 de junio un documento con valor nominal de $9,500, si vence el 15 de agosto y se descuenta el 9.3% simple anual?
12. El 10 de febrero se compra un aparato electromecánico con un anticipo de $8,750 y un documento al 15 de junio por el 65% restante, con intereses del 13.5% simple anual. Determine:

    a) El precio de contado del aparato.

    b) El valor nominal del documento.

    c) El valor comercial del pagaré el 19 de marzo, considerando un descuento del 12.3% simple anual.
13. El 15 de octubre la Distribuidora de Abarrotes Nancy vende mercancía a crédito por $43,000 y recibe un documento firmado que vence el 20 de enero siguiente. El 3 de noviembre realiza otra venta y le endosan un documento con valor nominal de $40,750 y vencimiento al

10 de febrero del año siguiente. ¿Cuánto recibe por los dos documentos al 21 de diciembre, si le descuentan el 13.75% simple anual? Suponga una tasa de interés del 12.25% simple anual en sus operaciones a crédito.

14. El 23 de febrero el Banco de Comercio descuenta al licenciado Pérez una tasa del 16.93% simple anual en un documento que vence el 15 de mayo siguiente, cuyo valor nominal es de $25,400. El mismo día el banco transfiere el documento al Banco del Pacífico con un descuento del 14.5% simple anual. ¿De cuánto fue la utilidad para el Banco de Comercio?

15. El 19 de marzo, Aluminios del Norte vende materiales, y le pagan con un anticipo y un documento con valor de $180,000, más intereses del 13.7% simple anual, que vence el 8 de julio siguiente.

a) ¿Cuál fue el costo de los materiales si el anticipo fue del 55%?

b) ¿Cuál será el valor comercial del pagaré el 3 de abril si se descuenta al 14.3% simple anual?

16. El 5 de marzo se negocia en $17,350 un documento con valor nominal de $18,520 y vencimiento al 10 de agosto siguiente. ¿Cuál fue la tasa de descuento simple anual?

17. Un documento con valor nominal de $23,000, se negocia el 1 de octubre en $21,925 con descuento del 13.75% simple anual. ¿Cuál es la fecha de vencimiento?

18. ¿Qué día se transfiere en $30,250 un documento que vence el 10 de febrero, con valor nominal de $31,800 y con descuento del 15.3% simple anual?

19. El 19 de agosto se venden 2 documentos en $61,165. El primero con valor nominal de $26,350 y vencimiento al 3 de diciembre. El otro vence el 25 de febrero y su valor nominal es de $37,720. ¿Cuál es la tasa de descuento comercial?

20. Una distribuidora de materiales para construcción compra cemento y lo paga con un anticipo del 40% y el resto a 60 y 90 días por $30,000 y $25,000 valor nominal, respectivamente. Determine:

a) El precio de contado del material.

b) El valor de un documento que vence a los 4 meses de la compra y sustituye los dos originales.

c) El valor comercial de los dos documentos 15 días antes que venza el primero.

d) El descuento con que se negocia 1 mes antes de vencer el documento que sustituye los dos primeros.

Suponga descuento del 12.48% simple anual y cargos con intereses del 11.28%.

21. ¿Cuál es el valor comercial de un documento con valor nominal de $20,000 y una tasa de descuento del 10.8% simple anual? Suponga que vence 7 meses después.

22. Resuelva los problemas 2, 5, 9, 15 y 21 con descuento real.

Seleccione la opción correcta en los problemas 23 a 32, justificando su elección.

23. ¿Qué día se negocia en $21,771 un documento con valor nominal de $23,200 y vencimiento al 10 de marzo? Suponga el 13.2% de descuento comercial.

a) 23 de septiembre *b*) 12 de octubre *c*) 18 de agosto *d*) 30 de septiembre e) Otra

24. Tres meses antes de un vencimiento se negocia en $42,667 un documento con valor nominal de $44,100. ¿Cuál es la tasa de descuento simple anual?

a) 14.03% *b*) 12.83% *c*) 13% *d*) 13.63% *e*) Otra

25. Un documento con valor nominal de $7,250 se negocia en $6,996. ¿Cuántos días faltaban para su vencimiento, suponiendo el 13.4% de descuento simple anual?

a) 89 *b*) 98 *c*) 93 *d*) 102 *e*) Otra

26. El 13 de octubre se negocia en $44,980 un documento con valor nominal de $47,000. ¿Cuál es la tasa de descuento aproximada si vencía cuatro meses después?

a) 12.8936% *b*) 11.9581% *c*) 12.0583% *d*) 12.9052% *e*) Otra

27. El 22 de diciembre se comercializa un documento con valor nominal de $68,000 con descuento del 16.8% simple anual. ¿Cuál es el valor descontado si vencía el 22 de agosto del año siguiente?

a) $61,274 *b*) $60,384 *c*) $62,426 *d*) $59,683 *e*) Otra

28. ¿Cuánto recibe el señor Castillo el 19 de marzo por dos documentos de $46,300 y $54,500 que vencen, respectivamente, el 28 de agosto y 7 de diciembre, suponiendo que le descuentan el 17.4% simple anual?

a) $89,796.73 *b*) $91,270.45 *c*) $90,246.85 *d*) $90,873.05 *e*) Otra

29. En el problema 27, ¿cuánto le descontaron al señor Castillo por los dos documentos?

a) $11,033.47 *b*) $10,553.15 *c*) $10,497.62 *d*) $11,000.43 *e*) Otra

30. En el problema 27, ¿por qué cantidad fue el crédito que el señor Castillo otorgó al cliente que le firmó los dos documentos, suponiendo que lo hizo el 15 de noviembre anterior con el 16.3% de interés simple anual?

a) $88,407.12 *b*) $86,273.45 *c*) $87,225.42 *d*) $88,007.49 *e*) Otra

31. ¿Con qué tasa de descuento simple mensual se negocia, 25 semanas antes, en $102,350 un documento con valor nominal de $108,395?

a) 11.60% *b*) 11.04% *c*) 12.37% *d*) 12.09% *e*) Otra

32. ¿Por qué cantidad fue un crédito, si lo ampara un documento con plazo de 7 meses suponiendo que 4 meses antes de vencer se comercializa en $57,425? Considere intereses del 11% y descuento del 12% simple anual.

a) $56,210.85 *b*) $56,429.33 *c*) $57,095.07 *d*) $56,059.36 *e*) Otra

3.5 Interés simple exacto y comercial

Una de las características de la vida moderna es la rapidez con la que cambian las cosas, y el mundo de las finanzas no es la excepción. Es sorprendente ver cómo los sucesos nacionales e internacionales influyen sobremanera en las tasas de interés que ofrecen los bancos y otras instituciones que se dedican a la transferencia de capitales en todas sus formas. Basta con echar un vistazo a lo que sucede en el área de remates de la Bolsa de Valores para darse cuenta de ello, donde la cotización de las acciones y otros títulos de inversión cambian minuto a minuto, dependiendo básicamente de la oferta y la demanda con que se negocian.

Esta dinámica da lugar a que en las inversiones, y las operaciones de crédito en general, se consideren los plazos en días y no en meses u otras unidades de tiempo mayores, como lo fueron en décadas pasadas. En todos los ejemplos hasta aquí planteadas se considera que el año tiene 360 días para el año comercial; y el número de días naturales, los del calendario, para el plazo. Ésta es la forma más usual y así continuaremos considerándola, mientras no se diga lo contrario.

Sólo como referencia, cuando el año se considera de 360 días, se denominan interés y descuento, simple *comercial* u *ordinario*; mientras que lo llamamos interés *exacto*, cuando el año se considera de 365 días, o 366 si es bisiesto.

El plazo también se evalúa de dos maneras:

a) Con tiempo *real* o *exacto* si se contabilizan los días naturales entre las fechas inicial y terminal.

b) Con tiempo *aproximado* si todos los meses se consideran de 30 días.

Así que confirmando lo anteriormente dicho, el que más se utiliza es el *interés comercial con tiempo real*.

También es cierto que para el número de días en el plazo no se considera (no se cuenta) el día que corresponda a la fecha inicial o terminal.

Ejemplo 1

Monto con interés simple comercial y con tiempo aproximado y la TIIE

Utilizando un interés simple comercial con tiempo aproximado, obtenga el monto que se acumula al 15 de octubre, si el 25 de marzo anterior se depositan $15,000 en una cuenta que abona con la TIIE + 2.4 puntos porcentuales. Suponga que la TIIE es de 7.5% anual.

solución

El tiempo, o sea, el plazo, es de 200 días ya que:

De marzo:	30 − 25 = 5 días
De abril a septiembre:	6(30) = 180 días
De octubre:	15 días
Total:	200 días

La tasa de interés es 7.5 + 2.4 = 9.9% o $i = 0.099$

El monto es, entonces,

$$M = 15{,}000(1 + 200(0.099/360))$$
$$M = 15{,}000(1.055) \quad \text{o} \quad M = \$15{,}825$$

Ejemplo 2

Monto con interés simple exacto y con tiempo real

Resuelva el ejemplo 1 con interés simple exacto con tiempo real.

solución

Aquí la tasa anual se divide entre 365 y el plazo es de 204 días. El monto con la misma fórmula del interés simple es

$$M = 15{,}000(1 + 204(0.099/365)) \qquad M = C(1 + ni)$$
$$M = 15{,}000(1.055331507) \quad \text{o} \quad M = \$15{,}829.97$$

Nota: El tiempo real para el plazo puede obtenerse con un calendario a la vista, o con la tabla 1 del Apéndice C (véase pearsoneducacion.net/villalobos). Ahí se aprecia que el 15 de octubre es el día número 288 del año, el 25 de marzo es el 84 y el plazo es igual a la diferencia: 288 – 84 = 204 días.

Ejemplo 3

Tasa de descuento simple comercial con tiempo aproximado

El 9 de noviembre se negocia en $13,680 un documento con valor nominal de $15,400 y vencimiento al 23 de abril del año siguiente. ¿Cuál es la tasa de descuento suponiendo que es comercial u ordinario con tiempo aproximado?

solución

En este caso el tiempo es de 164 días:

De noviembre:	30 – 9 = 21	
De diciembre a marzo:	4(30) = 120	
De abril:	23	
Total	164	días

En el teorema 3.3, para descuento comercial, se sustituyen el plazo n, por 164, el monto M, por \$15,400, y P por \$13,680. Después, se despeja la tasa d.

$$13{,}680 = 15{,}400[1 - (164/360)(d)] \quad P = M(1 - nd)$$

$$13{,}680/15{,}400 - 1 = -(164/360)d$$

$$-0.111688312 = -0.4\overline{5}\,(d)$$

de donde $d = 0.111688312/0.4\overline{5}$

$d = 0.245169$ o 24.52%, aproximadamente

Ejemplo 4

Crédito mercantil, descuento simple exacto

El 9 de octubre la Comercial Ferretera López vendió materiales y le firmaron un pagaré con valor nominal de \$31,750, con vencimiento al 6 de febrero e interés del 14.3% simple anual.

a) ¿Cuál fue el precio de los materiales?

b) ¿Qué día se descuenta el documento en \$30,800 en un banco que opera con el 15.11% de descuento simple anual?

Utilice tiempo real para el plazo, el interés y el descuento exacto.

solución

El diagrama temporal de la figura 3.7 sirve para anotar y ver las cantidades y los plazos.

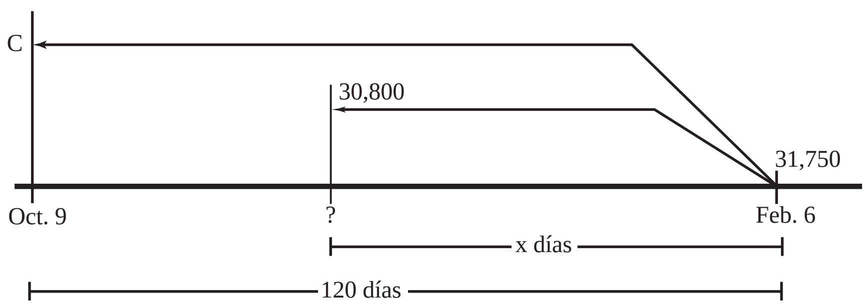


FIGURA 3.7

a) En la tabla 1 del apéndice (véase pearsoneducación.net/villalobos) se ve que el plazo entre las dos fechas es de 120 días, además, M = \$31,750 y la tasa i = 0.143, por lo tanto:

$$31{,}750 = C[1 + (120/365)(0.143)] \quad M = C(1 + ni)$$

$$31{,}750 = C(1.047013699)$$

de donde $C = 31{,}750/1.047013699$ o $C = \$30{,}324.34$

b) Para encontrar el día en que se comercializa el documento, se necesita el plazo. Para esto se sustituyen en el teorema 3.3 los valores de *M* por $31,750, el valor nominal, *P* por $30,800, el valor comercial, y *d* por 0.1511, la tasa de descuento simple anual:

$$30{,}800 = 31{,}750[1 - n(0.1511)] \quad \text{con } n \text{ en años}$$

$$30{,}800/31{,}750 - 1 = -n(0.1511)$$

$$n(0.1511) = 0.02992126$$

$$n = 0.02992126/0.1511$$

$$n = 0.198022897 \text{ años, porque la tasa es anual}$$

Para convertirlo en días, se multiplica por 365, los días naturales de un año no bisiesto:

$$0.198022897(365) = 72.27835755$$

es decir, 72 días que se cumplen el 26 de noviembre, lo que se obtiene con el auxilio de la tabla 1 del apéndice.

Ejercicios 3.5

1. Explique las características del interés y del descuento simple *exacto* con tiempo *aproximado.*

2. ¿Qué características tiene el *descuento comercial exacto* con tiempo *aproximado*?

3. Diga qué caracteriza al interés simple *ordinario* o *comercial*, con tiempo *real*, ¿y con tiempo *aproximado*?

4. ¿Será posible que el tiempo real y el tiempo aproximado sean iguales? ¿Por qué?

5. ¿Qué es más productivo para un inversionista, el interés simple exacto o el comercial?

6. ¿Cuánto paga por intereses un distribuidor de abarrotes si el 10 de junio compra mercancía por $16,500, hace un anticipo del 30%, y paga el resto el 25 de septiembre con cargos del 12.2% simple anual?

7. ¿Cuál es el valor comercial el 3 de marzo de un pagaré que vence el 15 de junio, si su valor nominal es de $32,000 y el descuento es del 8.7% simple anual? Utilice tiempo aproximado e interés exacto.

8. El 23 de febrero una exportadora vende mercancía y le firman dos pagarés por $25,000 cada uno, con vencimiento al 15 de abril y al 30 de mayo. Considerando interés exacto y tiempo real determine:

a) El valor de la mercancía, si se carga el 15.53% de interés simple anual.

b) ¿Cuánto le dan por los dos pagarés el 10 de marzo en un banco que descuenta con el 15.75% simple anual?

9. ¿Cuánto recibe un vendedor de automóviles usados el 20 de octubre por un documento con $35,000 de valor nominal, que vence el 3 de febrero del año siguiente? Suponga un descuento simple comercial del 9.2% y tiempo aproximado.

10. En el problema 9, ¿cuál fue el precio del automóvil si el día de la compra, 5 de julio, se dio un anticipo del 40% y los intereses fueron del 13.25%?

En los problemas 11 a 15 utilice el descuento o interés *comercial* con *tiempo aproximado*.

11. ¿Con qué tasa se descuenta el 15 de abril a un precio de $8,750 un documento que vence el 25 de julio y cuyo valor nominal es de $9,200?

12. El 13 de diciembre una tienda de electrodomésticos vende mercancía por $13,800. Le pagan con un anticipo y dos documentos con valor nominal igual al anticipo, el 28 de enero y el 8 de marzo, respectivamente, ¿de cuánto es cada pago si se cargan intereses del 15.8% simple anual?

13. En el problema 12, ¿en cuánto se negocian el 20 de diciembre los dos pagarés en un banco que descuenta el 14.7% simple anual?

14. El 5 de enero usted se compra un equipo de cómputo que se paga con un anticipo de $6,000, un abono por $8,000 el 20 de febrero y otro el 19 de marzo para liquidar el resto. ¿Por cuánto será este pago, si el precio del equipo fue de $20,600 y se cargan intereses del 16% simple anual?

15. ¿Cuál es el precio de un refrigerador que se compra con un enganche del 40% y el resto con un pago de $7,000 el 5 de agosto? Suponga cargos del 15% simple anual y que la compra se realizó el 8 de mayo anterior.

En los problemas 16 a 21 utilice el interés o el descuento simple *exacto* con *tiempo real*.

16. ¿Cuánto debe invertir un padre de familia el 12 de septiembre en una cuenta bancaria que paga el 19.8%, para disponer de $16,000 el 15 de diciembre siguiente?

17. ¿En cuántos días se duplica un capital al 13.9% de interés simple anual?

18. El 8 de mayo se negocia en $27,500 un documento con valor nominal de $31,000. ¿Cuál es su fecha de vencimiento si el tipo de descuento es del 14.7% simple anual?

19. Obtenga el valor que falta en el cuadro siguiente, donde *D* y Z representan, respectivamente, el tipo de descuento y de interés anual.

	Fecha inicial	Fecha de vencimiento	Tipo	Valor presente	Valor nominal
1	enero 10	junio 25	Z 17%	$7,500	$ –
2	octubre 8	enero 15	D–	$21,009	$22,050
3	marzo 19	agosto 3	D 18.3%	$ –	$15,750
4	agosto 7	diciembre 23	Z 13.5%	$5,400	$ –
5	–	abril 21	Z 11.8%	$10,350	$11,120
6	sept. 20	–	D 5.7%	$18,000	$20,500

20. Determine los intereses en los ejercicios de los renglones 1, 4 y 5 del problema 19; así como el descuento en los restantes.

21. Por los servicios de limpieza y mantenimiento, el 11 de octubre una compañía recibe un pagaré con valor nominal de $14,600, vencimiento al 5 de diciembre e intereses del 7% simple anual.

a) ¿Cuál fue el costo de los servicios?

b) ¿Cuánto recibe por el documento, si lo descuenta el 13 de octubre con un tipo del 6.9% simple anual?

c) ¿De cuánto será un pago único equivalente el 5 de enero?

En los problemas 22 a 44 seleccione la opción correcta, justificando su elección; y del 22 al 28 considere interés o descuento *comercial* con *tiempo real*.

22. ¿Cuál es el valor descontado el 5 de febrero de un pagaré con valor nominal de $72,560 y vencimiento al 23 de junio? Suponga que se descuenta con el 15.2% simple anual.

a) $67,930.42 *b*) $67,698.15 *c*) $68,332.17 *d*) $68,129.43 *e*) Otra

23. ¿Cuál será el valor nominal de un documento que el 21 de junio se negocia en $17,404? Considere descuento comercial del 12.96% simple anual y vencimiento al 4 de noviembre siguiente.

a) $18,299.97 *b*) $18,375.20 *c*) $17,993.95 *d*) $18,105.43 *e*) Otra

24. Una mueblería ofrece una recámara con un anticipo del 40% y el 60% restante a crédito con 2 pagos de $4,250 cada uno; el primero a 40 días, y el segundo a 65 días después de la compra. ¿Cuál fue el precio de contado de la recámara, si se cargan intereses del 18.4%?

a) $13,797.00 *b*) $14,129.33 *c*) $13,923.85 *d*) $14,243.50 *e*) Otra

25. En el problema 24, ¿de cuánto resulta cada abono para un cliente que compra el mueble con solo el 25% de anticipo?

a) $5,275.23 *b*) $5,410.71 *c*) $5,905.38 *d*) $5,043.43 *e*) Otra

26. En el problema 25, ¿cuánto pagó el supuesto cliente por concepto de intereses?

a) $450.08 *b*) $495.02 *c*) $473.67 *d*) $419.84 *e*) Otra

27. El 21 de marzo se compran materiales para construcción con valor de $47,275, que se liquidan con un anticipo y dos pagos iguales al enganche, el 9 de mayo el primero, y el 25 de julio el otro. ¿Por qué cantidad es cada uno, si se consideran cargos del 17.5% simple anual?

a) $16,420.30 *b*) $16,269.34 *c*) $15,987.23 *d*) $16,190.71 *e*) Otra

28. En el problema 27, ¿por cuánto es el último pago si cada uno es $1,000 mayor que el anterior?

a) $17,210.18 *b*) $16,996.43 *c*) $17,010.93 *d*) $17,121.43 *e*) Otra

En los problemas 29 a 34 considere interés o descuento comercial con tiempo aproximado.

29. El 23 de agosto se firma un pagaré por un televisor de $6,750 y vencimiento al 7 de diciembre con intereses del 17.9% simple anual. ¿Cuál es el valor que aparece en el documento si incluye los intereses?

a) $7,125.42 *b*) $7,099.05 *c*) $7,215.23 *d*) $7,203.58 *e*) Otra

30. En el problema 29, ¿cuál será el valor comercial del documento si se descuenta el 3 de octubre, con el 19.2% simple anual?

a) $6,845.38 *b*) $7,001.43 *c*) $6,929.43 *d*) $6,995.40 *e*) Otra

31. Si el 10 de febrero se descuenta un pagaré en $62,750 con una tasa del 16.7% simple anual, ¿cuál es el valor del bien que se adquirió al endosar el documento, considerando intereses del 17.4% simple anual? Suponga que vence el 25 de abril y se firmó el 7 de noviembre anterior.

a) $62,250.08 *b*) $60,129.37 *c*) $60,980.95 *d*) $61,208.78 *e*) Otra

32. El 19 de marzo el señor Valenzuela depositó $53,000 en una cuenta bancaria que bonifica intereses del 20.8%, el 23 de mayo siguiente retira $58,250, y el 1 de octubre deja su cuenta en ceros. ¿Cuánto retiró este día, si el 3 de enero tenía un saldo a favor de $27,401.35 en la misma cuenta?

a) $28,203.62 *b*) $29,801.43 *c*) $27,402.57 *d*) $27,965.85 *e*) Otra

33. En el problema 32, ¿cuánto ganó el señor Valenzuela por concepto de intereses en el periodo del 3 de enero al 1 de octubre?

a) $5,645.08 *b*) $5,752.90 *c*) $6,010.90 *d*) $5,814.50 *e*) Otra

Resuelva los problemas 34 a 37 con intereses o descuento simple exacto y tiempo aproximado.

34. Resuelva el problema 32 con las indicaciones dadas:

a) $27,886.20 *b*) $27,998.43 *c*) $28,043.31 *d*) $27,529.08 *e*) Otra

35. El 17 de junio el señor Santillán depositó en una cuenta que paga el 11.05% de interés simple anual, el 80% de su reparto de utilidades, y el 20 de diciembre su aguinaldo, que fue de $12,429. ¿Cuánto recibió por el reparto de utilidades, si el 21 de abril tiene en su cuenta $28,920.70? Suponga que el 17 de junio tenía $10,983.45 en la cuenta.

a) $4,439.08 *b*) $3,998.37 *c*) $4,608.13 *d*) $4,254.50 *e*) Otra

36. ¿Cuál es el precio de una compresora que se compró el 23 de agosto, con un enganche de $5,275 y un pago por $ 7,502 el 28 de diciembre? Suponga cargos del 13.75% simple anual.

a) $12,159.82 *b*) $12,702.91 *c*) $12,395.40 *d*) $12,439.62 *e*) Otra

37. El señor Ruiz compra un camión de volteo con un anticipo de $103,000, un abono de $75,200 el 5 de enero, y otro de $51,900 el 14 de mayo siguiente. ¿En cuánto le vendieron el camión si lo compró el 23 de octubre y le cargan el 1.8% simple mensual?

a) $215,198.00 *b*) $198,698.93 *c*) $221,411.74 *d*) $225,059.60 *e*) Otra

En los problemas 38 a 44 utilice interés o descuento simple exacto con tiempo real.

38. ¿En cuanto se negocia, el 25 de julio, un documento con valor nominal de \$12,450 y vencimiento al 3 de diciembre siguiente? Suponga descuento simple anual del 10.96%.

a) \$11,960.27 *b*) \$12,003.42 *c*) \$11,998.36 *d*) \$12,129.31 *e*) Otra

39. ¿Cuál fue el capital que dio lugar a la firma del pagaré del problema 37, considerando que se firmó el 13 de mayo con intereses del 9.54% simple anual?

a) \$11,819.78 *b*) \$11,635.42 *c*) \$11,901.08 *d*) \$12,009.75 *e*) Otra

40. Laura María depositó \$6,300 en un banco que bonifica el 12.64% el 15 de febrero, y el 3 de junio otros \$8,750 en la misma cuenta. ¿Cuánto tiene el 25 de noviembre, si en su cuenta tenía \$15,275.60 el 23 de diciembre anterior?

a) \$33,262.55 *b*) \$32,983.15 *c*) \$33,529.68 *d*) \$33,007.93 *e*) Otra

41. ¿Cuánto dinero ganó Laura, la del problema 40, en su cuenta bancaria desde el 23 de diciembre al 25 de noviembre del año siguiente?

a) \$2,936.96 *b*) \$2,789.23 *c*) \$3,005.45 *d*) \$3,125.42 *e*) Otra

42. ¿Cuál es el valor descontado de dos pagarés el día 19 de marzo, con descuento del 17.2% simple anual, si el primero con valor nominal de \$78,950 vence el 28 de noviembre, y el segundo con vencimiento al 10 de enero con valor nominal de \$103,925?

a) \$158,880.28 *b*) \$153,963.21 *c*) \$149,695.43 *d*) \$160,060.40 *e*) Otra

43. A la Exportadora de Cítricos le endosaron tres pagarés, el 10 de febrero, con valor nominal y fecha de vencimiento dados en la tabla a intereses del 6.72% simple anual.

Documento	Valor nominal	Vencimiento
A	\$78,950	15 de mayo
B	\$65,300	23 de junio
C	\$59,500	4 de agosto

¿Por qué cantidad fue el crédito?

a) \$197,885.89 *b*) \$196,721.23 *c*) \$193,421.95 *d*) \$189,928.05 *e*) Otra

44. En el problema 43, ¿cuánto le dan por los tres documentos al gerente de la exportadora, si los descuenta el 23 de marzo con el 7.02%?

a) \$200,271.66 *b*) \$197,429.35 *c*) \$201,059.03 *d*) \$198,956.42 *e*) Otra

3.6 Amortización con interés simple

Hay básicamente dos maneras de liquidar un crédito en efectivo, en bienes o en servicios:

- Con un desembolso único al final del plazo.
- Con dos o más pagos, cuya frecuencia y tamaño pueden ser iguales o diferentes, y en este caso se dice que el crédito se *amortiza*, que significa "dar muerte" a la deuda (por sus raíces del latín, *ad* y *mortus*).

Definición 3.6

Amortizar es el proceso de cancelar una deuda y sus intereses mediante pagos periódicos.

Cuando el número de pagos es relativamente corto, el problema se resuelve considerando pago tras pago como en los ejemplos que preceden; pero si son muchos, resulta poco práctico hacerlo de esta manera y entonces se utilizan fórmulas que luego se justifican.

También es cierto que existen, por lo menos, tres maneras diferentes de considerar los cargos por intereses al amortizar un crédito:

- Con interés global.
- Con interés simple.
- Con interés compuesto.

En el capítulo 5 se estudiarán las amortizaciones de renta fija con interés compuesto.

Amortización de renta fija

En la amortización con interés global, los pagos son todos iguales, ya que el interés total se divide entre el número de pagos y el resultado se suma al pago a capital, llamado **amortización**.

Es importante y oportuno señalar que **abono** y **amortización** son diferentes, ya que una parte de cada abono es para cubrir los intereses del periodo, y la otra, es decir, la amortización, se destina al capital que se adeuda haciendo que con cada pago se reduzca; esto es:

$$\text{ABONO} = \text{INTERESES} + \text{AMORTIZACIÓN},$$

tal como se aprecia en el ejemplo.

Ejemplo 1

Amortización de un crédito con pagos fijos

¿Cuál es el abono mensual con el que se amortiza un préstamo de \$90,450 en año y medio, si se cargan intereses del 3.5% simple, es decir, global mensual?

solución

Los intereses a pagar en cada mes están dados por $I = C\,(i)$ donde

$$C = 90{,}000, \text{ el valor de la deuda}$$
$$i = 0.015, \text{ la tasa de interés mensual y}$$
$$I = 90{,}000(0.015) \quad \text{o} \quad I = \$1{,}350.00$$

Por otro lado, la amortización es igual al cociente de la deuda, entre el número de pagos:

$$A = 90{,}000/18 \qquad \text{o} \qquad A = 5{,}000$$

y cada pago, intereses y amortización, es, por lo tanto,

$$R = 1{,}350 + 5{,}000 \qquad \text{o} \qquad R = \$6{,}350$$

Por supuesto que este resultado también puede obtenerse con la fórmula del interés simple:

$$M = 90{,}000[1 + (0.015)18] \qquad M = C(1 + in)$$
$$M = 114{,}300$$

Por lo que cada pago es:

$$R = 114{,}300/18 \qquad \text{o} \qquad R = \$6{,}350$$

que es igual al anterior.
Note usted que esta forma de amortizar una deuda es muy injusta e ilegal, porque, por ejemplo, al hacer el último abono, puesto que lo que se debe son solamente \$5,000 de los cuales se están cargando \$1,350 de intereses, resultan intereses del 27% mensual, porque

$$1{,}350/5{,}000 = 0.27 \qquad i = I/C$$

Estos \$5,000 que se deben al efectuar el último abono y los \$10,000 que se deben al hacer el penúltimo y los restantes, sin contar intereses, claro, se conoce como **capital vivo de la deuda**, **deuda viva**, **remanente** o más comúnmente como **saldo insoluto**, y lo más justo será que los intereses se calculen sobre este valor, que en general es lo que se debe del crédito original, al hacer un pago cualquiera sin incluir intereses.

Ejemplo 2

Crédito que se amortiza con pagos semanales fijos

¿De qué tamaño es el crédito que se amortiza con 13 pagos semanales de \$2,500 con interés global anual del 7.54%?

solución

Si C es el crédito, entonces la amortización semanal es $A = C/13$ y los intereses de cada periodo semanal son $I = (0.0754/52)C$ o $I = 0.00145C$, entonces, cada abono debe ser igual a \$2,500, o sea:

$$C/13 + 0.00145C = 2,500$$

de donde $C(1/13 + 0.0145) = 2,500$ se factoriza C

$$C(0.078373077) = 2,500$$

$$C = 2,500/0.078373077 \quad \text{o} \quad C = \$31,898.71$$

Se deja como ejercicio comprobar este resultado, procediendo como en el ejemplo 1.

Amortización de renta variable

Que los intereses en cada pago se calculan sobre el saldo insoluto, sobre la deuda viva, dará como resultado que cada abono sea menor que el anterior, ya que los intereses bajan si se reduce la deuda, aunque también pueden prorratearse para que todos sean iguales, como se verá en el ejemplo 5 y los que le siguen.

Ejemplo 3

Amortización de un crédito con renta variable

Usted compra un televisor de \$6,500 con un pago inicial del 20%, y después 8 abonos mensuales con cargos del 12% simple anual sobre saldos insolutos. Hallar los pagos y los intereses.

solución

a) Luego de dar el anticipo, y hasta el final del primer mes, cuando se hace el primer abono, la deuda es del 80% del precio:

$$C = 0.80(6,500) \quad \text{o} \quad C = \$5,200$$

La amortización, es decir, el abono al capital en cada pago, es:

$$A = 5,200/8 \quad \text{o} \quad A = 650$$

Los intereses al efectuar el primer abono son:

$$I_1 = 5,200(0.12/12)$$

$$I_1 = 5,200(0.01) \quad \text{o} \quad I_1 = \$52$$

Los intereses para el segundo abono, puesto que la deuda ya se redujo en \$650, son

$$I_2 = 4{,}550(0.01) \quad \text{o} \quad I_2 = 45.50$$

Para el tercer pago, la deuda se redujo en otros \$650 y los intereses son:

$$I_3 = 3{,}900(0.01) \quad \text{o} \quad I_3 = 39.00$$

Continuando de esta manera se llegará hasta el último pago, donde la deuda viva, dado que se han realizado 7 abonos de \$650 al capital, es

$$5{,}200 - 7(650) = 650$$

Esto, como era de esperarse, es igual a la amortización. Los intereses son ahora

$$I_8 = 650(0.01) \quad \text{o} \quad I_8 = \$6.50$$

Y los 8 abonos, incluyendo intereses, son los siguientes, que se obtienen sumando a cada amortización de \$650.00 los intereses del periodo, es decir,

$$R_1 = 650.00 + 52.00 \quad \text{o} \quad R_1 = 702.00$$
$$R_2 = 650.00 + 45.50 \quad \text{o} \quad R_2 = 695.50$$
$$R_3 = 650.00 + 39.00 \quad \text{o} \quad R_3 = 689.00$$

y así sucesivamente, hasta

$$R_8 = 650.00 + 6.50 \quad \text{o} \quad R_8 = 656.50$$

b) El total que se carga por intereses es la suma de los intereses en cada abono, esto es,

$$I = 52.00 + 45.50 + 39.00 + \ldots + 6.50$$

que constituye una serie aritmética con:

$a_1 = 52.00$, el primer término
$d = -6.50$, la diferencia común y
$n = 8$, el número de términos

entonces, la suma, es decir, el total de intereses es

$$I = (8/2)[2(52) + (7)(-6.50)] \quad S_n = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$
$$I = 4(58.50) \quad \text{o} \quad I = \$234.00$$

que puede comprobarse sumándolos uno por uno.

Ejemplo 4

Crédito con intereses sobre saldo

El último de 15 abonos quincenales que amortizan un crédito es de \$3,016.50. ¿Por qué cantidad es el crédito, si se consideran intereses del 13.20% sobre saldos insolutos?, ¿y de cuánto es cada pago?

solución

a) Si C es el capital, es decir, el crédito, la amortización quincenal es $A = C/15$, porque son 15 abonos. Los intereses del último pago son

$$I_{15} = (C/15)(0.132/24) \qquad I = Ai$$

o

$$I_{15} = C(0.000366667)$$

El último pago es, entonces,

$$R_{15} = C/15 + C(0.000366667) \qquad \text{Amortización + intereses}$$

o

$$R_{15} = (0.067033333)C \qquad \text{Se factoriza } C$$

Por lo tanto,

$$(0.067033333)C = 3{,}016.50$$

de donde

$$C = 3{,}016.50/0.067033335 \text{ o } C = \$45{,}000.00$$

b) Los intereses del primer abono son, entonces,

$$I = 45{,}000(0.132/24) \quad \text{o} \quad I = 247.50$$

y la amortización constante es

$$A = 45{,}000/15 \quad \text{o} \quad A = 3{,}000$$

Entonces, el primer pago es

$$R_1 = 3{,}000.00 + 247.50 \quad \text{o} \quad R_1 = \$3{,}247.50$$

Los intereses del segundo, puesto que ya se redujo la deuda en 3,000, son

$$I_2 = 42{,}000(0.132/24)$$
$$I_2 = 231.00$$

Por lo que el segundo es

$$R_2 = 3{,}000 + 231 \text{ o } R_2 = \$3{,}231$$

El tercero y los demás se obtienen restando sucesivamente la diferencia entre los dos abonos:

$$3{,}247.50 - 3{,}231.00 = \$16.50$$

diferencia que es equivalente a los intereses del último pago. ¿Por qué? Entonces,

$$R_3 = 3{,}231.00 - 16.50 \quad \text{o} \quad R_3 = \$3{,}214.50$$
$$R_4 = 3{,}214.50 - 16.50 \quad \text{o} \quad R_4 = \$3{,}198.00 \text{ etcétera}$$

Intereses sobre saldos insolutos (renta fija)

En los ejemplos 3 y 4 los intereses y los pagos son variables, y se reducen conforme transcurre el tiempo. Ahora consideramos el caso en que la totalidad de intereses se divide entre el número de abonos y, en consecuencia, todos resultan iguales, por lo que el acreedor recibirá cantidades menores en la primera parte del plazo, y mayores en la segunda, comparando, claro, con lo que recibiría con rentas que decrecen.

Esta opción es más equitativa que cuando los intereses se cobran y se cargan de manera global sin considerar que la deuda se reduce en cada amortización. Se trata de una equidad que se desvanece cuando la inflación es considerablemente alta o la operación es a largo plazo.

Procediendo como en los dos ejemplos que preceden, se obtiene una fórmula que se formula en el teorema 3.4

Ejemplo 5

Fórmula general

Suponga que se compran computadoras con un crédito de $27,000, que se liquidan con 9 abonos mensuales con cargos del 12% simple anual sobre saldos insolutos. Hallar el tamaño de cada abono, suponiendo que son iguales, y los intereses.

solución

La amortización, es decir, el abono que se hace al capital con cada pago es un valor constante y está dado por:

$$A = 27{,}000/9 \qquad \text{o} \qquad A = 3{,}000$$

que en general estará dada por $A = C/n$, donde n es el número de pagos y C la deuda original. Los intereses del último abono, como se observa en los ejemplos 3 y 4, están dados por

$$I = 3{,}000(0.12/12) \qquad \text{o} \qquad I = 30$$

que se generaliza como $I = (A)(i)$, donde i es la tasa de interés por periodo o tiempo entre un pago y otro. Este interés coincide siempre con la diferencia entre los intereses, es decir, es el valor en que se reducen los intereses de un abono al que le sigue.

Los intereses del primer periodo mensual son

$$I_1 = 27{,}000(0.12/12) \qquad \text{o} \qquad I_1 = \$270$$

Luego de hacer el primer pago, la deuda viva es

$$27{,}000 - 3{,}000 = 24{,}000$$

y los intereses ahora son

$$I_2 = 24{,}000(0.01) \qquad \text{o} \qquad I = \$240$$

Como se dijo, la diferencia con los primeros es de $30. El total que se carga por intereses es igual a la serie aritmética:

$$I = 270 + 240 + \ldots + 60 + 30$$

o $$I = 30 + 60 + \ldots + 240 + 270, \qquad \text{ya que } a + b = b + a$$

La suma, por lo tanto, se evalúa con la fórmula del teorema 2.2, donde $n = 9$, el número de términos, es decir, de pagos. El primer término es $a_1 = 30$ y $a_1 = A(i)$ y esto es igual a d, la diferencia común, por lo tanto:

$S_9 = (9/2)[2(30) + (8)(30)]$ $\qquad$ $S_n = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$

$S_9 = (9/2)(300)$ $\quad$ o $\quad$ $S_9 = 1{,}350$

Al dividir entre 9, el número de pagos, se obtienen los intereses de cada uno $I = 1{,}350/9$ o $I = 150$, que al sumarse con cada amortización la renta o el pago mensual resulta:

$$R = 3{,}000 + 150 \quad \text{o} \quad R = \$3{,}150$$

Note que la suma de intereses en general es:

$S_n = I = (n/2)[2(Ai) + (n - 1)Ai]$ $\qquad$ $a_1 = Ai = d$

$I = (n/2)Ai[2 + n - 1]$ $\qquad$ se factoriza Ai

$I = (n/2)(C/n)i(n + 1)$ $\qquad$ $A = C/n$

$I = (Ci/2)(n + 1)$ $\qquad$ se cancela n

Para los intereses de cada periodo, este resultado se divide entre n, el número de pagos, luego se suma la amortización C/n y se obtiene el valor de cada pago, esto es

$$R = \frac{(Ci/2)(n+1)}{n} + \frac{C}{n}$$

$$R = \frac{Ci(n+1)}{2n} + \frac{2C}{2n} \qquad C/n = 2C/2n$$

Se factoriza $C/2n$ y se obtiene la fórmula del siguiente.

Teorema 3.4

Una deuda C se amortiza con n pagos periódicos iguales, según la ecuación:

$$R = (C/2n)[(n + 1)i + 2]$$

donde:

i es la tasa de interés simple por periodo sobre saldos insolutos, y

R es el abono periódico, la *renta*,

Note que:

- El saldo insoluto se mantiene fijo desde que se hace un pago hasta inmediatamente antes de hacer el siguiente, es decir, los intereses se vuelven efectivos hasta que se realiza el pago.
- Esta fórmula es útil para relacionar un capital C, no necesariamente una deuda, al inicio del plazo con n pagos, que se hacen al final de cada periodo devengando un interés *simple sobre saldos insolutos*.
- Es aproximada porque se distribuyeron los intereses de manera uniforme, y en realidad son mayores en la primera parte del plazo.

Ejemplo 6

Compruebe el ejemplo 5 con la fórmula del teorema 3.4.

solución

Los valores a sustituir en la fórmula $R = (C/2n)[(n + 1)i + 2]$ son

$C = 27{,}000$, la deuda inicial
$n = 9$, el número de pagos mensuales
$i = 0.01$, la tasa de interés simple mensual

Entonces,

$$R = (27{,}000/18)[(9 + 1)(0.01) + 2] \quad 2n = 2(9) = 18$$
$$R = (1{,}500)(0.1 + 2)$$
$$R = (1{,}500)(2.1) \quad \text{o} \quad R = \$3{,}150$$

que es igual al que se obtuvo en el ejemplo 5.

Ejemplo 7

Amortización de un crédito con intereses sobre saldos insolutos

Un crédito se amortiza con 20 abonos semanales fijos de \$3,750 e intereses del 0.0325% simple diario. Determine:

a) El valor del crédito, es decir, el capital.
b) El total que se paga por intereses.

solución

Para obtener el valor del crédito en la ecuación 3.5 se reemplazan:

R por 3,750, la renta o pago semanal
n por 20, el número de abonos
$i = 0.000325(7)$ o $i = 0.002275$, la tasa de interés semanal

Entonces:

$$3{,}750 = (C/40)[(20 + 1)(0.002275) + 2]$$
$$3{,}750(40) = C(0.047775 + 2)$$
$$150{,}000 = C(2.047775)$$

de donde: $C = 150{,}000/2.047775$ o $C = \$73{,}250.24$

b) Los intereses son la diferencia entre el capital recibido en el crédito y el total que se pagó en los 20 abonos.

$$I = 20(3{,}750) - 73{,}250.24 \quad \text{o} \quad I = \$1{,}749.76$$

Relación entre interés simple e interés global

Si en el ejemplo 7 los intereses se dividen entre el crédito, se obtiene la tasa de *interés global* total g:

$$g = 1{,}749.76/73{,}250.24$$
$$g = 0.02388743 \quad \text{o} \quad 2.388743\%, \text{ aproximadamente}$$

y al dividir esto entre los 20 periodos semanales, se obtiene la tasa de interés global semanal:

$$0.02388743/20 = 0.001194372 \text{ o } 0.1194372\%$$

De aquí que para obtener una fórmula genérica para relacionar las tasas de interés global y simple en amortización con interés simple, se observa lo siguiente

La tasa global es $g = I/C$ donde los intereses son $I = nR - C$; esto es, el total que se paga en los n abonos, menos el capital que originalmente se debe, y por eso al sustituir queda:

$$g = (nR - C)/C \qquad g = I/C$$
$$g = nR/C - C/C \quad \text{o} \quad g = (n/C)R - 1 \qquad C/C = 1$$

Pero la renta, según el teorema 3.4, está dada por:

$R = (C/2n)[(n + 1)i + 2]$ por lo tanto, al sustituir queda

$g = (n/C)(C/2n)[(n + 1)i + 2] - 1$

$g = (1/2)[(n + 1)i + 2] - 1$ se cancelan n y C

$g = (1/2)(n + 1)i + (1/2)2 - 1$ $a(b + c) = ab + ac$

$g = (n + 1)(i/2)$ $(1/2)i = i/2$ y se cancela el 1

que se formula en el siguiente. . .

Teorema 3.5

La tasa de interés global total g en amortizaciones con interés simple y pagos iguales es:

$$g = (n + 1)(i/2)$$

donde i la tasa de interés simple por periodo y n es el número de pagos o periodos.

Ejemplo 8

Interés global en la amortización de un crédito

En el ejemplo 7, la tasa de interés global total, según el teorema 3.5, es:

$$g = (20 + 1)(0.002275/2)$$
$$g = 0.0238875 \quad \text{o} \quad 2.3887\%, \text{ igual a la que se obtuvo antes.}$$

Ejemplo 9

Comparación de tasas al comprar un automóvil

A Juan le ofrecen un automóvil a crédito con 30 mensualidades e interés global total del 15%, y en otra agencia se lo venden con el 12% de interés simple anual, ¿qué le conviene más?

solución

La tasa por periodo mensual en la segunda opción es $i = 0.12/12$ o $i = 0.01$, y el número de pagos es 30, entonces la tasa global total equivalente, según el teorema 3.5, es:

$$g = (30 + 1)(0.01/2) \qquad g = (n + 1)(i/2)$$

$$g = 0.155 \text{ o } 15.5\%$$

Como éste es mayor que el 15% de la primera opción, ahí compra el automovil. Note usted que no importan la magnitud de los pagos ni el precio del automóvil.

Saldo insoluto

Para liquidar de inmediato una deuda o para refinanciarla completamente antes de amortizarla, es necesario conocer el saldo insoluto al efectuar un pago cualquiera.

Este saldo es igual a la multiplicación de una amortización C/n por el número de abonos que faltan al efectuar el pago k-ésimo y si n es el total de pagos, entonces $n - k$ son los que faltan. Entonces:

Teorema 3.6

En la amortización de una deuda con interés simple, luego de hacer el k-ésimo abono, el saldo insoluto está dado por:

$$S = (n - k)(C/n)$$

donde

n es el número de pagos y

C es la deuda original

Ejemplo 10

Saldo insoluto, tasa de interés simple

La compañía Empaques del Norte, S. A., adquiere una póliza de seguro contra incendio a un precio de \$79,800, pagaderos en 12 abonos quincenales vencidos de \$7,000 cada uno. ¿Con cuánto la liquidará al realizar el quinto pago?, ¿y cuál es la tasa de interés simple anual?

solución

En el teorema 3.6 se reemplazan:

a) n por 12, el número de abonos quincenales; k por 5 y C por \$79,800, el precio de la póliza. El saldo insoluto es entonces:

$$S = (12 - 5)(79{,}800/12)$$
$$S = 7(6{,}650) \text{ o } S = 46{,}550$$

El quinto pago, incluidos los intereses, es de \$7,000; entonces, para cancelar la deuda al efectuar este abono se pagarán

$$46{,}550 + 7{,}000 = \$53{,}550$$

b) La tasa de interés simple anual se obtiene con la fórmula del teorema 3.6; sin embargo, se encuentran antes los intereses y la tasa global. Los intereses son la diferencia entre el total que se pagará y el costo de la póliza:

$$I = 12(7{,}000) - 79{,}800 \text{ o } I = \$4{,}200$$

La tasa global total es

$$g = 4{,}200/79{,}800 \quad \text{o} \quad g = 0.052631579$$

y la de interés simple i por quincena es i de la siguiente ecuación

$0.052631579 = (12 + 1)(i/2) \qquad g = (n + 1)(i/2)$

de donde $(0.052631579) \qquad (2/13) = i$

o $\qquad i = 0.008097166$ o 0.8097166% por quincena

La anual es

$$0.008097166(24) = 0.194331984$$

o 19.4332% aproximadamente

Ejercicios 3.6

1. Explique lo que significa *amortizar* un crédito.

2. ¿Cuál es la característica primordial de las amortizaciones de esta sección?

3. Explique brevemente las distintas clases de amortización que se estudiaron en esta sección.

4. ¿Cómo obtiene los pagos decrecientes en la amortización con intereses sobre saldos insolutos?

5. ¿Qué es el saldo insoluto cuando se amortiza una deuda?

6. ¿Para qué sirve encontrar el saldo insoluto?

7. ¿Cómo se obtiene el valor de cada pago en la amortización con tasa global total?
8. ¿Cómo se obtiene cada pago constante o congelado, cuando se amortiza una deuda con intereses sobre saldos insolutos?
9. ¿Cómo se relaciona la tasa global total con la tasa de interés simple por periodo o tiempo que hay entre un pago y otro?
10. ¿Para qué sirve la ecuación que relaciona la tasa de interés simple por periodo con la tasa global total?
11. ¿Cómo se desglosa un abono al cancelar una deuda?
12. ¿Cuál es la diferencia entre amortización y abono?
13. ¿Será posible que la amortización sea menor que los intereses, en un pago para cancelar un crédito?
14. ¿De qué otras maneras se llama al saldo insoluto?
15. ¿De cuánto es el abono quincenal que amortiza una deuda de $25,000 si los intereses son de $3,750 y el plazo es de 15 meses? Considere tasa global de interés.
16. En el problema 15, ¿cuál es la tasa global total? ¿Y la global quincenal?
17. ¿Cuál es el monto de cada uno de los 20 pagos semanales que amortizan un crédito de $15,000 con una tasa global total del 4.2%?
18. ¿Por qué cantidad fue un crédito que se amortiza con 7 pagos mensuales de $4,850, con una tasa global total del 8.7%?
19. ¿De cuánto es cada uno de los 15 abonos mensuales que cancelan un crédito de $35,000, si se consideran intereses del 1.2% global mensual?
20. Se compran abarrotes con valor de $18,750 que se liquidan con 5 pagos mensuales de $3,900 cada uno. ¿Cuál es la tasa de interés global semanal?
21. El 40% del precio de un automóvil se paga al comprarlo, y el resto con 25 abonos mensuales de $4,000 con cargos del 0.92% global mensual. ¿Cuál es el precio del vehículo?
22. Determine los tres primeros pagos mensuales que amortizan un crédito de $35,600, si se consideran intereses del 1% mensual sobre saldos insolutos. Suponga que son 10 y decrecen.
23. ¿A cuánto ascienden los intereses de un crédito de $43,000 que se amortizan con 13 abonos quincenales, considerando que se cargan intereses del 0.6% quincenal sobre saldos insolutos?
24. El último de los 25 abonos mensuales que amortizan un crédito es de $2,950. ¿Por cuánto fue el crédito si se consideran intereses del 14.4% sobre saldos insolutos?
25. Encuentre los otros 24 abonos en el problema 24.
26. Un minicomponente con reproductor de DVD se amortiza con 6 mensualidades que se reducen. ¿De cuánto es cada una si se cargan intereses del 15% anual sobre saldos insolutos? Considere que la primera fue por $1,350.
27. ¿Cuál es el precio de contado del reproductor del problema 26?
28. Una pizzería compra una flotilla de motocicletas con un anticipo de $30,000 y el resto con 10 abonos mensuales, de los cuales el último es de $5,250. ¿Cuál es el precio de contado de la flotilla, si se cargan intereses del 1.2% mensual sobre saldos insolutos?
29. En el problema 28, ¿de cuánto resulta cada pago si todos son iguales y no se paga enganche?

30. Un agricultor compra un tractor de $375,000, con un anticipo del 30% y 14 abonos mensuales iguales. ¿De cuánto es cada uno si le cargan intereses del 7.3% simple anual sobre saldos insolutos?

31. Un profesor compra un comedor que liquida con un anticipo del 20% y 13 abonos quincenales de $528 cada uno, con intereses del 8.2% simple anual sobre saldos. ¿Cuál es el precio de contado del mueble?

32. ¿Cuánto abonará cada mes un cliente que compra el comedor del problema 31, si no paga anticipo y lo liquida en 4 mensualidades?

33. ¿Con cuántos abonos quincenales de $3,250 se cancela una deuda de $25,473, considerando intereses del 11.04% simple anual sobre saldos insolutos?

34. Para deshidratar frutas, el ingeniero Muñiz compró un horno con un anticipo de $8,000 y 7 abonos mensuales de $2,750. ¿Cuál fue el precio de contado si le cargan intereses del 0.95% mensual sobre saldos?

35. En el problema 34, ¿qué tasa de interés global mensual le cargaron al ingeniero?

36. ¿Cuál fue la tasa de interés global quincenal que le cargan al profesor del problema 31?

37. Sandra compró un automóvil con una tasa del 9.6% simple anual. Poco después se enteró de que en otro lado se lo ofrecían con el 8% global total. Considerando un plazo de año y medio y que los abonos son mensuales, ¿estará arrepentida de haberlo tratado donde lo compró?

En los problemas 38 a 57, seleccione la opción correcta y justifíquela.

38. ¿De cuánto es el pago mensual que amortiza un crédito de $36,400, si los intereses son de $3,900 y el plazo es de 13 meses? Considere una tasa global de interés.

a) $3,190 *b*) $3,050 *c*) $3,100 *d*) $3,250 *e*) Otra

39. Un crédito de $11,547.72 se amortiza con 6 pagos semanales de $1,950 cada uno. ¿Cuál es la tasa de interés global semanal?

a) 0.21978% *b*) 0.22095% *c*) 0.21123% *d*) 0.23232% *e*) Otra

40. ¿De cuánto es cada uno de los 4 abonos bimestrales que amortizan una deuda de $28,000, si se cargan intereses del 9% global total?

a) $7,630 *b*) $7,243 *c*) $7,460 *d*) $7,580 *e*) Otra

41. ¿Cuál fue el precio de una trilladora que se paga con un anticipo del 35% y 15 abonos mensuales de $60,000, considerando intereses del 13.2% global?

a) $1’228,904.07 *b*) $1’223,158.47 *c*) $1’305,429.53 *d*) $1’198,983.03 *e*) Otra

42. ¿Cuántos pagos de $3,050 son necesarios para amortizar un crédito de $21,500, considerando que en total por intereses se pagarán $2,900?

a) 7 *b*) 8 *c*) 9 *d*) No es número entero *e*) Otra

43. El último abono mensual para amortizar una deuda de $25,500 es por $2,565.30. ¿Cuál es la tasa de interés simple sobre saldos insolutos suponiendo que fueron 10?

a) 7.40% *b*) 7.20% *c*) 6.95% *d*) 8.4% *e*) Otra

44. La tasa sobre saldos insolutos es del 14.4% simple anual y los 13 abonos quincenales son de $5,275 cada uno. ¿Por qué cantidad fue el crédito correspondiente?

a) $65,093.36 *b*) $65,810.94 *c*) $60,982.43 *d*) $64,201.78 *e*) Otra

45. Es el valor del primer abono mensual que cancela una deuda de $9,800 con cargos del 11.64% sobre saldos insolutos, suponiendo que son cinco.

a) $2,068.43 *b*) $2,055.06 *c*) $2,043.50 *d*) $1,996.45 *e*) Otra

46. ¿De qué cantidad es el último de los 7 abonos bimestrales que amortizan un crédito de $65,296 con intereses del 15% anual sobre saldos insolutos?

a) $8,879.45 *b*) $9,008.35 *c*) $9,561.20 *d*) $9,450.16 *e*) Otra

47. ¿Por cuánto es la primera amortización en el problema 46?

a) $9,184 *b*) $9,126 *c*) $9,328 *d*) $9,296 *e*) Otra

48. El precio de contado de una motocicleta es de $47,500, pero la ofrecen con el 30% de anticipo y 10 mensualidades de $3,525 cada una. ¿Cuál es la tasa de interés simple sobre saldos insolutos?

a) 13.1237% *b*) 10.9364% *c*) 11.8943% *d*) 13.4350% *e*) Otra

49. En el problema 48, ¿de cuánto es el primer abono si son decrecientes?

a) $5,269.48 *b*) $5,038.13 *c*) $5,201.43 *d*) $5,198.26 *e*) Otra

50. El primer abono quincenal que amortiza un crédito de $36,400 es de $5,412. ¿Cuál es el segundo, suponiendo intereses sobre saldos insolutos y que son 7 pagos?

a) $5,345.39 *b*) $5,381.71 *c*) $5,390.43 *d*) $5,298.10 *e*) Otra

51. ¿Con cuánto se cancela la deuda del problema 50 al efectuar el cuarto abono?

a) $19,998.73 *b*) $21,321.54 *c*) $20,921.14 *d*) $20,254.23 *e*) Otra

52. ¿Cuántos pagos semanales de $3,228.80 se necesitan para amortizar un préstamo de $25,600 con interés simple del 10.4% sobre saldos?

a) 9 *b*) 8 *c*) 10 *d*) No es número entero *e*) Otra

53. Un crédito automotriz de $125,000 se amortiza con 24 mensualidades. ¿De cuánto es cada una si se cargan intereses del 1.5% mensual sobre saldos insolutos?

a) $6,262.62 *b*) $5,985.36 *c*) $6,205.42 *d*) $6,184.90 *e*) Otra

54. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago 17 en el problema 53?

a) $35,429.72 *b*) $36,458.33 *c*) $37,293.67 *d*) $31,250 *e*) Otra

55. Luego de efectuar el pago número 11, se realiza un convenio para amortizar el remanente de la deuda del problema 53 con 20 abonos quincenales. ¿De qué cantidad es el primero si decrecen?

a) $3,805.32 *b*) $3,893.23 *c*) $4,008.52 *d*) $3,962.41 *e*) Otra

56. Carlos compra una lancha de motor con un anticipo del 40% y 10 abonos mensuales iguales de $30,200 con cargos del 12.96% sobre saldos insolutos. ¿Cuál es el precio de contado?

a) $512,308.22 *b*) $475,111.70 *c*) $501,629.32 *d*) $487,223.03 *e*) Otra

57. ¿Cuántos pagos bimestrales de $8,600 se requieren para amortizar un crédito de $88.000 con intereses del 9% sobre saldos?

a) 10 *b*) 12 *c*) 11 *d*) No es número entero *e*) Otra

3.7 Ejemplos de aplicación

Como en los otros capítulos, en éste se proponen y se resuelven algunos problemas donde intervienen el interés y el descuento simple comercial, tales como factoraje, tarjeta de crédito, inversiones en certificados de inversión, en certificados del Tesoro e interés global.

Certificados de inversión (CI)

Los certificados de inversión son valores de deuda que emiten las empresas privadas (como bancos, financieras y empresas privadas). Los plazos, el valor nominal y la tasa de interés varían de acuerdo con las políticas de cada emisor. Por ello se han convertido en una atractiva opción para los inversionistas, quienes ganan a la par que los índices inflacionarios y, además, con las tasas de interés que ofrece esta clase de inversiones, las cuales, aun siendo menores que en otras formas de inversión, no dejan de ser importantes.

A continuación veremos como se calculan las utilidades en esta clase de inversiones.

Ejemplo 1

Valor futuro de inversiones en certificados de inversión

¿Cuál fue el monto acumulado al 19 de octubre de 2005, si el 18 de enero anterior se invirtieron $350,000 en CI y el banco paga el 3.05% de interés simple anual en este tipo de inversiones? Considere que el 18 de enero los CI se cotizaron en $3.5353, y el 19 de octubre en $3.5963.

solución

En la tabla 1 del apéndice (véase pearsoneducacion.net/villalobos) se observa que el 19 de octubre es el día 292 del año y el plazo es, entonces,

$$292 - 18 = 274 \text{ días o } 274/360 \text{ años}$$

El valor futuro de los $350,000 con la tasa del 3.05% anual es, entonces,

$$M = 350{,}000[1 + 0.0305(274/360)] \qquad M = C(1 + in)$$
$$M = 350{,}000(1.023213889) \qquad \text{o}$$
$$M = 358{,}124.8612$$

Ahora bien, los CI incrementaron su valor un 1.7254547% en el plazo dado, porcentaje que se obtiene restando la unidad al cociente de las cotizaciones y multiplicando luego por 100, es decir,

$$(3.5963/3.5353 - 1)100 = (1.017254547 - 1)100$$

Entonces el monto que se busca, considerando el incremento de las unidades de inversión será

$$M = 358{,}124.8612(1.017254547)$$
$$M = 364{,}304.1434 \qquad \text{o} \qquad M = \$364{,}304.14$$

Solución alterna

Otra forma de obtener este resultado se propone como un buen ejercicio para el estudiante y consiste en obtener el número de CI que se obtiene con los $350,000, hallar su valor acumulado al 19 de octubre y multiplicar éste por los $3.5963, el valor de cada unidad al 19 de octubre.

Note además que para lograr este monto, los 350,000 iniciales deberían invertirse con el 5.3696458% simple anual ya que

$$364{,}304.14 = 350{,}000[1 + i(274/360)] \qquad M = C(1 + in)$$

de donde para despejar i se divide entre 350,000, se resta la unidad y luego el 360 pasa multiplicando y, el 274 dividiendo, es decir,

$$i = (364{,}304.14/350{,}000 - 1)360/274 \text{ o } i = 0.053696458$$

Ejemplo 2

Monto estimado en CI con inflación

Con los datos del ejemplo 1, determine el monto de la inversión al 19 de octubre de 2009, si se prevé que la inflación será del 0.54% en promedio por mes.

solución

El valor acumulado de los $364,304.14 cuatro años después, es decir, al 19 de octubre de 2009, es

$$M = 364{,}304.14[1 + (0.0305)4] \qquad M = C(1 + in)$$

$$M = 364{,}304.14(1.122) \qquad \text{o} \qquad M = 408{,}749.25$$

El incremento total en el valor de la CI, con el 0.54% mensuales, en los cuatro años está dado por

$$(1 + 0.0054)^{48} = 1.294989607$$

esto es, 29.4989607%, y el monto acumulado en dólares es, por lo tanto,

$$M = 408{,}749.25(1.294989607) \qquad \text{o} \qquad M = \$529{,}326.03$$

Tarjeta de crédito

La tarjeta de crédito es el instrumento de uso más generalizado para conseguir dinero en efectivo o comprar a crédito bienes y servicios, la cual puede convertirse, cuando se tienen saldos en favor por parte del usuario, en herramienta de ahorro e inversión.

Cada banco tiene sus propios sistemas para evaluar los intereses que se devengan por el uso de la tarjeta de crédito. A continuación se presenta uno, ilustrado con un ejemplo, donde se supone que la fecha de corte es el séptimo día de cada mes.

Los intereses de un mes cualquiera son iguales a la suma de las siguientes dos cantidades.

a) Los intereses que se obtienen tomando como base el saldo promedio diario (SPD), según las compras y disposiciones del mes anterior.

b) Los intereses del saldo insoluto promedio diario del periodo mensual actual.

Si este saldo resulta negativo, es decir, cuando el usuario hace depósitos que sobrepasan el saldo anterior, el banco generalmente abona con una tasa de interés menor a la tasa con la que hace los cargos.

Ejemplo 3

Cargo por intereses en tarjeta de crédito

¿Cuánto pagó un tarjetahabiente por concepto de intereses en el periodo comprendido del 8 de abril al 7 de mayo de 2005? Su saldo anterior fue de $725.29; el 12 de marzo anterior hizo una compra de $350 con cargo a su tarjeta en una tienda de autoservicio; el 23 de marzo dispuso de $400 en el cajero automático, y el 1 de abril pagó $275 por consumo en alimentos. Considere, además, que hizo dos abonos de $300 cada uno el 15 y el 30 de abril, y la tasa que el banco le carga por intereses es del 3.31 % mensual.

solución

Se recomienda repasar el ejemplo 6 de la sección 1.6 para calcular el saldo promedio diario.

En la figura 3.8 se representan las fechas, los plazos y las cantidades de las compras y disposiciones del mes anterior.

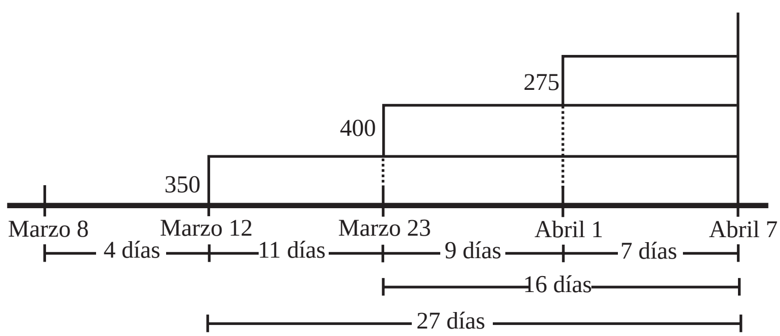


FIGURA 3.8

Los primeros $350 generan intereses durante 27 días, entre el 12 de marzo y el 7 de abril; los $400 siguientes durante 16 días y los últimos $275 solamente durante 7 días, tal como se presenta en la figura 3.8. El saldo promedio diario es, por lo tanto,

$$SPD = \frac{350(27) + 400(16) + 275(7)}{31}$$

$$SPD = \frac{17,775}{31}$$

$$SPD = \$573.39$$

y los intereses son

$$573.39(0.0331) = \$18.98$$

Note que los cargos se hacen efectivos el mismo día en que se realizan, por eso el plazo incluye las fechas inicial y terminal.

Para los otros intereses se calcula el saldo insoluto promedio por día en el presente periodo, con el auxilio de la figura 3.9, donde se indican los dos abonos, el saldo al principio del mes y el saldo final.

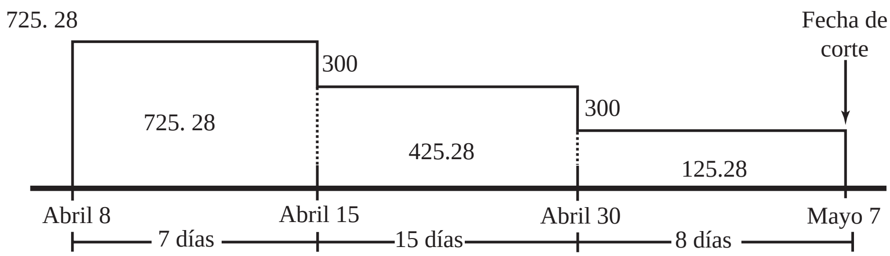


FIGURA 3.9

Por lo que

$$\frac{725.28(7) + 425.28(15) + 125.28(8)}{30} = \$415.28$$

Siendo los intereses ahora:

$$415.28(0.0331) = \$13.75$$

El cargo total por concepto de intereses es, por lo tanto,

$$I = 18.98 + 13.75$$
$$I = \$32.73$$

Note que el último saldo promedio diario puede llegar a ser negativo, lo que daría lugar a que los intereses se redujeran.

Por ejemplo, si el 15 de abril se abonan \$900, en vez de los \$300, el saldo será:

$$\frac{725.28(7) + (-174.72)(16) + (-474.72)(7)}{30} = -\$34.72$$

y los intereses:

$$I = (-34.72)(0.0331)$$
$$I = -\$1.15$$

Inversión en certificados del Tesoro

Ejemplo 4

Valor comercial de los certificados del Tesoro

Calcular el valor comercial, el día de su colocación en la Bolsa de Valores, de los certificados del Tesoro que se emiten a un plazo de 91 días, un valor nominal de $10 y un 8.5% de descuento simple anual.

solución

Los valores a reemplazar en la fórmula del teorema 3.3 son:

M = $10, el valor nominal
d = 0.085, la tasa de descuento simple anual
n = 91/360, el plazo en años o 91 días

El valor comercial es, entonces,

$$P = 10[1 - (91/360)(0.085)] \quad P = M(1-nd)$$
$$P = 10(0.978513889 \quad \text{o} \quad P = \$9.7851 \text{ (redondeando)}$$

Ejemplo 5

Ganancias, tasa de interés en certificados del Tesoro y otra alternativa de inversión

Una persona que logró un premio de $3.5 millones de dólares en los Pronósticos Deportivos adquiere certificado del Tesoro a un plazo de 182 días y descuento del 11.6% simple anual.

a) ¿A cuánto ascienden sus ganancias?
b) ¿Con qué tasa de interés simple anual estará ganando?
c) ¿Le conviene más comprar centenarios que aumentan su cotización en 0.23% cada semana?

solución

a) El valor comercial de los certificados, cuyo valor nominal es de $10, se obtiene con el teorema 3.3:

$$P = 10[1 - (182/360)(0.116)] \qquad P = M(1 - nd)$$
$$P = 10(0.941355556) \text{ o}$$
$$P = \$9.4136$$

El total de certificados que adquiere es

$$3'500{,}000/9.4136 = 371{,}802.4985 \quad \text{o} \quad 371{,}802$$

A los 182 días recibirá, por lo tanto,

$$371{,}802(10) = \$3'718{,}020$$

Sus utilidades en dinero, sin descontar impuestos y otros gastos, son

$$3'718{,}020 - 3'500{,}000 = \$218{,}020$$

b) Para determinar la tasa de interés simple que ganaría en su inversión se utiliza la fórmula del interés simple, donde $M = 10$, $C = 9.4136$ y $n = 182/360$

$$10 = 9.4136[1 + (182/360)i] \quad M = C(1+ni)$$

por lo que la tasa de interés simple anual i será

$$10/9.4136 - 1 = (182/360)i \quad \text{de donde}$$

$$0.062292853(360)/182 = i$$

$$0.123216632 = i \quad \text{o} \quad 12.3216632\% \text{ anual}$$

c) Por cada dólar que invierta en la compra de onzas-oro en 182 días, es decir, 26 semanas, tendrá

$$(1)(1 + 0.0023)^{26} = \$1.061551307$$

Es decir, que su inversión crece un 6.155% en las 26 semanas, mientras que con los certificados del Tesoro crece un 6.229% aproximadamente, porque el incremento, como se vio en el ejemplo 13 de la sección 1.8, es

$$\begin{aligned}(10/9.4136 - 1)100 &= (0.062292853)100\\ &= 6.229\%\end{aligned}$$

Por lo tanto, le es más redituable invertir en certificados del Tesoro.

El factoraje

Otro ejemplo de operaciones que se realizan con descuento es *el factoraje,* que es un servicio que ofrecen algunos organismos, las empresas de factoraje, para ayudar a solventar los problemas de liquidez de las personas morales y físicas, comprando sus documentos por cobrar.

Por supuesto que este servicio lleva consigo un riesgo para quien adquiere la cartera por cobrar, a quien se denomina *factor,* y un costo por comisiones que el *cedente,* el que vende la cartera, paga al factor por el privilegio de disponer de una parte de su dinero, antes de la fecha de vencimiento.

Es evidente que el capital que el cedente recibe del factor en la compraventa es menor que el valor consignado en el documento, su valor nominal M. Los cálculos se realizan tomando como base el *aforo* o *valor aforado,* el cual oscila entre el 70 y 95% del valor nominal del documento. La diferencia entre los dos, el valor aforado y el valor nominal, se liquida hasta la fecha de vencimiento y generalmente no se considera en los descuentos y comisiones que se originan en la operación de compraventa.

Cabe señalar que la magnitud de las comisiones y los descuentos depende de la empresa de Factoraje, así como de la calidad y la solvencia del organismo deudor.

En el siguiente ejemplo se ilustra lo anterior.

Ejemplo 6

Adquisición de cartera por cobrar (factoraje)

El 10 de abril el administrador de Frigoríficos del Sureste, S. A., acude a una empresa de factoraje para negociar dos documentos. El primero tiene un valor nominal de $90,000 y vence el 11 de junio, y el segundo tiene un valor de $75,000 y vence el 25 de julio. ¿Cuánto recibe por los dos documentos si le cobran el 0.6% de comisión, le descuentan el 10.7% simple anual y el valor aforado es el 90% del valor nominal?

solución

En la figura 3.10 se aprecian las fechas, los plazos que se obtienen con la tabla 1 del apéndice (véase pearsoneducacion.net/villalobos) y las cantidades en miles de dólares.

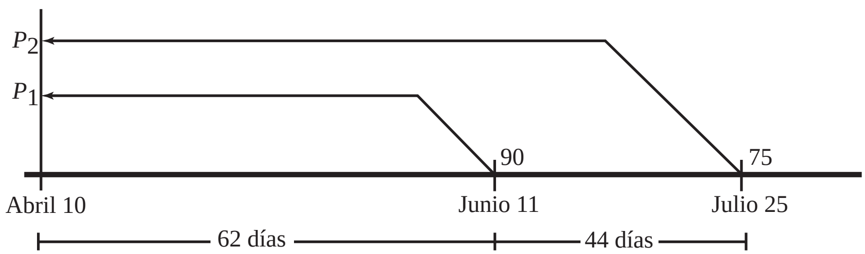


FIGURA 3.10

El valor aforado del primer documento es el 90% de su valor nominal:

$$0.90(90{,}000) = \$81{,}000$$

y el valor comercial, 62 días antes es

$$P_1 = 81{,}000[1 - (62/360)(0.107)] \qquad P = M(1 - nd)$$
$$P_1 = 81{,}000(0.981572222)$$
$$P_1 = \$79{,}507.35$$

El aforo del segundo es:

$$0.90(75{,}000) = \$67{,}500$$

y el valor comercial 106 días antes es

$$P_2 = 67{,}500[1 - (106/360)(0.107)] \qquad P = M(1 - nd)$$
$$P_2 = 67{,}500(0.96849445)$$
$$P_2 = \$65{,}373.38$$

La comisión es del 0.6% del total aforado:

$$0.006(81{,}000 + 67{,}500) = \$891$$

en consecuencia, la cantidad que el administrador recibe, por parte de la empresa de factoraje, es

$$79{,}507.35 + 65{,}373.38 - 891 = \$143{,}989.73$$

Ejercicios 3.7

1. ¿Cuál es el monto acumulado al 4 de noviembre de 2005, si el 20 de enero anterior se invirtieron $75,000 en certificados de inversión (CI)? Considere que el banco, en esta clase de inversiones, paga intereses del 2.05% simple anual. El 20 de enero las CI se cotizaron en $3.534635 y el 4 de noviembre de 2005 en $3.601551, y que las inversiones en CI se manejan con interés simple ordinario y tiempo real.
2. En el problema 1, ¿cuál será el monto acumulado al 20 de diciembre de 2006, suponiendo que ese día cada CI se cotiza en $3.632943 y la tasa de interés se mantiene?
3. En el problema 1, ¿cuál será el monto al 10 de febrero del 2008 considerando que las CI aumentan su cotización con la inflación del 0.45% mensual y la tasa de interés no varía?
4. ¿Qué le conviene más a un inversionista, depositar su dinero en cuenta bancaria que reditúa con el 9.13% de interés simple anual o invertir en CI en las condiciones del problema 1?
5. El valor de las CI al 26 de agosto de 2005 fue de $3.578927 y se estima que el mismo día del año 2007 será de $3.612532. ¿Cuántas CI tendrá el licenciado González, si el banco reditúa el 2.75% simple anual en estas operaciones y si invirtió $65,000 el 26 de agosto de 2005?
6. En el problema 5, ¿cuánto tendrá el señor González en su inversión, en dólares el 26 de agosto de 2007, si se estima que la inflación es del 0.45% en promedio mensual y que con esta tasa crece el valor de las CI?
7. En el problema 5, ¿de qué monto dispondrá el licenciado el mismo 26 de agosto de 2007, si invierte su dinero en cuenta corriente que le reditúa con el 12.3% simple anual?
8. ¿Cuánto paga un usuario de tarjeta de crédito por concepto de intereses en el periodo de corte del 29 de agosto al 28 de septiembre, si su saldo anterior fue de $885.65 y registra los movimientos siguientes?

Fecha	Movimiento	Tipo del movimiento
3 de agosto	$150.00	Disposición en efectivo
16 de agosto	$185.00	Servicio mecánico
25 de agosto	$450.75	Compra en tienda departamental
30 de agosto	$350.00	Abono a tarjeta
17 de septiembre	$400.00	Abono a tarjeta

Suponga intereses del 2.14% simple mensual, para el periodo anterior y del 2.03% para el presente.

9. ¿Cuánto pagó por concepto de intereses un tarjetahabiente en el periodo comprendido del 10 de febrero al 9 de marzo de 2006, si le cargan un interés del 3.75% simple mensual y, además, se tiene la siguiente información?

Saldo anterior: $167.72

Fecha	Compras y disposiciones	Abono
12 de enero	$350.00	
17 de enero	$425.50	
1 de febrero		752.50
8 de febrero	$148.80	
15 de febrero		$400.00
20 de febrero		$350.00
1 de marzo	528.30	

10. El señor López tuvo los siguientes movimientos en su tarjeta de crédito, la cual le carga con el 28.6% de interés simple anual y el corte se realiza el día 14 de cada mes.

Fecha	Compras y disposiciones	Abonos
19 de mayo	$170.26	
25 de mayo	$132.75	
1 de junio		750.00
3 de junio	$183.20	
12 de junio	$60.48	
13 de junio	$193.80	
18 de junio		400.00
20 de junio	$425.00	

Saldo anterior: $1,053.30

¿A cuánto ascienden los intereses del periodo comprendido del 15 de junio al 14 de julio?

11. ¿Con qué tasa de descuento se colocaron en el mercado de valores los certificados del Tesoro, cuyo valor nominal es de $10, a un plazo de 182 días y con valor comercial de $9.75?

12. ¿Con qué tasa de descuento se emitieron los certificados del Tesoro con valor nominal de $10, a 28 días de plazo, si se cotizaron a $9.93 en su colocación en la bolsa?

13. ¿Cuál es el precio de los certificados del Tesoro en su emisión a plazo de 91 días, con valor nominal de $10 y 9.28% de descuento simple anual?

14. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual que gana un inversionista al adquirir certificados del Tesoro en las condiciones del problema 13?

15. ¿Cuánto recibirá la compañía Bicicletas del Centro, S. A., 25 días antes del vencimiento de dos documentos, cuyo valor total es de $180,000. La empresa de factoraje le aplica el 11.4% de descuento simple anual, le carga el 0.45% de comisión y le da el 90% del valor total?

16. ¿Cuánto recibe de una empresa de factoraje el 21 de junio el administrador de la Distribuidora de Materiales, S. A., por 3 documentos que vencen el 10 de julio, el 5 de agosto y el 23 de octubre siguientes, por: $40,000, $65,200 y $108,000, respectivamente. Considere el 0.7% de comisión, el 10.9% de descuento simple anual y el 85% de aforo?

17. El 3 de diciembre el señor Ornelas acude a una empresa de factoraje para negociar un documento con valor nominal de $48,000, cuyo vencimiento es el 20 de febrero siguiente. ¿Cuánto recibe si le descuentan el 12.48% simple anual, aforo del 92.5% y comisiones del 0.5%?

18. Calcule los días que faltan para el vencimiento de un pagaré con valor nominal de $105,000, suponiendo que se negocia en $93,025 considerando el 90% de aforo, el 0.65% de comisión y el 13.2% de descuento simple anual.

19. ¿Cuánto recibe el portador de un pagaré con valor nominal de $35,200, 85 días antes del vencimiento si le descuentan el 9.3% simple anual?

20. Un pagaré con valor nominal de $19,350 se comercializa en $18,500 el 3 de diciembre. ¿Qué día vence si se descuenta el 13.2% de interés simple anual?

En los problemas 21 a 47 seleccione la opción correcta, justificando la respuesta.

21. ¿Cuál es el monto acumulado en dólares al 28 de octubre de 2005 si el 5 de junio anterior se invirtieron $125,000 en CI, unidades de inversión? Suponga que el banco paga intereses del 3.04% simple anual en esta clase de inversiones, y que el 28 de octubre los CI se cotizaron en $3.598593 y el 5 de junio en $3.574755.

a) $126,492.05 *b*) $131,928.41 *c*) $127,374.32 *d*) $132,129.32 *e*) Otra

22. En el problema 21, ¿cuál será el monto acumulado al 8 de diciembre de 2008, suponiendo que ese día cada unidad de inversión se cotiza en $4.040371 y la tasa de interés se mantiene?

a) $156,048.93 *b*) $157,093.41 *c*) $154,924.83 *d*) $156,549.08 *e*) Otra

23. ¿Qué conviene más a un inversionista, depositar su dinero en una cuenta bancaria con el 7.62% simple anual o invertir en CI en las condiciones del problema 21? Considere el plazo desde el 28 de octubre de 2005 hasta el 8 de diciembre de 2008.

a) En UDIS *b*) En la cuenta bancaria *c*) Es lo mismo *d*) No se puede determinar *e*) Otra

24. El valor de los CI el 21 de diciembre de 2004 fue de $3.5297 y el 28 de julio anterior fue de $3.4183. ¿Cuántas CI tendría el arquitecto Pérez el 21 de diciembre, si el 28 de julio anterior invirtió $145,000 en un banco que bonifica intereses del 2.62% simple anual?

a) 42,329 *b*) 42,869 *c*) 42,095 *d*) 41,980 *e*) Otra

25. ¿El 21 de diciembre de 2007 de qué monto en dólares dispondrá el arquitecto del problema 24, si los CI aumentan su valor en $0.1571 cada cuatrimestre?

a) $221,429.03 *b*) $228,587.17 *c*) $214,392.43 *d*) $300,276.11 *e*) Otra

26. ¿Cuánto paga un usuario de tarjeta de crédito por concepto de intereses en el periodo de corte del 29 de noviembre al 28 de diciembre, si el saldo anterior fue de $1,248.35 y registró los siguientes movimientos? Suponga intereses del 2.05% simple mensual y que el saldo promedio diario del mes anterior fue de $3,567.88.

Fecha	Movimiento	Detalle movimientos
Diciembre 2	$450.00	Disposición en efectivo
Diciembre 6	$329.45	Ferremateriales López
Diciembre 8	$1,275.00	Juguetirama
Diciembre 16	$619.50	Vinos La Playa
Diciembre 22	$2,000.00	Su abono
Diciembre 23	$725.40	Superama

a) $75.28 *b*) $129.42 *c*) $205.48 *d*) $293.41 *e*) Otra

27. ¿Con qué tasa de descuento se colocaron en el mercado de valores los certificados del Tesoro con plazo de 182 días y valor comercial de $9.67? Recuerde que el valor nominal de los certificados del Tesoro es de $10.00.

a) 7.2943% *b*) 6.9836% *c*) 7.0234% *d*) 6.5275% *e*) Otra

28. ¿Cuál es la tasa de interés simple con la que gana un inversionista al adquirir certificados del Tesoro, con las condiciones del problema 27?

a) 7.3548% *b*) 7.0048% *c*) 6.7502% *d*) 6.6809% *e*) Otra

29. ¿Cuánto recibe de ABBA-FACTOR el 2 de marzo el gerente de la Distribuidora de Llantas, por dos documentos que vencen el 22 de julio y el 5 de septiembre siguientes, con valor nominal de $56,350 y $62,500, respectivamente? Considere el 0.5% de comisión, el 11.2% de descuento comercial y el 85% de aforo.

a) $114,928.43 *b*) $95,815.80 *c*) $118,429.53 *d*) $115,912.59 *e*) Otra

30. ¿Cuál es el valor nominal de un pagaré que 68 días antes de su vencimiento se negocia en $47,728.53, considerando un descuento comercial del 12.04%?

a) $48,075.29 *b*) $48,839.25 *c*) $47,943.05 *d*) $49,008.32 *e*) Otra

31. Un documento con valor nominal de $125,650 se transfiere con un descuento total de $11,150. ¿Cuál es la tasa de descuento comercial si la operación se efectúa 8 meses antes de su vencimiento?

a) 13.3108% *b*) 13.9205% *c*) 12.8709% *d*) 13.0041% *e*) Otra

32. ¿En cuánto se negocia el 25 de noviembre un pagaré con valor nominal de $9,603 y vencimiento al 3 de abril del año siguiente? Suponga el 13.2% de descuento simple anual.

a) $9,148.78 *b*) $8,993.06 *c*) $9,201.64 *d*) $9,080.04 *e*) Otra

33. ¿Aproximadamente cuántos días faltan para el vencimiento que un documento con valor nominal de $98,750, considerando que se negocia en $89,050, y un 92% de aforo, un 0.68% de comisión y 10.98% de descuento simple anual?

a) 51 *b*) 48 *c*) 43 *d*)40 *e*) Otra

34. El 28 de enero se negocia en $29,960 un pagaré con valor nominal de $31,129.00. ¿Qué día vence si se considera un descuento simple anual del 11.7%?

a) Mayo 12 *b*) Junio 2 *c*) Mayo 24 *d*) Junio 15 *e*) Otra

35. Un directivo de un famoso club de fútbol compra onzas-oro con una inversión de $110,500. ¿Con qué tasa de interés simple deberá invertir su dinero para lograr las mismas utilidades, si las monedas aumentan su valor 1.8% cada trimestre? Considere 15 meses de plazo.

a) 8.0982% *b*) 8.4051% *c*) 7.4639% *d*) 7.1011% *e*) Otra

36. ¿Cuál es el precio de un automóvil que se compra con un anticipo del 30% y 24 mensualidades de $5,275? Considere intereses del 1.2% global mensual.

a) $157,267.08 *b*) $163,921.35 *c*) $165,039.00 *d*) $161,203.45 *e*) Otra

37. El arquitecto Gutiérrez compra una mezcladora de concreto y la paga con 5 mensualidades de $9,800, efectuando la primera el día de la compra. ¿Cuál es el precio si le cargan intereses del 4.8% global total?

a) $45,928.93 *b*) $46,098.32 *c*) $46,755.73 *d*) $47,059.23 *e*) Otra

38. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual equivalente a la global del problema 37?

a) 15.2% *b*) 19.2% *c*) 18.6% *d*) 12.6% *e*) Otra

39. El primero de los 15 pagos semanales que amortizan un crédito con intereses del 13.4% anual sobre saldos insolutos es de $3,030. ¿Por qué cantidad fue tal crédito?

a) $43,758.56 *b*) $42,098.32 *c*) $44,005.29 *d*) $42,969.35 *e*) Otra

40. Tractocamiones de Occidente ofrece una de sus unidades con un crédito de $875,000, 4 abonos bimestrales e intereses del 10.3% simple anual sobre los saldos. ¿De cuánto es cada pago si son iguales?

a) $225,308.62 *b*) $230,489.05 *c*) $215,220.04 *d*) $228,138.02 *e*) Otra

41. En el problema 40, ¿de cuánto es el primer abono si decrecen?

a) $235,309.28 *b*) $233,770.83 *c*) $232,095.03 *d*) $238,921.43 *e*) Otra

42. En el problema 40, ¿de qué tamaño es cada pago si se consideran intereses del 1.15% global bimestral?

a) $233,770.83 *b*) $235,096.16 *c*) $228,812.50 *d*) $230,912.42 *e*) Otra

43. ¿Cuánto se paga por intereses en el problema 40?

a) $37,552.08 *b*) $45,239.23 *c*) $40,925.41 *d*) $38,929.47 *e*) Otra

44. En el problema 41, ¿cuánto se carga por concepto de intereses?

a) $38,929.47 *b*) $40,925.41 *c*) $37,552.08 *d*) $36,987.43 *e*) Otra

45. El último de los 10 abonos mensuales que amortizan una deuda es de $5,275. Considerando cargos del 12.7% anual sobre saldos insolutos, determine el valor del crédito al inicio del plazo.

a) $52,008.38 *b*) $50,429.63 *c*) $52,197.58 *d*) $51,928.12 *e*) Otra

46. ¿De cuánto será cada renta en el problema 45, si fueran iguales?

a) $5,489.61 *b*) $5,629.08 *c*) $5,523.59 *d*) $5,219.61 *e*) Otra

47. En el problema 45, ¿de cuánto será cada renta, si los cargos son del 10.04% global total?

a) $5,743.82 *b*) $5,098.23 *c*) $6,005.91 *d*) $5,896.23 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Obtener el monto, el capital, los intereses, el plazo y la tasa de interés en operaciones con interés simple, mediante la fórmula:

$$M = C(1 + in)$$

- Calcular el descuento, la tasa de descuento, el plazo y el valor descontado en operaciones con descuento comercial, mediante la fórmula:

$$P = M(1 - nd)$$

- Relacionar el interés simple anual con el interés global mediante la fórmula:

$$g = (n + 1)(i/2)$$

- Obtener el saldo insoluto de una deuda, al final de cualquier periodo en operaciones a plazos con interés simple, mediante la fórmula:

$$\mathrm{S} = (n - k)C/n$$

- Tomar la mejor decisión en operaciones financieras con interés simple.
- Conocer algunas formas de calcular intereses en tarjetas de crédito, compra de certificados del Tesoro, inversiones en CI, factoraje, etcétera.

Conceptos importantes

Amortización con interés simple
Capital, valor presente, valor actual o principal
Diagramas de tiempo
Interés
Interés simple e interés compuesto
Interés y descuento simple exacto y comercial
Monto, valor futuro, montante, valor acumulado o monto del capital
Plazo o tiempo en operaciones de carácter financiero
Saldo insoluto
Tasa de interés

Problemas propuestos para exámenes

En los problemas 1 a 10, conteste verdadero o falso, según sea la afirmación que se realiza.

1. El interés simple es más productivo que el interés compuesto. _______________
2. En el interés compuesto sólo el capital gana intereses. _______________
3. Tasa de interés e interés son sinónimos. ____________________
4. Un capital que se invierte al 14% simple anual se triplica en dos años. __________
5. Descuento y valor descontado son sinónimos. ______________
6. En algunas ocasiones el capital es mayor que el monto del capital. _____________
7. Un crédito de $7,000 se amortiza con 10 abonos mensuales de $700 a un interés del 12% simple anual. _______________
8. El valor descontado de un documento 60 días antes de su vencimiento, cuyo valor nominal es de $10,000 es $9,735, cuando la tasa de descuento es del 15.4% simple anual. _______________
9. Los intereses que genera un capital C en n periodos con una tasa de interés simple i por periodo es $I = Cin$. ______________
10. Cuando se invierte al 16% simple anual se generan intereses iguales a los de una inversión al 4% simple trimestral. ______________

En los problemas 11 a 19 complete la frase.

11. Un capital se duplica en 4 años, si se invierte con un tipo de interés del___________simple anual.
12. El dinero que se paga por el uso del dinero que no es propio se llama __________________.
13. El valor descontado de un documento con valor nominal de $35,700, tres meses antes de su vencimiento, con una tasa de descuento del 10.6% simple anual es_____________________.

14. El monto que se acumula en 6 meses al 10% simple anual es $ _____________, donde el valor presente es $23,250.

15. __________________ son las operaciones a plazos con interés compuesto.

16. Para acumular $250,000 en 14 meses al 11.7% simple anual, se necesita una inversión de $______________.

17. Cuando sólo el capital devenga interés, se denomina interés ____________________.

18. El valor futuro M de un capital C después de n meses está dado por la fórmula_______________ , donde i es la tasa de interés simple mensual.

19. El valor comercial de un documento, con valor nominal de $35,000, 70 días antes de su vencimiento, con descuento del 14.65% simple anual es $ _________________.

20. ¿Qué capital produce $7,500 de interés en 6 meses, si se invierte al 12.48% de interés simple anual?

21. ¿Con qué tasa de interés simple anual se cancela un préstamo de $27,000, pagando $30,900 a los 9 meses?

22. ¿Cuánto debe invertirse el 5 de abril al 10.6% de interés simple anual, para disponer de $13,000 el 21 de agosto siguiente?

23. ¿Con cuánto se liquida un crédito de $25,000 el 10 de febrero, si el 3 de enero anterior se abonaron $15,000 y se carga un interés del 9.6%? Suponga que el crédito se consiguió el 15 de noviembre del año anterior.

24. Obtenga el tamaño de tres pagos iguales a uno, dos y tres meses de que se consiguió, para amortizar el crédito del problema 23.

25. ¿Cuánto deberá invertirse el 3 de marzo y el 8 de mayo, para disponer de $35,000 el 21 de julio? Suponga que se pagan intereses del 10.8% simple anual y que:

a) Los dos depósitos son iguales.

b) El primero es un 40% mayor que el segundo.

26. ¿Cuál es el valor descontado de un documento con valor nominal de $13,200, tres meses antes de su vencimiento? Considere una tasa de descuento del 7% simple anual.

27. El 23 de octubre se negocia en $18,750 un documento con valor nominal de $20,800. ¿Cuál es la fecha de vencimiento, si se descontó al 9.3% simple anual?

28. ¿Qué tasa de interés simple anual se gana al invertir en certificados del Tesoro a 28 días, si se ofrece el 11.8% de descuento anual?

29. ¿Cuánto debe invertirse el 3 de febrero, al 9.18% de interés simple anual para disponer de $35,000 el 9 de mayo siguiente? Considere un interés simple comercial con tiempo aproximado.

30. Con un descuento simple comercial y tiempo real, encuentre el valor comercial de un documento con valor nominal de $27,500, el 10 de octubre, si vence el 5 de enero siguiente. Suponga que se descuenta el 12.72% simple anual.

31. El 28 de octubre de 2005, los certificados del Tesoro se cotizaron en $3,598593. Ese día se invirtieron $750,000 en tales unidades en un banco que abona el 2.75% de interés simple anual. ¿Cuál será el monto acumulado al 28 de octubre del año 2009, suponiendo que las CI aumentan su cotización a la par que la inflación y que ésta se considera del 0.45% mensual en promedio?

32. ¿Cuál es el saldo promedio diario y cuánto paga por concepto de intereses un tarjetahabiente en el periodo del 5 de junio al 4 de julio, si tuvo los siguientes movimientos y le cargan el 3.2 % simple mensual en su tarjeta de crédito?

Fecha	Compras y disposiciones	Abono
7 de mayo	$750.00	
12 de mayo	$275.50	
18 de mayo	$428.35	
24 de mayo	$172.40	
2 de junio	$350.00	
8 de junio		$400.00
14 de junio		$1,200.00
30 de junio		$500.00

Considere $275.50 de saldo anterior, como cargo al usuario.

33. ¿Cuál es el precio de los certificados del Tesoro en su emisión, si tienen plazo de 91 días, una tasa de descuento del 8.3% anual y un valor nominal de $10?

34. ¿Qué le conviene más a un inversionista, adquirir certificados del Tesoro a 182 días de plazo y un descuento simple anual del 8.01% o invertir su dinero en una cuenta bancaria que paga el 8.53% de interés simple mensual?

35. El 5 de junio el administrador de una compañía acude a una empresa de factoraje para negociar dos documentos. Uno tiene un valor nominal de $72,000 y vence el 10 de septiembre, el otro vence el 23 de octubre y su monto nominal es de $93,000. ¿Cuánto recibe por los dos, si le cobran el 0.7% de comisión, el 13.2% de descuento simple anual y el valor aforado es el 92% de su valor nominal?

36. Se negocian dos documentos cuyos valores nominales son $80,000 y $105,000, y el vencimiento es el 3 de marzo. El primero se negocia el 10 de noviembre con un aforo del 87%, un descuento del 9.27% simple anual y una comisión del 0.8%; el segundo se negocia el 13 de octubre anterior con un aforo del 90%, un descuento del 10.3% simple anual y una comisión del 0.75%. ¿Cuánto se recibe por cada uno?

37. ¿De cuánto es cada pago mensual que amortiza un crédito de $126,000 en un año y medio con un interés del 12.3% simple anual sobre saldos insolutos? Suponga que los pagos decrecen con los intereses.

38. ¿Qué conviene más al comprar una computadora con 10 pagos mensuales iguales, pagar el 6% global o pagar el 13.3% de interés simple anual?

39. Se compra un automóvil con 24 pagos mensuales de $5,000, interés del 14.3% simple anual y un enganche del 35%. Determine:

a) El precio de contado del automóvil.

b) La tasa global mensual.

c) El saldo insoluto luego de hacer el pago 15.

d) El total que se paga por concepto de interés.

40. Obtenga el abono mensual con el que se amortiza un crédito de $48,000 en 8 meses, si se cargan intereses del 1.5% global mensual.

41. ¿Cuál es el precio de un automóvil usado que se adquiere con un anticipo del 40% y 18 mensualidades de $6,300 cada una, y que incluyen intereses de 1.75% global mensual.

42. Se compra una motocicleta en $37,250 con un pago inicial del 30% y 10 abonos mensuales que decrecen con los intereses del 15% mensual sobre saldos insolutos. ¿De cuánto es cada pago?

43. Con intereses del 1.7% mensual sobre saldos insolutos, se amortiza una deuda de $43,380 durante un año y medio. Obtenga los pagos mensuales, si decrecen con los intereses.

44. ¿De cuánto es una deuda que se amortiza con 15 pagos quincenales que decrecen con los intereses del 13.2% simple anual sobre saldos insolutos? Suponga que el primer pago es de $4,250 y obtenga los siguientes dos.

45. Con cargos del 15.6% simple anual sobre saldos insolutos, el precio de un tractor se amortiza con 18 mensualidades de $18,000. Obtenga el total que se paga por concepto de intereses y el precio de contado.

46. ¿De cuánto es cada uno de los 8 pagos quincenales iguales que amortizan un crédito de $25,000 con intereses del 0.6% simple quincenal sobre saldos insolutos?

47. ¿Qué es más conveniente al comprar una computadora cuyo precio se amortiza con 10 mensualidades, adquirirla con el 6.7% de interés global o con el 1.15% de interés simple mensual?

48. Se compra una enciclopedia en $8,350, valor que se liquida con 9 pagos quincenales iguales.

¿De cuánto es cada uno si se cargan intereses del 14.4% simple anual sobre saldos insolutos?

¿Cuál es la tasa de interés global total? ¿Cuál es el saldo insoluto, luego de hacer el pago 6?

49. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de efectuar el pago 15 de un crédito que se amortiza con 20 mensualidades de $6,500 e intereses del 14.1% simple anual? ¿Cuál es la tasa global total?

¿A cuánto ascienden los intereses que se cargan?

En los problemas 50 a 64 elija la opción correcta justificando su elección.

50. ¿Cuánto se acumula en 7 meses si se invierten 60 mil dólares devengando intereses del 13.6% simple anual?

a) $64,096 *b*) $68,045 *c*) $64,760 *d*)$63,920 *e*) Otra

51. ¿En cuántos días un capital crece 20% si se invierte con el 11.4% simple anual?

a) 632 *b*) 587 *c*) 654 *d*) 496 *e*) Otra

52. Un crédito en abarrotes por $43,298 dólares se cancela con $44,845.36, 48 días después. ¿Cuál es la tasa de interés simple anual?

a) 26.03% *b*) 15.82% *c*) 21.91% *d*) 11.83% *e*) Otra

53. Se compra un reproductor DVD con $75.00 y dos pagos mensuales de $560 cada uno, ¿cuál es el precio de contado si se cargan intereses del 14.4% simple anual?

a) 1,210.43 *b*) 1,150.08 *c*) 1,175.23 *d*) 1,075.03 *e*) Otra

54. Un pagaré con valor nominal de $ 42,850 y vencimiento al 23 de octubre, se negocia el 1 de junio anterior en $ 40,073.32 ¿Cuál es la tasa de descuento?

a) 0.168 *b*) 0.173 *c*) 0.158 *d*) 0.162 *e*) Otra

55. El administrador de una empresa negocia el 13 de septiembre dos documentos; el primero con valor nominal de $63,800 y vencimiento al 25 de enero, y el segundo con valor de 71,750 vence el 3 de marzo. ¿Cuánto recibe por los dos si le descontaron el 11.6% simple anual?

a) $128,841.82 *b*) $126,939.40 *c*) $127,809.23 *d*) $128,043.08 *e*) Otra

56. Resuelva el problema 55 considerando interés exacto con tiempo aproximado.

a) $128,107.49 *b*) $ 127,902.41 *c*) $126,890.43 *d*) $128,997.08 *e*) Otra

57. Para liquidar un préstamo el señor Domínguez endosa dos pagares, uno por $36,400 y otro por $54,250 con plazos de 75 y 123 días, respectivamente. ¿Cuánto recibió en préstamo si le cargan intereses del 15.2% y se considera interés exacto con tiempo aproximado?

a) $85,896.43 *b*) $86,904.17 *c*) $86,593.27 *d*) $87,046.36 *e*) Otra

58. ¿Cuál es la fecha de vencimiento del segundo documento del problema 57 si se firmaron el 10 de febrero?

a) Junio 15 *b*) Junio 12 *c*) Junio 13 *d*) Junio 16 *e*) Otra

59. ¿De cuánto es cada uno de los 18 abonos mensuales que amortizan un crédito automotriz de $105,300 con intereses del 1.6 % global mensual?

a) $7,534.80 *b*) $7,893.40 *c*) $7,790.09 *d*) $7,008.30 *e*) Otra

60. ¿Cuánto se abona cada mes para amortizar el crédito del problema 59, si la tasa dada es sobre saldos insolutos?

a) $7,093.41 *b*) $6,932.50 *c*) $7,205.40 *d*) $6,739.20 *e*) Otra

61. ¿Cuántos abonos quincenales de $ 7,040 amortizan una deuda de $100,000 con intereses del 16.8% sobre saldos insolutos?

a) 14 *b*) 15 *c*) 17 *d*) No es entero *e*) Otra

62. Para instalar un café-internet el señor Sánchez consigue un préstamo que amortiza con 14 pagos mensuales de $9,650 e intereses del 10.6% anual sobre saldos. ¿Por cuánto dinero fue el empréstito?

a) $126,705.74 *b*) $117,910.41 *c*) $130,408.21 *d*) $125,042.98 *e*) Otra

63. ¿Cuánto pagó por intereses el señor Sánchez del problema 62?

a) $9,624.35 *b*)$8,792.43 *c*) $8,394.26 *d*) 8,524.03 *e*) Otra

64. En el problema 62, ¿de cuánto sería el primer abono si los abonos son decrecientes?

a) $9,786.43 *b*) $10,289.32 *c*) $10,002.49 *d*) $10,169.64 *e*) Otra

Capítulo 4

Interés compuesto

Contenido de la unidad

Si, en una inversión a plazo fijo no se retiran el capital ni los intereses que se generaron, éstos pueden agregarse al capital, por lo que a partir del segundo periodo producirán sus propios intereses; y si esto continúa, el capital en la inversión, al comenzar un periodo cualquiera, será mayor que el que se tenía al iniciar el periodo anterior. Se trata de la característica esencial del *interés compuesto*, la cual lo hace diferente del *interés simple*, en cuyo caso sólo el capital original genera intereses, es decir, al comenzar cualquier periodo el capital es constante, es el mismo.

Si bien es cierto que el interés compuesto ha existido desde siempre, se manifiesta y tiene características particulares en cada país, según las regulaciones y variables en la banca. El interés compuesto no es más que una aplicación importante de las progresiones geométricas que se estudiaron en el segundo capítulo y, a manera de introducción y repaso, consideremos lo siguiente.

4.1 Introducción

Suponga que la población del país aumenta un 3% cada año. ¿Cuánto crecerá en 3 años?

Si A es la población inicial, entonces, al terminar el primer año o iniciar el segundo, la población será

$$A_2 = A_1 + 0.03A_1$$

$$A_2 = (1 + 0.03)A_1 \quad \text{o} \quad A_2 = (1.03)A_1$$

Al comenzar el tercero, será

$$A_3 = A_2 + 0.03A_2$$

$$A_3 = (1.03)A_2 \qquad \text{Se factoriza } A_2$$

$$A_3 = (1.03)[(1.03)A_1] \qquad \text{porque } A_2 = (1.03)A_1$$

o $$A_3 = (1.03)^2A_1 \qquad \text{porque } a(a) = a^2$$

y en el cuarto será

$$A_4 = A_3 + 0.03A_3$$

$$A_4 = (1.03)A_3$$

$$A_4 = (1.03)^3A_1 \qquad \text{¿Por qué?}$$

Es decir, $A_4 = (1.092727)A_1$ o $A_4 = (1 + 0.092727)A_1$ y esto representa un incremento del 9.2727% con respecto a la población original. ¿Por qué? Este porcentaje es mayor que lo que resulta de multiplicar el incremento anual por 3, es decir, 9.2727 es mayor que 9, pues se trata de incrementos sobre incrementos.

Advertencia

Cuando la variación de los valores es uniforme y se expresa como un tanto por ciento, se distinguen dos tasas de crecimiento, o reducción, la que corresponde al porcentaje dado, el 3% del incremento anual en la población del ejemplo, y la que resulta de dividir cualquier término, es decir, cualquier valor, entre el que le precede, 1.03 en el mismo ejemplo. Ésta, el 1.03, es la que se aplica en las fórmulas de las progresiones geométricas, denotándola como r, la razón común, y estará dada en general por $r = 1 + v$, donde v es el porcentaje del incremento en la sucesión de valores.

Variación constante

Ejemplo 1

Inflación semestral dada la mensual

Si la inflación mensual promedio durante seis meses ha sido del 0.8%, ¿de cuánto será la del semestre?

solución

Suponga que, el primer día del semestre, el precio de cualquier artículo de la canasta básica fue de C dólares; entonces, al final del primer mes, es decir, al comenzar el segundo, el precio de dicho artículo es un 0.8% mayor:

$$C_2 = C_1 + 0.008C_1$$
$$C_2 = (1 + 0.008)C_1 \quad \text{o} \quad C_2 = (1.008)C_1$$

Al final del segundo o al inicio del tercero, el precio crece otro 0.8%:

$$C_3 = C_2 + 0.008C_2$$
$$C_3 = (1.008)C_2$$
$$C_3 = (1.008)[(1.008)C_2] \quad \text{sustituyendo} \quad C_2 \text{ por } (1.008)C_1$$
$$C_3 = (1.008)^2C_2 \quad a(a) = a^2$$

Al final del tercer mes, el precio será

$$C_4 = (1.008)C_3$$
$$C_4 = (1.008)[(1.008)^2C_1] \quad \text{o} \quad C_4 = (1.008)^3C_1$$

Notando que el exponente de 1.008 es igual al coeficiente de C menos uno, se tiene que, al final del semestre, al iniciar el séptimo mes el precio del artículo será

$$C_7 = (1.008)^6\, C_1 \quad C_7 = (1.048970302)C_1$$
$$C_7 = (1 + 0.048970302)C_1 \quad \text{o} \quad C_7 = C_1 + 0.048970302C_1$$

lo cual representa un incremento aproximado del 4.89703% con respecto al precio original.

En consecuencia, la inflación en el semestre es del 4.89703%, y no del 4.8% que es el resultado de multiplicar la mensual por 6.

Note que C_7 y cada uno de los anteriores corresponde a los primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = C_1$ y $r = 1 + 0.008$ o r =1.008, la razón común, y por eso C_7 puede obtenerse con la fórmula del teorema 2.3

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

Es evidente que la variación no sea uniforme, que el incremento, o decremento, de un término a otro sea diferente y en ese caso se procede evaluándolos uno por uno, lo cual resulta pesado sobre todo cuando son muchos valores.

Variación no constante

Ejemplo 2

Porcentaje de inflación cuatrimestral

¿Cuál será el porcentaje de la inflación en el primer cuatrimestre del año, si en los meses de enero, febrero, marzo y abril fue del 1.2, 0.9, 1.3 y 0.5%, respectivamente?

solución

Se procede de manera semejante a la propuesta en la introducción del capítulo.
Si al iniciar el mes de enero o, más precisamente, al terminar el mes de diciembre, el costo de un artículo que varía con la inflación es C, al finalizar el mes de enero será un 1.2% mayor, es decir,

$$C_1 = C + 0.012C$$
$$C_1 = (1 + 0.012)C \qquad \text{Se factoriza } C \text{ y se reduce a}$$
$$C_1 = (1.012)C$$

Recuerde que el 1.2% de C se expresa como $(0.012)C$.

A finales de febrero, el costo crece otro 0.9%, por lo tanto,

$$C_2 = C_1 + 0.009C, \quad 0.009 \text{ representa } 0.9\%$$
$$C_2 = (1.009)C_1$$

o

$$C_2 = (1.009)(1.012C) \quad \text{ya que } C_1 = 1.012C$$

Al terminar marzo hay otro incremento del 1.3%, y por eso:

$$C_3 = C_2 + 0.013C_2 \quad \text{o} \quad C_3 = (1.013)C_2$$
$$C_3 = (1.013)(1.009)(1.012)C \quad \text{se reemplaza } C_2$$

Al final del cuatrimestre, el precio del artículo supuesto es un 0.5% mayor, o sea que

$$C_4 = C_3 + 0.005C_3$$
$$C_4 = (1.005)C_3$$
$$C_4 = (1.005)(1.013)(1.009)(1.012)C$$

o

$$C_4 = (1.039554316)C$$

que puede expresarse como

$$C_4 = (1 + 0.039554316)C$$

el cual representa un incremento total del 3.9554316%

Note que esto es mayor que el 3.90%, la suma de los cuatro porcentajes.

Ejemplo 3

Porcentaje del incremento en ventas

a) ¿En qué porcentaje han crecido las ventas de una exportadora de artesanías en sus primeros 6 años, si del primero al segundo año crecieron un 3%; del segundo al tercero, un 3.7%, y sucesivamente 5.2%, 7.1% y 10.5%?

b) ¿De cuánto serán sus ventas en el sexto año, si en el primero exportó $750,300 dólares?

solución

a) Suponga que las ventas en el primer año fueron V_1 dólares, en el segundo fueron un 3% mayores, por lo tanto

$$V_2 = V_1 + 0.03V_1 \quad \text{o} \quad V_2 = (1.03)V_1$$

En el tercero son un 3.7% mayores, por lo que

$$V_3 = (1.037)V_2$$

$$V_3 = (1.037)(1.03V_1) \quad \text{porque} \quad V_2 = 1.03V_1$$

En el cuarto y los siguientes años, las ventas son

$$V_4 = (1.052)(1.037)(1.03V_1)$$

$$V_5 = (1.071)(1.052)(1.037)(1.03V_1) \text{ y}$$

$$V_6 = (1.105)(1.071)(1.052)(1.037)(1.03V_1)$$

$$V_6 = (1.329791246)V_1 \quad \text{o} \quad V_6 = (1 + 0.329791246)V_1$$

que representan un incremento total del 32.98% aproximadamente en los 6 años. Se trata de un incremento que es mayor al 29.5% que resulta de sumar los cinco porcentajes.

b) Las ventas en el sexto año, si en el primero fueron de $750,300, con los incrementos dados, son

$$V_6 = (1.329791246)(750,300)$$

$$V_6 = \$997,742.37$$

Se recomienda repasar y resolver los problemas de aplicación que se vieron en la sección 2.4 considerando que la variación no es constante.

Ejercicios 4.1

1. La producción de automóviles en 2005 fue de 175,000 unidades. ¿De cuánto será en el año 2014, si ésta crece un 8% anual en los primeros dos años, un 10.5% en los siguientes tres, y posteriormente un 7.6% anual?

2. Suponga que el producto interno bruto (PIB), creció 3.6% en 1998, 2.8% en 1999, 0.6% en 2000 y 3.5% en 2001. En 2002 se redujo 6.9 puntos porcentuales para luego crecer 5.1 puntos en 2003, 7 puntos en 2004 y 4.5 puntos en 2005. ¿De cuántos puntos porcentuales fue el incremento acumulado del PIB desde 1998 hasta 2005?
3. ¿Cuántos puntos porcentuales varió el índice de precios (IP) de la Bolsa de Valores en cinco días de la semana, si el lunes aumentó 2.17%, el martes cerró a la baja en 1.92%, el miércoles creció 1.78 puntos, el jueves creció 1.51 y el viernes bajó 0.23%?
4. ¿De cuánto es la inflación semestral, si en los meses primero y tercero fue del 1.25% mensual, en el segundo y quinto fue del 1.37% y en los meses restantes del semestre fue del 2.05%?
5. Las ventas de una importadora de electrodomésticos crecieron 7.3% en el primer trimestre, 8.2% en el segundo y un 11.3% en el cuarto. ¿En qué porcentaje crecieron durante el año si en el tercer trimestre bajaron un 0.7%?
6. ¿Cuánto crece un capital en un año, si en el primer bimestre crece un 3.05%, en el segundo y cuarto un 2.31 y un 3.72% en los bimestres restantes?
7. ¿Cuál será el valor estimado para las un certificado de inversión al final del año, si el primer día de ese periodo se cotizaron en $3.2635, la inflación mensual en los primeros tres meses fue del 1.28% mensual, en los meses cuarto, quinto y octavo del 1.61%, y en los meses restantes de1 2.03%?
8. La población nacional aumentó 7.5% el primer año, 6.8% el segundo, 6.3% el tercero y el cuarto, 5.1% el quinto y 5.8% el sexto. ¿Cuánto creció en el periodo de seis años?
9. La deuda externa del país se redujo 16.3% anual en los primeros tres años, 12.8% en el cuarto y 20.1% anual en los dos últimos. ¿Cuánto se redujo en el periodo de seis años?
10. El desempleo en una provincia se redujo 3% en el primer mes del año, 4.2% en el segundo, cuarto y séptimo, 2.8% en el décimo y 4.9% en los meses restantes. ¿Cuánto se redujo en el año?
11. Las ventas del comercio informal crecieron 7% en el primer trimestre, 10.3% en el segundo, 6.3% en el tercero y 15.2% en el cuarto. ¿Cuál fue el incremento total?
12. Una compañía telefónica aumentó sus servicios en 10% el primer trimestre del año, 8.3% el segundo, 12.5% el tercero y 6.9% el cuarto. ¿Cuánto creció en el año?
13. La producción anual de azúcar aumentó 11.3% en el primer año, 8.4% en el segundo, 15.2% en el tercero, 12.4% en el cuarto y 10.5% anual en los últimos dos años. ¿Cuánto creció en el periodo de seis años?
14. ¿De qué porcentaje es la inflación semestral si la inflación mensual fue del 0.95%?
15. ¿Cuántos automóviles se producirán en el año 2010 si en 2005 se produjeron 350,000, y la producción aumenta 5.3% cada año? ¿De qué porcentaje será el incremento total?
16. ¿De cuántos puntos porcentuales será el incremento del producto interno bruto (PIB) en un periodo de 7 años, si éste crece 2.7% anualmente?

17. ¿En qué porcentaje variaron las ventas de una exportadora durante 8 meses, si éstas crecieron 6.2% mensual?

18. ¿Cuánto crece un capital, en porcentaje, en un año, si éste crece 3.7% cada mes?

19. ¿De cuánto dinero podrá disponer una persona al término de un año, si al comienzo invierte $750,000 en las condiciones del problema 18?

20. ¿Cuál será el valor estimado de una inversión al final de un periodo anual, si al comienzo se tenían $3.8718 millones, valor que crece con la inflación mensual del 1.3%?

21. Si la población nacional aumenta 4.5% cada año, ¿cuánto crece en un periodo de seis años?

22. ¿Cuál deberá ser el porcentaje de incremento salarial al término de un año para recuperar el poder adquisitivo de la moneda, si se ha perdido un 1.6% cada mes? ¿Cuál será el porcentaje de la pérdida anual del poder adquisitivo?

23. ¿En cuántos puntos porcentuales se redujo la deuda externa en el periodo de seis años, si ésta decreció un 2.1% anual?

En los problemas 24 a 34 seleccione la opción correcta justificándola.

24. ¿Cuántos puntos porcentuales varió el índice de precios (IP) de la Bolsa de Valores en 5 días de la semana, si el lunes aumentó 1.6%, el martes cerró a la baja en 0.98%, el miércoles creció 1.9 puntos, el jueves creció 0.8 puntos y el viernes creció otros 1.3 puntos?

a) 4.0392 *b*) 3.9683 *c*) 4.9218 *d*) 4.6793 *e*) Otra

25. ¿De qué porcentaje será la inflación en el primer cuatrimestre del año, si en enero fue del 0.23%, en febrero del 0.65%, en marzo de 0.93% y en abril del 0.58%?

a) 2.411% *b*) 2.503% *c*) 2.613% *d*) 2.053% *e*) Otra

26. ¿Cuánto crece un capital en un año si los primeros dos bimestres crece 1.03% cada bimestre, en el tercero crece 2.05%, y en los últimos tres crece 1.75%, 1.90% y 0.95%, respectivamente?

a) 9.0256% *b*) 9.1175% *c*) 9.2563% *d*) 9.4835% *e*) Otra

27. ¿En qué porcentaje se pierde el poder adquisitivo de la moneda en un periodo de seis años, si en el primer año se pierde 2.8%, en el segundo 3.25%, y en los siguientes 4, respectivamente, se pierde 4.75%, 4.54%, 5.03% y 6.15%?

a) 19.5603% *b*) 23.7878% *c*) 21.0539% *d*) 24.0631% *e*) Otra

28. En el problema 27, ¿de cuánto deberá ser un incremento al salario al final del sexto año, para recuperar el poder adquisitivo que se tenía al comenzar?

a) 23.7878% *b*) 21.0539% *c*) 24.0631% *d*) 31.212627% *e*) Otra

29. La deuda externa del país se redujo 4.5% en el primer año, 6.35% en el segundo, y 5.63%, 4.29%, 7.21% y 6.04% en los restantes. ¿En qué porcentaje se redujo en el periodo de seis años?

a) 34.0200% *b*) 32.9613% *c*) 29.5718% *d*) 27.0938% *e*) Otra

30. Las ventas de una tienda de abarrotes se incrementaron 1.31% en el primer bimestre y en los siguientes cinco: 2.42%, 1.93%, 3.05%, 0.92% y 3.32%, respectivamente. ¿En qué porcentaje crecieron en el año?

a) 12.9500% *b*) 14.0331% *c*) 13.8308% *d*) 13.6446% *e*) Otra

31. Un estudiante de economía obtuvo 8.65 de promedio final en el primer semestre. ¿Cuánto sacó en el noveno si del primero al segundo lo incremento en 2.31%, 1.83% en el siguiente y, respectivamente, 1.05%, 0.93%, 1.12%, 0.05% y 2.11% en los restantes, y en el último su promedio se redujo un 2.5% con respecto al anterior? Note que son nueve semestres.

a) 9.3615 *b*) 8.9852 *c*) 9.2575 *d*) 9.9283 *e*) Otra

32. En el problema 31, ¿en qué porcentaje creció la calificación del noveno semestre en relación con el primero?

a) 7.023085% *b*) 7.134215% *c*) 6.980431% *d*) 7.234211% *e*) Otra

33. La inflación en enero fue de 0.75%, en febrero de 1.03%, y en marzo, abril, mayo y junio fue, respectivamente, de 0.83%, 0.62%, 1.25% y 0.57%. ¿De cuánto fue en el semestre?

a) 5.62312% *b*) 5.15574% *c*) 6.02587% *d*) 4.9268% *e*) Otra

34. En el problema 33, ¿de qué porcentaje es la inflación mensual equivalente si fuera uniforme?

a) 0.85632% *b*) 0.98161% *c*) 0.84139% *d*) 0.91253% *e*) Otra

4.2 Interés compuesto

Puede ser que la tasa compuesta, es decir, la tasa de interés compuesto sea variable, diferente para cada periodo; o que sea constante, la misma para todos los periodos. Si es variable se procede como en la sección anterior, y si es constante o fija entonces el procedimiento es el siguiente.

Suponga que se depositaron $1,000 en una cuenta bancaria que paga el 12% de interés anual compuesto por mes. ¿Cuál será el monto al final de año y medio?

Decir que el interés es compuesto por mes significa que cada mes los intereses que se generan se *capitalizan*, es decir, se suman al capital.

Para los intereses del primer mes, el capital se multiplica por la tasa mensual 0.12/12 = 0.01, como si fuera una tasa de interés simple, y luego se suman al capital. Así resulta un monto compuesto o, simplemente, monto M_1 al final del primer mes, es decir,

$$M_1 = 1{,}000 + 1{,}000(0.01) \qquad M = C + I$$
$$M_1 = 1{,}000(1 + 0.01)$$
$$M_1 = 1{,}000(1.01) \qquad \text{o} \qquad M_1 = \$1{,}010.00$$

Al comenzar el segundo periodo mensual, el capital es $1,010.00 y no 1,000 como en el primero. El monto al terminar este segundo mes es:

$$M_2 = 1{,}010 + 1{,}010(0.01)$$
$$M_2 = 1{,}010(1 + 0.01) \quad \text{se factoriza } 1{,}010$$
$$M_2 = 1{,}010(1.01)$$
$$M_2 = 1{,}000(1.01)(1.01) \quad \text{ya que } 1{,}010 = 1{,}000(1.01)$$

o

$$M_2 = 1{,}000(1.01)^2$$

Éste es el capital al iniciar el tercer mes y al final el monto es

$$M_3 = M_2 + (0.01)M_2 \qquad M = C + I \qquad C = M_2$$
$$M_3 = M_2(1 + 0.01) \quad \text{o} \quad M_3 = M_2(1.01)$$
$$M_3 = [1.000(1.01)^2](1.01) \qquad M_2 = 1{,}000(1.01)^2$$
$$M_3 = 1{,}000(1.01)^3 \qquad a^2(a) = a^3$$

Es evidente que cada uno de estos tres montos se puede expresar como el producto de los \$1,000 originales y una potencia, n, de 1.01 que es igual al mes que concluye. Consecuentemente, al final de año y medio, es decir, de 18 periodos mensuales, el monto es

$$M_{18} = 1{,}000(1.01)^{18} \quad \text{o} \quad M_{18} = C_1(1.01)^{18}$$
$$M_{18} = 1{,}000(1.196147476) \quad \text{o} \quad M_{18} = \$1{,}196.15$$

También es cierto que si los intereses se capitalizan cada quincena, entonces el monto acumulado se incrementa, ya que en este caso el plazo es de 36 quincenas y el monto será

$$M_{36} = 1{,}000(1 + 0.005)^{36} \quad \text{ya que } 0.12/24 = 0.005$$
$$M_{36} = 1{,}000(1.196680525) \qquad \text{(A)}$$

o

$$M_{36} = \$1{,}196.68$$

Esto corrobora que si se reduce el tiempo en que los intereses se capitalizan, el monto crece, es decir, resulta más productivo, pues los intereses generan intereses más pronto y con mayor frecuencia. Sólo para efectos de comparación, note usted que si la inversión se hace con interés simple, el monto al final es menor:

$$M = 1{,}000\,[1 + 36(0.005)] \qquad M = C(1 + ni)$$
$$M = 1{,}000(1.18) \quad \text{o} \quad M = \$1{,}180.00$$

Definición 4.1

El tiempo entre dos fechas sucesivas en las que los intereses se agregan al capital se llama ***periodo de capitalización***, y el número de veces por año en que los intereses se capitalizan se llama ***frecuencia de conversión*** y se denota con p.

A la frecuencia de conversión se le conoce también como *frecuencia de capitalización* de intereses.

Es cierto también que si el periodo de capitalización es mensual, entonces las siguientes expresiones son equivalentes: “el interés es compuesto por mes”, “capitalizable por mes”, "convertible mensualmente" o "interés nominal mensual". En estas condiciones, el valor de p es 12.

Los valores más usuales para la frecuencia de conversión p, son:

$p = 1$ para periodos anuales, los intereses se capitalizan cada año
$p = 2$ si los periodos son semestrales
$p = 3$ para periodos cuatrimestrales
$p = 4$ para periodos trimestrales, los intereses se agregan al capital cada trimestre
$p = 6$ cuando son periodos bimestrales
$p = 12$ para periodos de un mes, los intereses se capitalizan cada mes
$p = 13$ si los periodos son de 28 días y
$p = 24$, 52 y 360 o 365 para periodos quincenales, semanales y diarios, respectivamente

Como se dijo antes, los periodos de capitalización pueden ser tan pequeños como se quiera, llegando a tasas con capitalización instantánea, en cuyo caso puede probarse que el monto estará dado por:

$$M = Ce^{in}$$

donde $e = 2.71828...$, i es la tasa convertible instantáneamente y n es el tiempo en años.

La ecuación (A) del desarrollo anterior puede desglosarse procediendo de manera inversa al propio desarrollo, es decir,

$$M_{36} = 1{,}000(1.196680525)$$
$$M_{36} = 1{,}000(1.005)^{36}$$
$$M_{36} = 1{,}000(1 + 0.12/24)^{36}$$
$$M_{36} = 1{,}000(1 + 0.12/24)^{1.5(24)}$$

donde 1,000 es el capital C, 0.12 es la tasa de interés i anual capitalizable por quincena, 24 es la frecuencia de conversión p, y 1.5 es n, el plazo en años. Esto se formula en el siguiente teorema.

Teorema 4.1

El monto acumulado M de un capital C al final de np periodos es

$$M = C(1 + i/p)^{np}$$

donde

n es el plazo en años
np es el número de periodos e
i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año

Esta ecuación se conoce como ***fórmula del interés compuesto***. Como en otras fórmulas, es posible que, a excepción de p, la incógnita sea cualquiera de las literales que en ella aparecen. Sin embargo, en todo caso, se despejaría antes o después de reemplazar los valores que se conocen. Tenga presente que con ciertas habilidades algebraicas es más fácil hacer el despeje después de la sustitución.

Ejemplo 1

Inversión de un capital para monto preestablecido

* Ⓕ

a) ¿Qué capital debe invertirse ahora al 12.69% anual capitalizable por bimestre para tener $40,000 en 10 meses?

b) ¿A cuánto ascienden los intereses?

solución

a) El plazo n debe estar en años, por lo que para expresar 10 meses en estas unidades se dividen entre 12, o sea, el número de meses que tiene un año. En consecuencia, el plazo en años es $n = 10/12$. La frecuencia de conversión o capitalización de intereses es $p = 6$, porque 6 son los bimestres que tiene un año. Entonces,

$$np = (10/12)6 = 5 \text{ bimestres}$$

El monto es $M = 40{,}000$, la tasa de interés es $i = 0.1269$ o 12.69% anual, capitalizable por semestre, y la incógnita es C, la cual se despeja de la igualdad que resultó de sustituir estos valores en la ecuación del teorema 4.1:

$$40{,}000 = C(1 + 0.1269/6)^5 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$40{,}000 = C(1.02115)^5$$

$$40{,}000 = C(1.110318838)$$

de donde $C = 40{,}000/1.110318838$ o $C = \$36{,}025.68797$

b) Los intereses son la diferencia entre el monto y el capital

$$I = M - C$$

$$I = 40{,}000 - 36{,}025.69 \quad \text{o} \quad I = \$3{,}974.31$$

Ejemplo 2

Monto que se acumula al invertir un capital

Obtenga el monto que se acumula en tres años, si un capital de $65,000 se invierte al 10% compuesto por semestre.

solución

El capital es $C = \$65{,}000$, la tasa anual es $i = 0.10$, la frecuencia de conversión es $p = 2$ porque el año tiene dos semestres, $n = 3$ porque el capital se acumula tres años, el número de periodos en el plazo es $np = 6$; entonces el monto según el teorema 4.1 es:

* En el apéndice *B* (véase www.pearsoneducacion.net/villalobos) se incluyen las instrucciones para calculadora financiera HP 12C de los problemas señalados con este icono (símbolo).

$M = 65{,}000(1 + 0.10/2)^6$, ya que $M = C(1 + i/p)^{np}$

$M = 65{,}000(1.05)^6$

$M = 65{,}000(1.340095641)$ o $M = \$87{,}106.22$

Ejemplo 3

Tasa de interés para duplicar un capital

¿Con qué tasa de interés anual capitalizable por bimestre se duplica un capital en 3 años?

solución

Si el capital C se duplica en 3 años, entonces el monto es $M = 2C$, el plazo es $n = 3$, la frecuencia de conversión es $p = 6$, el número de bimestres por año y el número de periodos bimestrales en el plazo es $np = 3(6) = 18$.

$$2C = C(1 + i/6)^{18} \qquad M = C\,(1 + i/p)^{np}$$

$$2 = (1 + i/6)^{18} \qquad \text{se cancela } C$$

$$\sqrt[18]{2} = 1 + i/6 \qquad \text{ya que } \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$1.039259226 = 1 + i/6$$

Se resta 1 a ambos lados de la ecuación y después se multiplica por 6.

$$(0.039259226)6 = i$$

o

$$i = 0.235555356$$

Esto indica que para duplicar un capital en 3 años debe invertirse aproximadamente al 23.56% anual capitalizable por bimestre.

Ejemplo 4

Plazo en inversión de un capital

Ⓕ

¿Qué día deberá invertir \$10,000 el matemático Gutiérrez para disponer de \$10,512.00 el 11 de mayo? Suponga que la inversión genera intereses del 13% compuesto por semana.

solución

La incógnita es $x = np$, el plazo en semanas, la frecuencia de conversión es $p = 52$, el año tiene 52 semanas, el capital es $C = 10{,}000$ y el monto del capital es $M = 10{,}512$. Se sustituyen en la ecuación del teorema 4.1.

$$10{,}512 = 10{,}000(1 + 0.13/52)^x \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$10{,}512/10{,}000 = (1.0025)^x$$
$$(1.0025)^x = 1.0512$$

Esta ecuación se resuelve por tanteos con la tecla $\boxed{y^x}$ de la calculadora electrónica, con tablas financieras, la tabla 2 del apéndice, o con logaritmos comunes o naturales, como se hizo en la sección 1.5. Se toma logaritmo natural a los dos lados, ya que si dos números positivos son iguales, entonces sus logaritmos son iguales.

$$Ln(1.0025)^x = Ln(1.0512)$$

de donde $\quad (x)Ln(1.0025)^x = Ln(1.0512) \qquad Ln(A^n) = (n)Ln(A)$

$$x = Ln(1.0512)/Ln(1.0025)$$
$$x = 0.049932369/0.00249688 \quad \text{o} \quad x = 19.99790329$$

Resultado que puede redondearse a 20 semanas, y así el monto será poco mayor de los \$10,5012. Pero se convierte a días multiplicándolo por 7.

$$19.99790329(7) = 139.985323$$

Es decir, 140 días que con ayuda de la tabla 1 del apéndice (véase www.pearsoneducacion.net/villalobos) se ve que la inversión deberá hacerse el 22 de diciembre del año anterior.

Note que:
Es importante señalar que en la práctica el exponente *np*, de la fórmula del interés compuesto, es decir, el número de periodos, semanas en este caso, deberá ser un entero para hacer efectivos los intereses del periodo.

Ejemplo 5

Valor presente de un crédito e intereses

E1 25% del precio de un mueble de sala se paga con un documento con valor nominal de \$4,000 y vencimiento a 30 días. Un 30% se liquida mediante un pago a 60 días de plazo, otro 30% con un documento a 90 días de la compra y el 15% restante se deja como anticipo. Obtenga:

a) El precio del mueble.
b) El anticipo y los otros dos pagos.
c) El cargo total por intereses.

Suponga que la mueblería carga el 22.20% anual compuesto por mes en sus ventas a crédito.

solución

a) Con la fórmula del interés compuesto se obtiene el valor presente C_1 del primer documento, el cual deberá ser igual al 25% del precio del mueble:

$$4{,}000 = C_1(1 + 0.222/12), \qquad \text{el plazo es 1 mes}$$
$$4{,}000 = C_1(1.0185)$$

de donde

$$C_1 = 4{,}000/1.0185 \;\text{ o }\; C_1 = 3{,}927.344134$$

entonces

$$(0.25)\text{precio} = 3{,}927.344134$$

de donde $\text{precio} = 3{,}927.344134/0.25 \quad \text{o} \quad \$15{,}709.38$

b) El anticipo es el 15% de este precio:

$$0.15(15{,}709.38) = 2{,}356.41$$

El 30% del precio es el valor presente del abono que se hará a los 2 meses, 60 días después de la compra:

$$C_2 = 0.30(15{,}709.38)$$
$$C_2 = 4{,}712.81$$

Entonces, el segundo pago es el valor futuro de este capital, es decir,

$$M_2 = 4{,}712.81(1 + 0.222/12)^2$$
$$M_2 = 4{,}712.81(1.03734225) \quad \text{o} \quad M_2 = \$4{,}888.80$$

El valor presente del último pago es igual al del anterior y, por lo tanto, este pago es:

$$M_3 = 4{,}712.81(1.0185)^3 \quad \text{o} \quad M_3 = \$4{,}979.24$$

c) Finalmente, los intereses son la diferencia entre el total pagado y el precio del mueble:

$$I = (2{,}356.41 + 4{,}000 + 4{,}888.80 + 4{,}979.24) - 15{,}709.38 \qquad I = M - C$$
$$\text{o} \quad I = \$515.07$$

Note que la tasa de interés global total es

$$g = 515.07/15{,}709.38$$
$$g = 0.032787417 \quad \text{o} \quad 3.2787\%\ \text{aproximadamente.}$$

Ejercicios 4.2

1. Explique los conceptos de *interés compuesto, periodo de capitalización* y *frecuencia de conversión* de intereses.

2. Señale qué es más productivo, ¿invertir con interés simple o con interés compuesto? ¿Por qué?

3. ¿Por qué es más redituable el 20% anual compuesto por mes, que el 20% capitalizable por trimestre?

4. ¿Qué será más productivo: 14.3% compuesto por semestre o 13.9% compuesto por semana? ¿Por qué?
5. ¿Qué capital debe invertir en una cuenta que paga el 13.6% anual capitalizable por mes, para disponer de $13,000 en 7 meses?
6. ¿Cuánto se acumula en una cuenta de ahorros que reditúa el 18.6% anual capitalizable por bimestre en un plazo de 2 años, si se invierten $35,000?
7. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital que se invierte al 11.2% anual compuesto por semana?
8. ¿Con qué tasa de interés anual compuesto por quincena un capital crece 45% en dos años?
9. El 3 de marzo se firma un pagaré por un préstamo de $35,000 con vencimiento al 3 de junio siguiente. ¿Cuál es el valor nominal si se tienen intereses del 15.3% anual compuesto por mes?
10. ¿En cuánto tiempo se liquidará un crédito de $175,000 con intereses del 24.96% compuesto por quincena y un pago al final de $230,000?
11. Se compra una computadora con $5,600 de anticipo y un pago por $10,000 a los 2 meses de la compra. ¿Cuál es el precio de contado si se tienen cargos del 18.72% compuesto por mes?
12. Un televisor cuyo precio es de $4,500 se liquida con $5,200 a los cinco meses. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por quincena?
13. ¿Qué día se cancela con $21,000 un crédito de $18,750, concedido el 5 de junio con cargos del 16.72% compuesto por día?
14. ¿Cuál es el precio de 5 impresoras que se pagan con un anticipo del 30% y dos abonos de $7,000 y $9,000, respectivamente, a 2 y 3 meses de la compra? Suponga intereses del 9.6% anual con capitalización quincenal.
15. Se compra un refrigerador que de contado cuesta $7,850, el cual se paga con un anticipo del 35% y un pago adicional de $5,650. ¿Cuánto tiempo después de la compra se hace este pago, si se pagan intereses del 18.6% capitalizable por semana?
16. El 2 de junio el señor González compra mercancía por $32,500 y firma un pagaré con valor nominal de $37,250 y vencimiento al 21 de enero siguiente. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por día?
17. Encuentre la fecha en la que vence un documento con valor nominal de $4,550. Éste se firmó por un préstamo de $4,125 el l de junio con intereses del 10.8% anual capitalizable por día.
18. ¿Cuánto gana por concepto de intereses un inversionista que deposita $320,000 en una cuenta que reditúa el 18.4% anual compuesto por mes, en un año y medio de plazo?
19. ¿Qué capital se debe invertir para tener $12,000 en una cuenta que produce el 14.8% de interés anual capitalizable por mes, un año después?
20. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por bimestre, si un capital de $42,600 genera intereses del 15% global total en 13 meses?
21. ¿Cuál de las siguientes alternativas es más redituable para un inversionista?

    a) Invertir en una cuenta de ahorros que paga el 16.25% anual compuesto por mes.

    b) Invertir en una cuenta bancaria que paga el 16.75% anual compuesto por cuatrimestre.

    c) Invertir en una cuenta de valores al 15.4% anual capitalizable por semana.

En los problemas 22 a 39 seleccione la opción correcta, justificando su selección.

22. El contador Pérez compra un televisor con DVD. Un anticipo de 150 dólares representa el 20% del precio del aparato y son dos abonos iguales para cubrir el 80% restante. ¿De cuánto es cada uno, si se tienen cargos del 16% anual compuesto por mes y los pagos se hacen a 2 y 3 meses de la compra?

a) $315.92 *b*) $310.09 *c*) $304.25 *d*) $320.92 *e*) Otra

23. Lupita invierte ahora $25,000. ¿Cuánto acumula en un semestre, si su inversión reditúa el 1.4% mensual capitalizable por mes? Recuerde que esta tasa significa que $i/p = i/12$ o $i/p = 0.014$ de donde $i = 0.168$ es la tasa anual, que resulta de multiplicar por 12.

a) $27,174.89 *b*) $28,201.43 *c*) $26,905.92 *d*) $27,429.30 *e*) Otra

24. ¿Con qué tasa anual compuesta por semana aproximada se duplica un capital en 4 años?

a) 17.35758% *b*) 17.92134% *c*) 25.00% *d*) 18.92308% *e*) Otra

25. Determine qué le conviene más al comprador de un automóvil cuyo precio es $165,000:

a) Pagarlo de contado con un descuento del 5%.

b) Pagarlo con el 40% de anticipo y dos abonos a 3 y 4 meses de la compra por $48,000 cada uno.

c) Pagarlo sin anticipo y tres abonos a 1, 2 y 3 meses por $54,000 cada uno.

d) Pagarlo con un anticipo de $50,000 y 3 abonos de $37,500 a 1, 2 y 3 bimestres de la compra.

Suponga que el dinero reditúa el 15% de interés anual compuesto por mes y que las cuatro opciones tienen la misma factibilidad.

26. Encuentre la fecha de vencimiento de un pagaré cuyo valor nominal es de $28,000, ampara un crédito por $25,800 y tiene cargos del 0.05% diarios. Este pagaré se firmó el 3 de enero.

a) Junio 16 *b*) Junio 6 *c*) Julio 21 *d*) Marzo 30 *e*) Otra

27. ¿Cuánto debe invertir al 4.5% trimestral capitalizable por trimestre para tener $50,000 en 9 meses?

a) $43,025.32 *b*) $42,983.41 *c*) $43,814.83 *d*) $44,251.36 *e*) Otra

28. ¿En cuánto tiempo un capital crece 15% si se invierte al 0.35% semanal capitalizable por semana?

a) 25 semanas *b*) 40 semanas *c*) 32 semanas *d*) 37 semanas *e*) Otra

29. ¿Cuánto debe invertirse ahora al 13.3% anual capitalizable por semana para disponer de $70,500 en 15 meses?

a) $59,714.51 *b*) $60,302.49 *c*) $59.093.05 *d*) $61,649.63 *e*) Otra

30. ¿Qué día vence el documento con valor nominal de $42,350 que ampara un crédito por $36,670.07? Suponga que se endosó el 10 de marzo y se cargan intereses del 9.03% anual capitalizable por día.

a) 25 de mayo *b*) 15 de junio *c*) 10 de julio *d*) 1 de junio *e*) Otra

31. ¿Cuál es el precio de una pantalla de plasma que se paga con $8,000 de anticipo y dos abonos, el primero por $18,350 a 3 meses de la compra y el segundo por $11,575 a dos meses del anterior? Considere cargos o intereses del 14.16% anual capitalizable por mes.

a) $32,629.32 *b*) $36,631.04 *c*) $35,098.32 *d*) $36,928.72 *e*) Otra

32. ¿Cuánto dinero gana una persona que invierte $750,000 en una cuenta que bonifica intereses del 11.4% anual capitalizable por mes? Suponga un año y medio de plazo.

a) $110,936.08 *b*) $125,643.23 *c*) $139,150.10 *d*) $131,493.85 *e*) Otra

33. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por día, si un capital genera intereses del 21% global total en 15 meses? Considere que el monto acumulado es de $53,250.

a) 16.239215% *b*) 14.092328% *c*) 15.252876% *d*) 14.880922% *e*) Otra

34. ¿Cuánto dinero tendrá Claudia el 12 de noviembre en su cuenta, que abrió con $21,000 el 5 de junio y el 1 de agosto depositó otros $15,000? Los intereses que le bonifican son del 9.63% anual capitalizables por día.

a) $37,337.16 *b*) $36,968.19 *c*) $37,098.43 *d*) $37,296.40 *e*) Otra

35. Se compra mercancía de abarrotes con un crédito de $29,227.70, endosando un pagaré por $29,960.00 con vencimiento al 16 de julio, e intereses del 11.88% ¿Qué día se firmó el documento?

a) Mayo 2 *b*) Abril 25 *c*) Mayo 12 *d*) Abril 3 *e*) Otra

36. Se consigue un crédito automotriz por $123,000, interés global mensual del 1.15% y plazo de 8 meses. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por mes?

a) 9.12435% *b*) 9.86421% *c*) 8.03421% *d*) 8.84968% *e*) Otra

37. Carmela compra una enciclopedia con un anticipo y dos abonos mensuales de $2,750 cada uno, el anticipo y los abonos. ¿Cuál fue su precio si le cargan intereses del 15.6% anual capitalizable por mes?

a) $7,983.72 *b*) $8,063.91 *c*) $7,765.03 *d*) $8,144.58 *e*) Otra

38. Para ampliar su consultorio un doctor consigue un préstamo con intereses del 13.8%, que liquidará con tres pagos bimestrales de 35,000. ¿Cuánto le prestaron?

a) $95,937.00 *b*) $96,086.43 *c*) $93,982.41 *d*) $95,201.73 *e*) Otra

39. ¿Cuánto dinero pagó por intereses el doctor en el problema 38?

a) $8,913.57 *b*) $9,063.00 *c*) $11,017.59 *d*) $9,798.27 *e*) Otra

4.3 Tasas equivalentes, efectiva y nominal

Las *tasas efectivas* son indicadores que ayudan a los inversionistas y a los asesores financieros a tomar la mejor decisión para invertir sus capitales.

Es evidente que resulta más rentable invertir un capital con una tasa anual capitalizable por mes, que con la misma tasa capitalizable por semestre. Pero, ¿cuánto es más rentable? o, más precisamente, ¿qué tasa compuesta por mes es igual de productiva que otra que se capitaliza cada semestre?

A continuación se verá cómo contestar a estas y otras cuestiones semejantes.

Definición 4.2

Se dice que dos tasas de interés son ***equivalentes*** si con diferentes periodos de capitalización producen iguales intereses en el mismo plazo.

Ejemplo 1

Tasas equivalentes

¿Cuál es la tasa anual capitalizable por semestre equivalente al 12.96% anual compuesto por mes?

solución

El problema es encontrar la tasa anual i compuesta por semestre, $p = 2$, que genere los mismos intereses en igual plazo que la del 12.96% compuesto por mes, $p = 12$. El procedimiento consiste en encontrar el monto en cada caso, igualarlos y luego despejar i. El monto para un capital arbitrario C en el primer caso es

$$M_1 = C(1 + i/2)^2 \qquad M = C(1 + i/p)^{np} \qquad n = 1, \qquad p = 2$$

Para el segundo, considerando también el plazo de un año, es

$$M_2 = C(1 + 0.1296/12)^{12} \qquad p = 12$$

Al igualar los dos montos se obtiene la ecuación siguiente, que se divide entre C para eliminarla:

$$C(1 + i/2)^2 = C(1 + 0.1296/12)^{12}$$

$$(1 + \mathrm{i}/2)^2 = (1 + 0.0108)^{12}$$

Para despejar la incógnita i, se saca raíz cuadrada, se resta la unidad y se multiplica por 2 a los dos miembros de la ecuación. Antes, se eleva a la potencia 12 el lado derecho de la igualdad.

$$(1 + i/2)^2 = 1.137582229$$

$$1 + i/2 = \sqrt{1.137582229}$$

$$i/2 = 1.066574999 - 1$$

$$i = (0.\ 66574999)2 \qquad \text{o} \qquad i = 0.\ 133149998$$

Esto significa que invertir al 13.3149998% anual compuesto por semestre es igual de productivo que al 12.96% compuesto por mes.

Note que el capital que se invierte es irrelevante y que las tasas son equivalentes con el plazo de un año o cualquier otro.

Ejemplo 2

Toma de decisiones al invertir un capital

Para invertir un capital, el arquitecto Gómez tiene las siguientes opciones:

a) Inversión a plazo fijo con interés del 21.5% capitalizable por semestre.

b) Certificados que abonan el 20.6% capitalizable cada semana.

c) Bonos que le dan a ganar el 20.68% compuesto por mes.

Suponiendo que todas ofrecen la misma liquidez, es decir, que tienen iguales posibilidades de recuperar la inversión, ¿por cuál deberá decidirse?

solución

En virtud de que no importa el capital a invertir para determinar la mejor alternativa, bastará con encontrar la tasa anual en las primeras dos opciones que se capitalice con la frecuencia de la tercera, y que sea equivalente.

Así, la tasa i anual capitalizable por mes, equivalente al 21.5% compuesto por semestre, se obtiene igualando los montos.

$$C(l + i/12)^{12} = C(l + 0.215/2)^2$$

Para despejar, se cancela C, se saca raíz doceava a los dos lados, se resta la unidad y se multiplica por 12, es decir,

$$(1 + i/12)^{12} = (1.1075)^2$$

$$(1 + i/12)^{12} = 1.22655625$$

$$i/12 = \sqrt[12]{1.22655625} - 1$$

$$i/12 = 1.01716316 - 1$$

$$i = 0.01716316(12)$$

$$i = 0.20595792 \qquad \text{o} \qquad 20.5958\%$$

En la segunda opción, $p = 52$ porque los intereses se capitalizan cada semana y la tasa equivalente compuesta por mes es i tal que:

$$C(1 + i/12)^{12} = C(1 + 0.206/52)^{52}$$
$$(1 + i/12)^{12} = (1.003961538)^{52}$$
$$(1 + i/12)^{12} = 1.228253218$$
$$i / 12 = \sqrt[12]{1.228253218} - 1$$
$$i/12 = 0.017280358$$
$$i = (0.017280358)(12)$$
$$i = 0.207364296 \quad \text{o} \quad 20.736\%$$

En consecuencia, la opción que más le conviene al inversionista es la segunda, porque el 20.736% es mayor que el 20.5958% de la primera y que el 20.68% de la tercera.

En este caso, se encontraron las tres tasas anuales compuestas por mes para hacer la comparación, pero podrían haberse encontrado con cualquier otra frecuencia, ya sea semestral, semanal o con capitalización anual. En este caso, cuando los intereses se capitalizan cada año, la tasa se denomina *efectiva* y se define como:

Definición 4.3

La tasa anual e compuesta convertible una vez en el año, $p = 1$, equivalente a la ***tasa nominal*** i capitalizable en p periodos por año, se denomina ***tasa efectiva***.

Es posible obtener una fórmula que relacione tasas efectivas con tasas nominales, procediendo como en los ejemplos anteriores, es decir,

Con tasa efectiva, al término de un año el monto es

$$M_1 = C(1 + e)^1 \qquad p = 1, \;\; n = 1$$

Con tasa i anual capitalizable y p periodos por año, el monto acumulado en el año es

$$M_2 = C(1 + i/p)^p$$

Se igualan los montos, se divide entre el capital C y se resta la unidad a los dos miembros de la ecuación:

$$C(1 + e) = C(1 + i/p)^p$$
$$1 + e = (1 + i/p)^p$$
$$e = (1 + i/p)^p - 1$$

que se formula en el siguiente teorema:

Teorema 4.2

La tasa ***efectiva e***, equivalente a una **tasa *nominal i***, capitalizable en p periodos por año, está dada por

$$e = (1 + i/p)^p - 1$$

Ejemplo 3

Tasa efectiva equivalente a tasa nominal

¿Cuál es la tasa efectiva equivalente al 11.8% anual compuesto por trimestre?

solución

En el teorema 4.2 se reemplazan:

i por 0.118, la tasa capitalizable por trimestre y p por 4, el número de trimestres por año

$$e = (1 + 0.118/4)^4 - 1$$
$$e = 1.123324947 - 1 \quad \text{o} \quad e = 0.123324947$$

Quiere decir que una inversión al 11.8% anual compuesto por trimestre es tan productiva como el 12.3325% capitalizable por año.

Ejemplo 4

Tasa más productiva para una institución bancaria

¿Qué conviene más a los propósitos de una institución bancaria: prestar su dinero con intereses del 12.48% anual compuesto por semana, o prestarlo con el 12.85% capitalizable por semestre?

solución

Para comparar las opciones, se obtiene la tasa i compuesta por semestre, equivalente al 12.48% capitalizable por semana de la primera opción, y se igualan los montos considerando $C = 1$, el capital.

$$(1 + i/2)^2 = (1 + 0.1248/52)^{52}$$
$$(1 + i/2)^2 = (1.0024)^{52}$$
$$(1 + i/2)^2 = 1.132752463$$
$$1 + i/2 = \sqrt{1.132752463}$$
$$1 + i/2 = 1.064308444$$

de donde

$$i = (1.064308444 - 1)2$$
$$i = 0.128616888 \quad \text{o} \quad 12.8616888\%$$

que es mayor al 12.85% de la segunda opción y por eso es más conveniente para el banco.

Ejemplo 5

Monto en inversión con tasa efectiva

Obtenga el monto acumulado al 5 de agosto, si el 19 de marzo anterior se invierten \$25,350 a una tasa de interés del 20% efectivo.

solución

En virtud de que el plazo está en días (139), es conveniente encontrar la tasa de interés capitalizable por día equivalente al 20% efectivo. Para esto se utiliza la ecuación 4.2

$$0.20 = (1 + i/360)^{360} - 1 \qquad e = (1 + i/p)^{p} - 1$$

$$1.20 = (1 + i/360)^{360} \qquad \text{e/ } -1 \text{ pasa sumando}$$

$$\sqrt[360]{1.20} = 1 + i/360 \qquad \text{raíz } 360^{\text{a}} \text{ a los 2 lados}$$

$$1.000506577 = 1 + i/360$$

$$(1.000506577 - 1)360 = i \qquad \text{se resta el 1 y se multiplica por 360}$$

$$0.18236772 = i \quad \text{o} \quad 18.236772\% \text{ anual capitalizable por día.}$$

El monto acumulado es, por lo tanto,

$$M = 25{,}350(1.000506577)^{139} \qquad 1 + i/p = 1.000506577$$

$$M = 25{,}350(1.\ 07293338)$$

$$M = \$27{,}198.86$$

Solución alterna

Si una tasa de interés es capitalizable cada mes, como en el caso supuesto de inversiones a plazo fijo al comienzo de este capítulo, entonces habrá que esperar a que transcurran meses completos para hacer efectivos los intereses. También es cierto que la fórmula del interés compuesto se dedujo considerando periodos completos de capitalización de intereses; pero, esto no es obstáculo para emplearse cuando los periodos no son completos y sólo interesa el resultado numérico.

Por ejemplo, en este ejercicio el plazo en años es 139/360 = 0.3861 y con la tasa del 20% efectiva compuesta por año, el monto será

$$M = 25{,}350(1.20)^{139/360}$$

$$M = 25{,}350(1.072933385) \quad \text{o} \quad M = \$27{,}198.86, \text{ que es igual al anterior.}$$

Ejercicios 4.3

1. Explique los conceptos de *tasas equivalentes, tasa efectiva* y *tasa nominal.*
2. ¿Cuál es la tasa nominal mensual equivalente al 15% compuesto por trimestre?
3. ¿Qué es más productivo: una inversión al 17% de interés capitalizable por quincena o al 17.4% compuesto por cuatrimestre?
4. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva que corresponde a un 14.56% nominal semanal?
5. Luis invierte su dinero al 18% de interés compuesto por día, y su hermana invierte el suyo al 18.02% compuesto por año. ¿Quién obtiene mayores ganancias?
6. Adriana consigue un préstamo con un interés del 21% nominal mensual. En otra institución se lo ofrecen con el 22% de interés nominal semestral y el banco se lo concede al 23.1% de interés efectivo. ¿Cuál opción le conviene más?
7. Para sus gastos de graduación dentro de 9 meses, un estudiante cuenta ahora con $20,000 que puede invertir al 15.5% nominal trimestral o al 15.32% capitalizable por mes. ¿Qué le conviene más?
8. Con tasas equivalentes de interés, decida cuál opción genera más intereses:

   a) Un tipo de interés del 22% anual compuesto por bimestre o el 21.8% nominal quincenal.

   b) El 13% de interés compuesto por día o el 13.15% nominal mensual.

   c) El 18% de interés efectivo o el 17.2% nominal mensual.
9. Obtenga el valor del anticipo y tres abonos mensuales iguales al anticipo que amortizan un crédito automotriz. Suponga que el precio del automóvil es $198,000 y los intereses son:

   a) El 11.4% de interés anual compuesto por mes.

   b) El 16% de interés efectivo.

   c) El 14.2% de interés nominal bimestral.
10. Se compra un equipo de cómputo con un anticipo y dos abonos a 30 y 60 días, con un interés del 15.8% nominal semestral. ¿De cuánto es cada pago? Suponga que el precio del equipo es de $18,000 y que:

    a) Los tres pagos son iguales.

    b) El anticipo es un 20% mayor que cada pago mensual y los dos son iguales.

    c) Cada pago es 25% mayor que el anterior.
11. ¿Cuál es el valor de un crédito tres meses antes de la fecha de vencimiento, si el documento correspondiente es de $45,000 incluidos los intereses y el tipo de interés es del

    a) 18% efectivo.

    b) 14.8% nominal semanal.

    c) 15.6% nominal mensual.

12. ¿De cuánto fue el anticipo suponiendo que fue del 35% del precio de una camioneta, y que el resto se paga con dos abonos adicionales de $75,000 cada uno a 30 y 60 días, con un interés del 11.6% nominal semestral?

13. El 5 de abril se compró una flotilla de motocicletas con un anticipo del 40% y 3 abonos, a 30, 60 y 90 días, de $25,000 cada uno.

a) ¿Cuánto se pagó por concepto de intereses?

b) ¿Cuál es el precio de las motocicletas? Suponga que el interés es del 16% efectivo.

14. ¿Cuánto deberá invertirse ahora para tener $30,000 en 16 meses, ganando intereses del

a) 16.4% nominal mensual.

b) 15% efectivo.

c) 17% nominal semestral.

15. El asesor Sánchez abre una cuenta de ahorros con $7,500 y luego hace tres depósitos de $5,000, $8,000 y $10,000, respectivamente a 1, 2 y 3 meses de la apertura. ¿Cuánto tendrá en su cuenta 7 meses después del último depósito, si devenga intereses del

a) 21% efectivo.

b) 13.65% nominal quincenal.

16. ¿Cuánto se tendrá el 10 de agosto en una cuenta bancaria, si el 3 de febrero anterior se depositaron $25,000 ganando intereses del

a) 18.2% nominal semanal.

b) 19% efectivo.

c) 18 % nominal diario.

17. ¿En cuántos días un capital que se invierte al 15.9% de interés efectivo crece un 18%?

18. ¿Qué capital debe depositarse el 15 de noviembre para contar con $10,800 al 5 de enero siguiente si genera intereses del 19.5% nominal mensual?

19. Suponiendo que ambas opciones tienen la misma liquidez, ¿por cuál se decidiría usted?

a) Invertirlo con el 10.40% de interés compuesto cada 28 días; esto es con $p = 13$.

b) Invertir en una cuenta bancaria con el 10.6% de interés efectivo.

c) Prestar el dinero con el 9.9% de interés anual capitalizable por día.

20. El gerente de una compañía sabe que el 15 de julio necesitará $75,000. ¿Cuánto debe depositar en un banco que paga el 14% de interés efectivo el 10 de abril anterior, si el 23 de enero abrió la cuenta con $30,000?

21. Un padre de familia invierte $15,000 el 3 de septiembre para disponer de $17,300 el 23 de junio siguiente. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva?

22. ¿De qué monto se dispondrá el 10 de agosto si el 3 de abril anterior se invierten $7,250 y el 5 de junio $10,300, con intereses del 18% nominal mensual? ¿Cuánto se genera por concepto de intereses?

23. Suponiendo que las siguientes tres opciones tienen la misma factibilidad, ¿por cuál se decidiría usted?

a) Invertir en una cuenta bancaria que paga intereses del 19.81% nominal bimestral.

b) Hacerlo en cuenta de ahorros que abona el 20.03% nominal semestral.

c) Invertir en caja popular con el 19.53% capitalizable cada 28 días (p = 13).

24. Si el precio de contado de un mueble comedor es de $25,200 y se paga con un anticipo del 30% y $18,500 a los cuatro meses de la compra, ¿cuál es la tasa de interés efectiva? ¿Cuál es la tasa nominal semanal? ¿De cuánto es el cargo por intereses?

En los problemas 25 a 40, seleccione la opción correcta justificando su elección.

25. ¿Qué día vence un documento con valor nominal de $31,500, si cubre un crédito del 21 de abril por $29,750 y los intereses son del 13% efectivo?

a) Septiembre 10 *b*) Octubre 15 *c*) Octubre 6 *d*) Agosto *e*) Otra

26. ¿Cuánto se paga por concepto de intereses, si una impresora láser, cuyo precio de contado es de $6,500, se liquida con el 40% de anticipo y un abono a los tres meses. El tipo de interés es del 16% nominal trimestral?

a) $156.00 *b*) $164.00 *c*) $172.00 *d*) $161.00 *e*) Otra

27. Empleando tasas de interés efectivas, determine qué le conviene más al comprador de una camioneta, si le cobran intereses del

a) 20.6% compuesto mensual.

b) 21% capitalizable por trimestre.

c) 21.4% nominal semestral.

d) 20.5% capitalizable por día.

28. ¿Cuál es la tasa nominal quincenal, si un camión colector de basura con precio de $1′500,000 se paga con $1′650,00 el 21 de octubre? Suponga que se compró el 10 de marzo del mismo año.

a) 15.298% *b*) 16.032% *c*) 15.632% *d*) 16.105% *e*) Otra

29. En el problema 28, ¿cuánto se pagará el 29 de diciembre, si el 21 de octubre sólo se abonaron $750.000?

a) $926,693.85 *b*) $915,728.30 *c*) $905,298.73 *d*) $948,393.05 *e*) Otra

30. ¿Por qué cantidad fue un préstamo que se logró el 8 de octubre, si se firmó un documento con valor nominal de $42,680 con vencimiento al 8 de febrero siguiente y con intereses del 12.48% nominal mensual?

a) $38,429.62 *b*) $40,601.72 *c*) $39,963.43 *d*) $40,949.73 *e*) Otra

31. Para ampliar su lavandería, el señor Aguilera consigue un crédito por $78,000 y firma dos documentos: el primero por $43,000 con plazo de 5 meses y otro con plazo de 7 meses. ¿Por qué cantidad es el segundo considerando intereses del 9.69% nominal diario?

a) $39,603.27 *b*) $40,072.65 *c*) $37,903.13 *d*) $38,835.32 *e*) Otra

32. Por un crédito de \$28,950, el 4 de mayo se firma un documento con valor nominal de \$30,225. ¿Cuál es el plazo en días si se cargan intereses del 10.6% nominal diario?

a) 149 *b*) 141 *c*) 146 *d*) 153 *e*) Otra

33. La joyería La Medalla consigue un crédito con el fabricante el día 15 de diciembre, con intereses del 13.5% nominal diario. La Medalla se compromete a liquidarlo con 2 pagos: el primero por \$32,250 el día 5 de marzo, y el segundo por \$45,000 el 22 de junio siguiente. ¿Por qué cantidad fue el crédito?

a) \$72,843.52 *b*) \$73,218.63 *c*) \$72,998.05 *d*) \$74,041.36 *e*) Otra

34. En el problema 33, ¿cuánto dinero le costó a la joyería no pagar al contado?

a) \$4,406.48 *b*) \$4,031.37 *c*) \$4,251.95 *d*) \$3,208.64 *e*) Otra

35. ¿De que cantidad serán los 2 pagos del problema 33 si son iguales?

a) \$37,968.41 *b*) \$38,092.63 *c*) \$38,724.33 *d*) \$38,494.77 *e*) Otra

36. Jorge Eduardo compra una motocicleta con un anticipo del 30% y dos pagos a 3 y 6 meses de la compra por \$12,500 y \$15,200, respectivamente. ¿Cuál es el precio si le cargan intereses del 14.5% efectivo?

a) \$37,555.61 *b*) \$36,841.03 *c*) \$38,793.51 *d*) \$35,054.03 *e*) Otra

37. ¿Cuál es la tasa global total en el problema 36?

a) 5.3675% *b*) 5.0241% *c*) 5.6132% *d*) 6.0021% *e*) Otra

38. ¿Cuánto se acumula al 10 de junio, si el 3 de febrero se depositan \$13,250 en una cuenta que bonifica el 13.8% nominal bimestral?

a) \$13,728.41 *b*) \$13,695.03 *c*) \$13,903.34 *d*) \$14,008.35 *e*) Otra

39. ¿Cuál es la tasa de interés nominal trimestral equivalente al 13.5% capitalizable por semana?

a) 13.6123% *b*) 13.7524% *c*) 13.7123% *d*) 13.9873% *e*) Otra

40. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva equivalente al 20.25% nominal diario?

a) 22.4390% *b*) 21.0051% *c*) 20.9983% *d*) 21.8085% *e*) Otra

4.4 Regla comercial y descuento compuesto

Consideremos el siguiente cuestionamiento. ¿En cuánto tiempo se acumulan \$120,000, si ahora se invierten \$107,800 al 15% nominal mensual? Con la fórmula del interés compuesto se obtiene el plazo:

$$120{,}000 = 107{,}800(1 + 0.15/12)^x \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$120{,}000/107{,}800 = (1.0125)^x \quad \text{o} \quad (1.0125)^x = 1.113172542$$

de donde $x = Ln(1.11317254)/Ln(1.0125)$ o $x = 8.630622812$

Este resultado de 8 meses y casi 19 días es teórico, porque en la práctica, en la vida real, los intereses de cualquier periodo se hacen efectivos hasta que éste termina, y si por alguna razón el inversionista necesita su dinero antes de que concluya el periodo, y dependiendo de las condiciones contractuales, puede ser que tenga que esperarse hasta la fecha de vencimiento, para que le den su inversión sin contar los intereses de la fracción del periodo o, en el mejor de los casos, que le entreguen la parte proporcional de tales intereses.

Por ejemplo, el monto acumulado durante los 8 meses en las condiciones supuestas es

$$M = 107{,}800(1 + 0.15/12)^8 \quad \text{o} \quad M = \$119{,}063.60$$

y la diferencia con los pretendidos $120,000 sería la parte proporcional que corresponde a los cerca de 19 días después del octavo mes. Esta diferencia es

$$120{,}000 - 119{,}063.60 = \$963.40$$

Pero también es una práctica común la que algunos llaman *regla comercial*, la cual consiste en calcular el monto que se acumula durante los periodos de capitalización completos, utilizando la fórmula del interés compuesto, para luego sumarlo con los intereses acumulados durante el periodo incompleto, pero considerando interés simple.

Antes de comenzar con los ejemplos, cabe señalar que se procede de manera semejante cuando se trata de evaluar el capital al iniciar el plazo.

Ejemplo 1

Utilizando la regla comercial, determinar cuánto se acumula al 23 de octubre, si el 10 de marzo del año anterior se depositan $85,000 en una cuenta que bonifica el 17.7% de interés anual capitalizable por cuatrimestre.

solución

Del 10 de marzo al 10 de julio del año siguiente se comprenden 4 cuatrimestres, y de esta fecha al 23 de octubre se tienen 105 días naturales.

El monto acumulado durante el primer lapso, puesto que

$C = 85{,}000$, el capital inicial

$i = 0.177$, la tasa capitalizable por cuatrimestre

$p = 3$, los tres cuatrimestres que tiene el año

$np = 4$, el número de cuatrimestres completos, es

$$M_1 = 85{,}000(1 + 0.177/3)^4 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M_1 = 85{,}000(1.257719633) \quad \text{o} \quad M_1 = \$106{,}906.17$$

El valor futuro de este monto 105 días después, es decir, el 23 de octubre, considerando interés simple es

$$M = 106{,}906.17[1 + 105(0.177/360)] \qquad M = C(1 + ni)$$

$$M = 106{,}906.17(1.051625)$$

o $$M = \$112{,}425.20$$

Sólo para efectos de comparación, note usted que el monto que se acumula con interés compuesto desde el 10 de marzo, fecha de la inversión, hasta el 23 de octubre del año siguiente, con un plazo fraccionario y considerando que un cuatrimestre tiene 121 días, es

$$np = 4 + 105/121 \quad \text{o} \quad np = 4.867768595 \text{ cuatrimestres es}$$

$$M = 85{,}000(1.059)^{4.867768595}$$

$$M = 85{,}000(1.321867037) \quad \text{o} \quad M = \$112{,}358.70$$

Ejemplo 2

¿Por qué cantidad se concedió un crédito en mercancía si se ampara con un documento con valor nominal de $50,200, que incluye intereses del 16.8% nominal trimestral y vence en 35 semanas? Utilizar la regla comercial.

solución

En 35 semanas quedan comprendidos 2 trimestres de 13 semanas cada uno y 9 semanas adicionales para un periodo incompleto.

El valor presente de los $50,200, 2 trimestres antes es

$$C = 50{,}200(1 + 0.168/4)^{-2} \qquad C = M(1 + i/p)^{-2}$$

$$C_1 = 50{,}200(0.921010459) \quad \text{o} \quad C_1 = \$46{,}234.72504$$

y 9 semanas antes, con interés simple, esto nos da

$$C = 46{,}234.72504[1 + (9/52)(0.168)]^{-1} \qquad C = M(1 + ni)^{-1}$$

$$C = 46{,}234.72504(0.971744656)$$

$$C = 44{,}928.34696 \quad \text{o} \quad C = \$44{,}928.35 \text{ redondeando}$$

Ejemplo 3

¿Cuánto dinero puede retirar Laura el 23 de diciembre, si el 8 de enero anterior depositó $68,500 en un banco que bonifica el 9.6% anual capitalizable por bimestre? Utilizar la regla comercial y comparar resultados considerando interés compuesto para el plazo completo.

solución

a) Con la ayuda de un diagrama de tiempo, se aprecia que desde el 8 de enero al 8 de noviembre se cumplen 5 bimestres, y desde esta fecha hasta el 23 de diciembre se tienen 45 días. Los valores que se tienen para reemplazar en la fórmula del interés compuesto son

$C = 68{,}500$, el capital que se invierte

$p = 6$, la frecuencia de conversión, 6 bimestres cada año

$np = 5$, el plazo en bimestres, los que son completos

$i = 0.096$, la tasa de interés nominal bimestral

entonces

$$M = 68{,}500(1 + 0.096/6)^5 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M = 68{,}500(1.082601289) \quad \text{o} \quad M = \$74{,}158.1883$$

y para el periodo incompleto se tiene

$C = 74{,}158.1883$, el capital

$n = 45$, el plazo en días

$i = 0.096/360$ o $i = 0.000266667$, la tasa de interés simple por día

El monto al 23 de diciembre es, entonces,

$$M = 74{,}158.1883[1 + 45(0.000266667)] \qquad M = C(1 + ni)$$

$$M = 74{,}158.1883(1.012) \quad \text{o} \quad M = \$75{,}048.09$$

b) Considerando que en un bimestre caben 60 días, el plazo para el monto compuesto en bimestres es

$$5 + 45/60 = 5.75$$

y el monto es, en este caso,

$$M = 68{,}500(1 + 0.096/6)^{5.75}$$

$$M = 68{,}500(1.095566693) \quad \text{o} \quad M = \$75{,}046.32$$

Esto significa que lo más que Laura podría retirar el 23 de diciembre es este monto.

Ejemplo 4

Se compra maquinaria agrícola con un anticipo del 40% y dos abonos a 10 meses el primero, y 20 meses con 10 días el segundo, con cargos o intereses del 3.06% trimestral capitalizable por trimestre. Considerando que el último pago fue la cantidad de \$1.15 millones que corresponden al 35% del precio, usando la regla comercial, determinar:

a) El precio de contado de la maquinaria.

b) El anticipo y el primer abono.

c) Los intereses de la operación crediticia.

solución

a) En el plazo de 20 meses y 10 días del segundo abono, quedan comprendidos 6 trimestres y 70 días, el valor presente de los \$1.15 millones, 6 trimestres antes de que se realice, es

$$C_1 = 1.15(1 + 0.0306)^{-6} \qquad M = C(1 + i/p)^{-np}$$
$$C_1 = 1.15(0.834563086) \quad \text{o} \quad C_1 = 0.959747549 \text{ millones}$$

y 70 días antes, considerando interés simple diario del 0.034% porque 0.0306/90 = 0.00034, este capital se convierte en

$$C = 0.959747549\,[1 + 70(0.00034)]^{-1} \qquad C = M(1 + ni)^{-1}$$
$$C = 0.959747549(1.0238)^{-1} \quad \text{o} \quad C = 0.937436559$$

Puesto que el último pago corresponde al 35% de la maquinaria, se cumple que

$$(0.35)\text{precio} = 0.937436559$$

de donde precio = 0.937436559/0.35

= 2.678390168 millones o \$2′678,390.17

b) El anticipo es del 40% de este precio:

$$A = 0.40(2'678{,}390.17)$$
$$A = \$1'071{,}356.07$$

y el valor presente del primer abono es igual al 25% restante del precio, es decir,

$$C_2 = 0.25(2'678{,}390.17)$$

o $C_2 = \$669{,}597.54$

El plazo de este primer abono es de 10 meses, es decir, tres trimestres y un mes adicional. A los 3 trimestres, el valor futuro de C_2 es

$$M_1 = 669{,}597.54(1 + 0.0306)^3 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$M_1 = 669{,}597.54(1.094637733)$$

o $M_1 = \$732{,}966.74$ redondeando

y un mes después, con interés simple, este monto se convierte en

$$M = 732{,}966.74[1 + (0.0306/3)] \qquad M = C(1 + ni)$$
$$M = 732{,}966.74(1.0102)$$
$$M = 740{,}442.996 \quad \text{o} \quad \$740{,}443.00$$

c) El cargo total por concepto de intereses en dinero es el siguiente, el cual se obtiene restando del total pagado, el precio de la maquinaria, $I = M - C$, es decir,

$$I = (1'071{,}356.07 + 740{,}443 + 1'150{,}000) - 2'678{,}390.17$$

o $I = \$283{,}408.70$

Descuento compuesto

En la sección 4 del capítulo 3 se estudiaron dos maneras de descontar un documento antes de su vencimiento, con descuento real y con descuento comercial. Ahora veremos otra forma de descontar documentos con descuento compuesto en que, como en el descuento real, se aplica la fórmula del interés compuesto $M = C(1 + i/p)^{np}$, de donde $C = M(1 + i/p)^{-np}$ y donde C es el valor descontado del documento, lo que se recibe al negociarlo, M es su valor nominal e i es la tasa de descuento. Buscando congruencia con la nomenclatura anterior, esta fórmula quedaría como

$$P = M(1 + d/p)^{-np}$$

Ejemplo 5

¿En cuánto se descuenta un documento con valor nominal de $20,250 el 10 de abril, si vence el 10 de octubre y se descuenta el 13.5% nominal mensual?

solución

Los valores a sustituir en la fórmula correspondiente son

$M = 20{,}250$, el valor del documento al vencer

$d = 0.135$, la tasa de descuento nominal mensual

$p = 12$, la frecuencia del descuento compuesto

$n = 6/12$ o $n = 0.5$, el plazo en años

$np = 6$, el número de periodos mensuales

Entonces, el valor descontado es:

$$P = 20{,}250(1 + 0.135/12)^{-6} \qquad P = M(1 + d/p)^{-np}$$

$$P = 20{,}250(0.935080052)$$

$$P = 18{,}935.37105 \quad \text{o} \quad \$18{,}935.37$$

Sólo para comparar, note que con descuento comercial el valor descontado es

$$P = 20{,}250[1 - 0.5(0.135)] \qquad P = M(1 - n\mathrm{d})$$

$$P = 20{,}250(0.9325) \quad \text{o} \quad P = \$18{,}883.12$$

Ejemplo 6

El 21 de julio se transfiere, es decir, se comercializa, un pagaré en $55,770.00 con descuento compuesto del 11% nominal diario. ¿Por qué cantidad fue el crédito que originó el documento, si se cargan intereses del 10% simple anual? Suponga que la firma se realizó el 5 de marzo con plazo hasta el 10 de diciembre.

solución

Del 21 de junio al 10 de diciembre se comprenden 172 días y, entonces, el valor nominal del documento es M de la igualdad:

$$55{,}770 = M(1 + 0.11/360)^{-172} \qquad P = M(1 + d/p)^{-np}$$

$$55{,}770 = M(0.948809153)$$

de donde $M = 55{,}770/0.948809153$ o $M = \$58{,}778.94$

Éste es el valor futuro del crédito C y puesto que el plazo entre el 5 de marzo y el 10 de diciembre es de 280 días, se tiene:

$$58{,}778.94 = C[1 + 280(0.10/360)] \quad M = C(1 + ni)$$

$$58{,}778.94 = C(1.077777778)$$

de donde $C = 58{,}778.94/1.077777778$

$C = 54{,}537.16448$ o $C = \$54{,}537.16$ redondeando.

Ejercicios 4.4

1. ¿Cuál es la característica esencial de la *regla comercial* para el interés compuesto?
2. ¿Cuál es la diferencia entre *descuento real*, *descuento compuesto* y *descuento comercial*?
3. ¿El valor comercial de un documento con descuento compuesto es menor que con descuento comercial, con iguales tasas, valor nominal y plazo?
4. ¿Cómo se evalúa el monto acumulado con la regla comercial al invertir un capital?
5. ¿Cómo se obtiene el valor presente de un monto (un crédito), con la regla comercial en el interés compuesto?

En los problemas del 6 a 17, utilice la regla comercial. En todos ayúdese con un diagrama de tiempo.

6. ¿Cuánto se acumula el 30 de junio, si el 5 de marzo del año anterior se depositaron $35,000 en una cuenta que abona el 11.3% de interés nominal bimestral?
7. Un préstamo de $120,000 se liquida con un pago a los 9 meses por $75,000 y otro, 7 meses y 10 días después del primero. ¿Por cuánto es este pago si se tienen intereses del 16.8% anual capitalizable por trimestre?

8. Diego compra un automóvil el 15 de diciembre con un anticipo del 35% y 3 abonos de $35,000 cada uno, que realiza el 7 de abril, el 3 de mayo y el 15 de julio del año siguiente. ¿Cuál fue el precio de contado del automóvil, considerando intereses del 18.72% anual capitalizable por mes? ¿Cuánto pagó por intereses?

9. En el problema 8, ¿cuánto dinero desembolsaría Diego para liquidar su deuda el 7 de abril?

10. El 3 de noviembre Juan consigue un crédito para adquirir su vivienda; pero necesita $37,850 para completar el precio. ¿Cuánto debió depositar el 15 de junio anterior con ese propósito, si el banco le paga el 9.2% de interés nominal mensual, considerando que 90 días antes había hecho otro depósito por $15,000 en la misma cuenta?

11. Para su fiesta de 15 años, el padre de Jacqueline depositó $18,350 en una cuenta que genera intereses del 13.2% mensual. ¿Con cuánto dinero contará en el cumpleaños, si el depósito lo hizo 75 días antes?

12. Un desempleado invirtió el 45% de su indemnización en una cuenta bancaria, la cual le da a ganar el 15.6% de interés anual capitalizable por bimestre, y el resto lo gastó en un puesto para vender comida rápida. ¿Con cuánto lo indemnizaron, si ahora, 15 meses y 20 días después, tiene $53,250 en su cuenta?

13. ¿En cuánto tiempo un capital al 18.3% anual capitalizable por trimestre crece un 35%?

14. ¿Cuánto se depositó el 10 de septiembre anterior si el 26 de abril se tienen $15,350 en una cuenta que paga intereses del 13.4% anual convertibles por mes?

15. El gobierno estatal consigue un préstamo por 950 mil dólares, con intereses del 4.2% efectivo y lo liquidará con un pago a los 16 meses por medio millón de dólares, y otro a los 13 meses del primero. ¿De qué cantidad es este segundo abono?

16. Resuelva los problemas 7, 10, 13 y 15, considerando interés compuesto durante el plazo, es decir, con periodos completos y uno fraccionario.

17. En los problemas 6, 10, 13 y 15 evalúe los intereses que se devengan.

En los problemas 18 a 23 utilice descuento compuesto.

18. ¿En cuánto se negocia el 20 de mayo un documento que vence el 5 de agosto, y su valor nominal es de $16,270? Considere descuento del 10.8% nominal diario.

19. ¿Cuál es el valor nominal de un documento que 4 meses antes se negocia en $11,350, con descuento del 11.4% nominal mensual?

20. Se consigue un préstamo por $37,400 y 7 meses de plazo firmando un documento con intereses del 12.6% simple anual. ¿En cuánto se negocia 3 meses antes de vencer, si se descuenta con el 13% nominal mensual?

21. ¿Por cuánto dinero se otorgó un préstamo si el documento correspondiente se transfiere en $21,920 el 3 de junio? Suponga descuento compuesto por día del 10.8% anual, intereses del 12.3% simple anual y que el documento se endosó el 25 de febrero con vencimiento al 15 de noviembre.

22. ¿Con qué tasa de interés compuesto por trimestre se otorgó un crédito por $65,000 y plazo de 1.5 años, si el documento correspondiente se negocia 7 meses antes de su vencimiento en $66,038.00 con descuento del 14% nominal mensual?

23. En el problema 22, ¿cuánto dinero ganó el prestamista?

Justificando su respuesta, en los problemas del 24 al 48 seleccione la opción correcta. Utilice la regla comercial para el interés compuesto y descuento compuesto en los problemas de descuento.

24. El 30 de abril se depositaron $43,000 con interés del 11.2% anual capitalizable cada bimestre. ¿Cuánto puede retirarse el 16 de diciembre, si el 30 de octubre se dispuso de $18,000 de la misma cuenta?

a) $28,706.72 *b*) $31,204.23 *c*) $29,245.61 *d*) $28,069.73 *e*) Otra

25. El 5 de enero la profesora Verónica consigue un préstamo por $24,800, pagadero el 21 de junio siguiente. ¿Con cuánto cancela su deuda considerando intereses del 15% nominal mensual?

a) $27,201.42 *b*) $25,963.92 *c*) $26,565.17 *d*) $26,963.41 *e*) Otra

26. ¿Cuál es el valor nominal de un documento que 7 meses antes de su vencimiento se negocia en $15,650, con descuento del 11% compuesto por trimestre?

a) $16,672.67 *b*) $16,323.13 *c*) $17,004.05 *d*) $16,963.42 *e*) Otra

27. ¿Qué día se compró una pantalla de plasma de $36,990, cuyo precio se liquidó con un anticipo y un pago de $15,150? Considere que se cargan intereses del 11.4% anual capitalizable por mes y el pago, que se hizo el 21 de junio, corresponde al 40% del precio.

a) Abril 3 *b*) Abril 7 *c*) Mayo 2 *d*) Marzo 30 *e*) Otra

28. Claudia invierte su aguinaldo de $23,300 ganando intereses del 10.3% nominal bimestral ¿De cuánto puede disponer el 10 de septiembre, considerando que el 19 de diciembre anterior hizo el depósito?

a) $24,998.36 *b*) $25,625.03 *c*) $24,529.08 *d*) $25,091.46 *e*) Otra

29. ¿Cuál es el valor presente de $3,750, suponiendo que vencen al cabo de 9 meses y 19 días, y la tasa de interés es del 6.32% anual convertible cada bimestre?

a) $3,565.40 *b*) $3,493.28 *c*) $3,261.42 *d*) $3,123.98 *e*) Otra

30. ¿Cuánto dinero tendrá Gaby en una cuenta bancaria que le bonifica intereses del 18.7% anual capitalizable por mes, al cabo de un año, 7 meses y 23 días, si ahora tiene $48,360?

a) $58,329.63 *b*) $60,035.29 *c*) $65,650.78 *d*) $63,248.47 *e*) Otra

31. ¿Cuánto tendrá el señor Mendoza después de 15 meses y 21 días en sus 3 inversiones, si ahora tiene $63,200 en la primera, que le reditúa el 13.3% anual capitalizable por bimestre; $78,450 en la segunda que le da 14.8% nominal trimestral; y $112,370 en la tercera que le bonifica el 12.72% capitalizable por día?

a) $295,362.83 *b*) $268,263.04 *c*) $306,334.08 *d*) $310,403.05 *e*) Otra

32. ¿Cuánto gana el señor Mendoza, del problema 31, por concepto de intereses en el plazo dado?

a) $52,314.0818 *b*) $53,198.23 *c*) $60,035.42 *d*) $56,863.05 *e*) Otra

33. ¿Cuál es el valor descontado de un pagaré con valor nominal de $27,860 el 15 de abril, si se vence el 3 de octubre y se descuenta el 15.4% nominal bimestral?

a) $25,675.04 *b*) $26,003.41 *c*) $25,783.04 *d*) $25,931.30 *e*) Otra

34. ¿De cuánto es el descuento compuesto de un documento con valor nominal de $51,500? Considere un plazo de 7 meses y medio, y una tasa de descuento compuesto del 11.68% nominal mensual.

a) $3,510.75 *b*) $3,798.23 *c*) $4,003.25 *d*) $3,608.66 *e*) Otra

35. Una pizzería compra una flotilla de motocicletas con un anticipo de $50,000, un pago a 3 meses y 15 días, y otro por $62,300 a 11 meses de la compra. Considerando intereses del 13.8% capitalizable por bimestre y que el último pago corresponde al 30% del precio de la flotilla, determine el monto del primer pago luego del anticipo.

a) $80,068.91 *b*) $79,983.62 *c*) $80,215.33 *d*) $82,343.35 *e*) Otra

36. ¿Cuánto dinero pagó por concepto de intereses la pizzería del problema 35?

a) $8,729.53 *b*) $9,321.61 *c*) $9,127.87 *d*) $9,395.03 *e*) Otra

37. En el mismo problema 35, ¿de qué tamaño es un pago único a 13 meses de la compra sin haber dado anticipo para cancelar la deuda?

a) $199,428.35 *b*) $203,993.08 *c*) $212,443.01 *d*) $210,873.47 *e*) Otra

38. El ingeniero Carlos Ignacio compra un yate con $295,000 de anticipo y dos abonos iguales: a 8 meses el primero, y a 15 meses y 20 días, desde la compra, el segundo, con cargos o intereses del 13.7% nominal trimestral. Considerando que el crédito corresponde al 70% del precio, ¿cuál es este precio?

a) $983,333.33 *b*) $956,428.04 *c*) $898,836.41 *d*) $929,428.32 *e*) Otra

39. ¿Cuánto se ahorra el ingeniero del problema 38, si lo paga de contado y, además, le hacen un 7% de descuento adicional?

a) $161,428.04 *b*) $143,698.27 *c*) $151,708.92 *d*) $153,953.64 *e*) Otra

40. En el mismo problema 38, ¿de cuánto será el anticipo y los dos abonos considerando que los tres son iguales?

a) $361,047.32 *b*) $392,098.31 *c*) $353,730.32 *d*) $358,283.07 *e*) Otra

41. ¿Cuál es el valor descontado el 7 de noviembre de un documento con valor nominal de $35,200 y vencimiento al 23 de julio siguiente, considerando un descuento del 14% nominal bimestral?

a) $31,017.21 *b*) $29,986.92 *c*) $30,843.32 *d*) $31,900.90 *e*) Otra

42. ¿Cuál es el valor nominal de un pagaré que vence el 23 de octubre, si con descuento del 15% nominal bimestral se negocia el 1 de abril en $23,750?

a) $25,213.48 *b*) $25,342.92 *c*) $25,783.43 *d*) $25,808.77 *e*) Otra

43. El 15 de junio el señor Casillas, propietario de una distribuidora de abarrotes, consigue un crédito por $83,275, firmando un documento con vencimiento al 15 de enero siguiente e intereses del 15% efectivo. ¿Cuánto le dan por el pagaré a su acreedor el 5 de noviembre, si le descuentan el 15% nominal mensual?

a) $85,767.03 *b*) $88,093.42 *c*) $87,010.33 *d*) $87,767.41 *e*) Otra

44. El 20 de diciembre, el licenciado Velásquez negocia un documento que le habían firmado por un préstamo de $19,250 el 3 de septiembre, con intereses del 13.4% nominal mensual y vencimiento al 27 de abril del año siguiente. ¿Cuánto le dan por el documento si le descuentan el 14.8% nominal bimestral?

a) $19,760.14 *b*) $20,025.33 *c*) $20,154.83 *d*) $19,973.45 *e*) Otra

45. ¿Qué día vence un documento con valor nominal de $31,500, si cubre un crédito del 21 de abril por $29,750 y los intereses son del 13% efectivo?

a) Noviembre 1° *b*) Octubre 23 *c*) Octubre 9 *d*) Octubre 1° *e*) Otra

46. ¿Cuánto se paga por concepto de intereses, si una impresora láser, cuyo precio de contado es de $6,500, se liquida con el 40% de anticipo y un abono a los tres meses y 11 días? El tipo de interés es del 16% nominal trimestral.

a) $458.36 *b*) $551.31 *c*) $578.71 *d*) $503.91 *e*) Otra

47. Empleando tasas de interés efectivas, determine qué le conviene más al comprador de una camioneta, si le descuentan con el:

a) 20.6% compuesto mensual. *b*) 21 % capitalizable por trimestre.

c) 21.4% nominal semestral. *d*) 20.5% capitalizable por día. *e*) 22.65% efectivo.

48. ¿Cuál es el precio de contado de un camión recolector de basura que se paga con $1′650,000 el 21 de octubre? Suponga que se compró el 10 de marzo del mismo año, y la tasa de interés es del 10.5% nominal mensual?

a) $1′458,698.35 *b*) $1′528,723.05 *c*) $1′498,923.32 *d*) $1′547,419.19 *e*) Otra

4.5 Diagramas de tiempo, fecha focal y ecuaciones de valor

En la sección 2.2 se estudiaron los diagramas de tiempo que constituyen herramientas útiles para plantear y resolver problemas financieros, ya que facilitan los desplazamientos simbólicos de capitales en el tiempo. Estos desplazamientos permiten llevar todas las cantidades de dinero que intervienen en un problema hasta una fecha común, que se conoce como *fecha focal* o *fecha de referencia*.

Con todos los valores en esa fecha focal y separando aquellos que corresponden a las deudas de los que corresponden a los pagos, es decir, agrupando por un lado los del "debe" y por otro los del "haber", se establece una igualdad que se conoce como *ecuación de valores equivalentes* o, simplemente, *ecuación de valor*. Después, esta ecuación se resuelve despejando la incógnita o las incógnitas que en ella aparezcan para lograr así la solución del problema.

Esta solución varía un poco de acuerdo con la localización de la fecha focal tratándose de interés simple; pero cuando el interés es compuesto, la solución es la misma para cualquier ubicación de la fecha focal.

Cabe señalar también que las cantidades de dinero pueden estar antes o después de la fecha de referencia. Si la cantidad de dinero *A*, está antes de esa fecha, se suman los intereses hallando su valor futuro equivalente en la fecha focal; pero si está después, entonces se restarán los intereses obteniendo su valor presente equivalente en la misma fecha focal.

En la figura 4.1 se ilustran las dos posibilidades, donde M_A es el monto de *A* y C_B es el valor presente de *B*.

En ambos casos, el traslado se realiza con la fórmula del interés compuesto, o del interés simple si así lo estipula el problema.

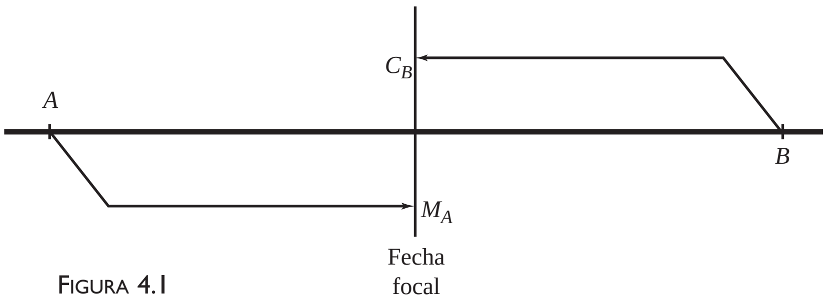


FIGURA 4.1

Ejemplo 1

Liquidación de créditos con pagos diferidos

El día de hoy se cumplen 5 meses de que un comerciante en alimentos consiguió un crédito de $30,000 firmando un documento a 7 meses de plazo. Hace tres meses le concedieron otro y firmó un documento con valor nominal de $54,000, valor que incluye los intereses de los 6 meses del plazo. Hoy abona $60,000 a sus deudas, y acuerda con su acreedor liquidar el resto a los 4 meses, contados a partir de ahora. ¿Por qué cantidad es este pago, si se tienen cargos o intereses del 11.76% nominal mensual?

solución

El diagrama de la figura 4.2 ilustra la situación, donde cada subdivisión de la recta representa un periodo mensual.

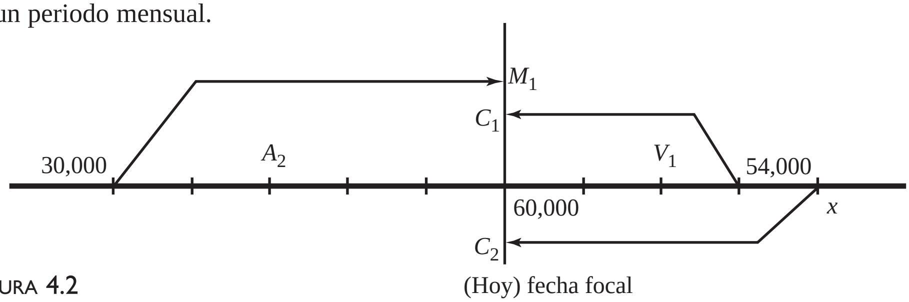


FIGURA 4.2

Como se aprecia en la figura habrá que trasladar las tres cantidades hasta la fecha focal, la cual se fijó arbitrariamente en el día de hoy.

Los primeros \$30,000 se ubican cinco meses antes del día de hoy, cuando se hizo el primer préstamo. Para llevarlos hasta la fecha focal habrá que sumar los intereses de 5 meses y obtener así el equivalente en esa fecha. Puesto que los \$54,000 ya incluyen intereses y son el valor nominal del pagaré correspondiente, se ponen en la fecha de su vencimiento, es decir, 3 meses después del día de hoy. Para trasladarlos hasta la fecha focal, se les restan los intereses de los mismos 3 meses. Los dos valores constituyen el "debe" y se anotan en la parte superior de la gráfica. El "haber" está formando por los dos pagos, los primeros \$60,000 que no se desplazan porque están en la fecha focal y el pago x que se hace 4 meses después, por eso se le restan los intereses de 4 meses.

Es evidente que los dos totales, las deudas D y los pagos P, son iguales porque ambos están en la misma fecha. Con esto se obtiene la ecuación de valores equivalentes $P = D$.

El valor futuro de los \$30,000 con intereses de 5 meses es

$$M_1 = 30{,}000(1 + 0.1176/12)^5 \quad \text{ya que} \quad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$M_1 = 30{,}000(1.0098)^5$$
$$M_1 = 30{,}000(1.049969858) \quad \text{o} \quad M_1 = \$31{,}499.09574$$

Para el valor presente de los \$54,000, se restarán los intereses de 3 meses también con la fórmula del interés compuesto:

$$54{,}000 = C_1(1.0098)^3$$
$$54{,}000 = C_1(1.029689061)$$

de donde $C_1 = 54{,}000/1.029689061$ o $C_1 = \$52{,}443.01611$

El equivalente a los dos préstamos en la fecha local, redondeando, es entonces:

$$D = M_1 + C_1$$
$$D = 31{,}499.10 + 52{,}443.02 \quad \text{o} \quad D = \$83{,}942.12$$

Observe que una interpretación real de este resultado es que con esto se liquidarían las deudas el día de hoy.

También se necesita quitar intereses de 4 meses a lo que será el segundo abono x, al hacerlo quedará C_2 de la siguiente igualdad:

$$x = C_2(1.0098)^4 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

de donde $C_2 = x/1.039780014$

o $C_2 = (0.961741894)x$ porque $a/b = a(1/b)$

Consecuentemente la suma de este resultado y el pago que se efectúa el día de hoy es igual al equivalente de los 2 pagos en la fecha focal; esto es,

$$P = 60{,}000 + C_2$$
$$P = 60{,}000 + (0.961741894)x$$

Note usted que el coeficiente de x, 0.961741894, en esta ecuación, significa que al adelantar 4 meses el pago, éste se reduce cerca del 4%, es decir, que si hoy se realizara dicho abono, se pagará sólo el 96.17% aproximadamente, de lo que se paga 4 meses después.

La ecuación de valores equivalentes es, entonces,

$$60{,}000 + (0.961741894)x = 83{,}942.12 \qquad \text{puesto que } P = D$$

de donde, para despejar la incógnita, 60,000 pasa restando y 0.961741894 pasa dividiendo al lado derecho, es decir,

$$x = (83{,}942.12 - 60{,}000)/0.961741894$$
$$x = 24{,}894.52939 \quad \text{o} \quad \$24{,}894.53$$

Solución alterna

Cuando el número de capitales y montos no es tan grande, como en este ejemplo, puede resolverse de manera más breve, encontrando el saldo al día de hoy, luego de hacer el pago de \$60,000 para llevarlo hasta 4 meses después. Dicho saldo es $M_1 + C_1 - 60{,}000$, es decir,

$$83{,}942.12 - 60{,}000 = 23{,}942.11185$$

y su valor futuro cuatro meses después es $M = x$:

$$M = 23{,}942.11(1 + 0.1176/12)^4$$
$$M = 23{,}942.11(1.039780014) \quad \text{o} \quad M = \$24{,}894.53$$

Se deja como un buen ejercicio para el estudiante, corroborar este resultado localizando la fecha local en otro punto, por ejemplo, el día en que se hace el pago x.

Sugerencia

Si bien es cierto que los resultados no dependen de la ubicación de la fecha focal, tratándose del interés compuesto, es recomendable fijarla el día en que se realiza un préstamo o un pago y más aún en la última de las fechas, la cual está a la derecha en el diagrama, para eludir exponentes negativos, ya que de todas las cantidades de dinero se hallaría su valor futuro.

Ejemplo 2

Intereses en crédito con abonos diferidos

Hallar los intereses que se cargan en el ejemplo 1.

solución

En la misma figura 4.2 se anotaron A_2 y V_1 que, respectivamente, están en la fecha en que se consiguió el segundo crédito y en que vence el primero.

Los intereses son la diferencia entre el total que se paga M y el valor presente C de los préstamos, para esto es necesario hallar el capital A_2 del préstamo, cuyo valor futuro 6 meses después es \$54,000.

$$54{,}000 = A_2(1 + 0.1176/12)^6 \quad \text{son 6 meses de plazo}$$

$$54{,}000 = A_2(1.060259563)$$

de donde $A_2 = 54{,}000/1.060259563$ o $A_2 = \$50{,}930.92474$

En consecuencia, el total recibido en préstamo es

$$C = 50{,}930.92 + 30{,}000$$

o $C = 80{,}930.92$

y el total que se paga es:

$$M = 60{,}000 + 24{,}894.53$$

o $M = 84{,}894.53$ y los intereses son entonces

$$I = 84{,}894.53 - 80{,}930.92 \quad \text{o} \quad I = \$3{,}963.61$$

Importante

El segundo pago, *x*, se realiza después de que vencen los dos documentos. En el desarrollo anterior se supuso que la tasa de interés dada 11.76% se mantenía fija, aun después del vencimiento. Sin embargo, en la práctica es posible que esto no se cumpla, es decir, que la tasa cambie, por intereses *moratorios*, lo que obligará a plantear y resolver el ejercicio de forma diferente. Lo mismo se hace cuando los pagos se anticipan.

Ejemplo 3

Compras a crédito, pagos equivalentes e intereses

Con intereses del 16.56% nominal diario, es decir, una tasa del 16.56% anual capitalizable por día, el 21 de abril se otorga un crédito en mercancía por \$63,000, para pagarse el 1 de octubre. El 30 de junio se concede otro por \$46,000, que vence el 15 de diciembre y otro el día 25 de julio por \$76,000, incluidos los intereses, con vencimiento al 3 de septiembre. En un arreglo se acuerda liquidar los compromisos con 2 pagos, uno el 10 de agosto y el otro el 10 de noviembre, de tal manera que el segundo duplica al primero. Determine:

a) ¿Por qué cantidad es cada uno de los dos pagos?

b) ¿Cuánto se paga por intereses?

solución

En la gráfica de la figura 4.3 se anotan las fechas, los plazos y las cantidades: \$63,000 en el 21 de abril, \$46,000 el 30 de junio, y \$76,000 el 3 de septiembre, la fecha de vencimiento, ya que se incluyen intereses. Los dos pagos, denotados por x y $2x$, se anotan, respectivamente, el 10 de agosto y 10 de noviembre. La fecha focal se localiza el 3 de septiembre.

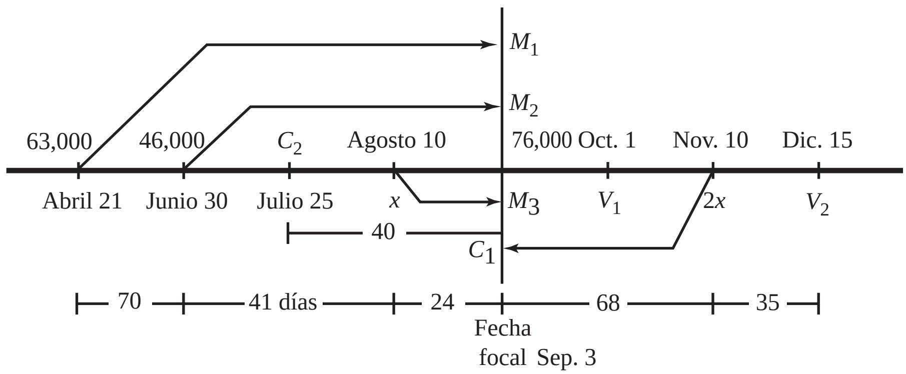


FIGURA 4.3

Todas las cantidades de dinero se trasladan hasta la fecha de referencia con la fórmula del interés compuesto, interés $i = 0.1656$ y los plazos que se indican en la misma figura.

a) El monto acumulado de los primeros \$63,000 es

$$M_1 = 63{,}000(1 + 0.1656/360)^{135} \qquad \text{el plazo es } 70 + 41 + 24 = 135 \text{ días}$$
$$= 63{,}000(1.00046)^{135}$$
$$M_1 = 63{,}000(1.064053553) \qquad \text{o} \qquad M_1 = \$67{,}035.37$$

El plazo para los \$46,000 es de 65 días y el monto es

$$M_2 = 46{,}000(1.00046)^{65}$$
$$M_2 = 46{,}000(1.03034441) \quad \text{o} \quad M_2 = \$47{,}395.84$$

El valor futuro del primer pago x, con 24 días de plazo es:

$$M_3 = x(1.00046)^{24}$$

o

$$M_3 = (1.011098599)x$$

Del segundo pago, $2x$, se restan los intereses, ya que está después de la fecha de referencia. Se utiliza la misma fórmula con un plazo de 68 días.

$$C_1 = 2x(1.00046)^{-68} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$
$$C_1 = 2x(0.969211129) \quad \text{o} \quad C_1 = (1.938422257)x$$

Un miembro de la ecuación de valores, que corresponde a las deudas, es, entonces:

$$D = M_1 + M_2 + 76{,}000 \qquad \text{ya que 76,000 no se trasladan}$$
$$D = 67{,}035.37 + 47{,}395.84 + 76{,}000 \qquad \text{o} \qquad D = \$190{,}431.21$$

y el que corresponde a los pagos es:

$$P = M_3 + C_1$$
$$P = (1.011098599)x + (1.938422257)x$$

o $$P = (2.949520856)x$$

Al igualar queda:

$$(2.949520856)x = 190{,}431.21$$

de donde $$x = 190{,}431.21/2.949520856 \qquad \text{o} \qquad x = \$64{,}563.44$$

El segundo pago es el doble de éste:

$$2x = \$129{,}126.88$$

b) Los intereses serán la diferencia entre el total pagado y el total recibido en los 3 préstamos; esto es, entre el monto M y el capital C, donde

$$M = x + 2x$$
$$M = 64{,}563.44 + 129{,}126.88 \qquad \text{o} \qquad M = \$193{,}690.32$$

El total que se recibió en préstamo es la suma de tres cantidades: \$63,000 del primer crédito, \$46,000 del segundo, y el valor que se recibió el 25 de julio y se pagaría con \$76,000 el 3 de septiembre, incluyendo los intereses. Es necesario, por lo tanto, quitar los intereses a este monto, utilizando la fórmula del interés compuesto y un plazo de 40 días, que son los que hay entre las dos fechas.

$$C_2 = 76{,}000(1.00046)^{-40} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$
$$C_2 = 76{,}000(0.9817724) \qquad \text{o} \qquad C_2 = \$74{,}614.70$$

Quiere decir que el total que se otorgó en préstamo es

$$C = 63{,}000 + 46{,}000 + 74{,}614.70$$
$$C = \$183{,}614.70$$

y los intereses son, entonces,

$$I = 193{,}690.32 - 183{,}614.70 \qquad I = M - C$$

o $$I = \$10{,}075.62$$

Ejemplo 4

Suponiendo que una persona realiza los siguientes depósitos y disposiciones en una cuenta que bonifica el 9.36% nominal diario en los primeros tres meses, y el 10.32% capitalizable por mes, después, obtenga el monto en su cuenta el día 20 de diciembre luego de su disposición, considerando que cuando hizo su primer retiro tenía \$47,925.00.

Fecha	Depósito	Disposiciones
Agosto 1	--------	19,728.00
Agosto 16	10,500.00	---------
Septiembre 9	--------	5,728.00
Septiembre 22	--------	10,402.00
Octubre 2	18,300.00	---------
Noviembre 1	--------	13,250.00
Noviembre 15	12,450.00	---------
Diciembre 20	--------	15,360.00

solución

En la figura 4.4 están las disposiciones por encima de la recta y los depósitos por debajo, de todos se obtiene el monto acumulado al 20 de diciembre, pero antes al 1 de noviembre, que es cuando cambia la tasa de interés. Note que el primer valor corresponde a la diferencia entre el saldo y la primera disposición; también están los plazos entre dos fechas sucesivas.

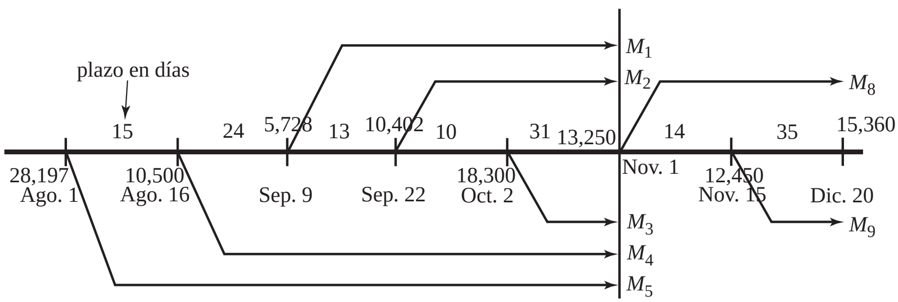


FIGURA 4.4

$M_1 = 5{,}728(1 + 0.0936/360)^{54} = 5{,}728(1.014137173)$ o $M_1 = \$5{,}808.98$

$M_2 = 10{,}402(1.00026)^{41} = 10{,}402(1.01071562)$ o $M_2 = \$10{,}513.46$

$M_3 = 18{,}300(1.00026)^{31} = 18{,}300(1.008091513)$ o $M_3 = \$18{,}448.07$

$M_4 = 10{,}500(1.00026)^{78} = 10{,}500(1.020484343)$ o $M_4 = \$10{,}715.09$

$M_5 = 28{,}197(1.00023)^{93} = 28{,}197(1.024471487)$ o $M_5 = \$28{,}887.02$

El valor acumulado de las 3 primeras disposiciones al 1 de noviembre es:

$$M_6 = M_1 + M_2 + 13{,}250 \qquad \text{o} \qquad M_6 = \$29{,}572.44$$

y el de los 3 depósitos es:

$$M_7 = M_3 + M_4 + M_5 \qquad \text{o} \qquad M_7 = \$58{,}050.18$$

La diferencia $M_7 - M_6 = 28{,}477.74$ es un saldo a favor del cuentahabiente del que el valor futuro 49 días después, del 1 de noviembre al 20 de diciembre, puesto que la tasa nominal diaria es ahora $i = 0.10277316$, ya que:

$$(1 + i/360)^{360} = (1 + 0.1032/12)^{12}$$

$$1 + i/360 = (1.0086)^{12/360}$$

$$1 + i/360 = 1.000285481$$

$$i = (0.000285481)360 \qquad \text{o} \qquad i = 0.10277316$$

Entonces, $M_8 = 28{,}477.74(1.000285481)^{49} \qquad 1 + i/p = 1.000285481$

$$M_8 = 28{,}477.74(1.014084842) \qquad \text{o} \qquad M_8 = \$28{,}878.84$$

El valor futuro de los \$12,450, el depósito del 15 de noviembre, es

$$M_9 = 12{,}450\ (1.000285481)^{35} \qquad \text{o} \qquad M_9 = \$12{,}575.00$$

Consecuentemente, el 20 de diciembre, antes de hacer su retiro el cuentahabiente tiene $M_8 + M_9$ y, después de hacerlo, tendrá

$$M_8 + M_9 - 15{,}360 = \$26{,}093.84$$

Ejercicios 4.5

l. Explique brevemente los conceptos de *ecuaciones de valores equivalentes, fecha focal* y *diagramas de tiempo.*

2. ¿Qué usos tiene un diagrama de tiempos y qué datos se representan con él?

3. La psicóloga Mora consigue un préstamo por \$13,500 y endosa dos documentos a 30 y 60 días, con cargos del 12.6% de interés anual capitalizable por mes. Por alguna causa, no realiza el primer pago y con su acreedor decide hacerlo 15 días después. ¿Por qué cantidad será este pago? Suponga que originalmente los 2 son iguales.

4. El 10 de agosto se consigue un crédito suscribiendo dos pagarés: uno de \$7,200 y otro de \$6,500 que vencen el 25 de septiembre y el 15 de octubre, respectivamente. Poco antes de hacer el primer abono se conviene en reemplazarlos por dos iguales el 1 de octubre y el 10 de noviembre.

a) ¿Por cuánto fue el crédito?

b) ¿Por qué cantidad es cada uno de los nuevos pagos?

Suponga intereses del 13.68% compuesto por día.

5. Hoy se cumplen 2 meses de que el señor Pérez consiguió un préstamo por $7,500 con 7 meses de plazo. Tres meses antes del primero, le concedieron otro por $12,000 a un plazo de 6 meses. El día de hoy hace un abono de $10,000 y acuerda con su acreedor liquidar el resto en 2 meses. ¿De cuánto es este pago, si se tienen cargos del 21.84% efectivo?

6. Con un interés del 7.56% capitalizable por día se invierten $16,800 el 3 de abril, y otros $25,600 el 10 de junio. ¿Cuánto se tiene en la inversión el 18 de agosto, si el 5 de julio se hizo un retiro de $20,000?

7. El señor Ochoa debe $8,000 pagaderos a 3 meses y $11,000 a 6 meses, incluyendo intereses. Al término del primer mes, hace un abono por $9,750. ¿Con cuánto saldará su deuda a los cinco meses contados desde el inicio, si le cargan intereses del 12.84% compuesto por mes?

8. Hoy vence un documento con valor nominal de $20,000, que la Compañía Comercial del Sureste firmó 1 semestre antes. Hace 2 meses consiguió otro crédito por $35,200 con 9 meses de plazo. Para pagar, decidió llegar a un arreglo con sus acreedores y así cancelar la deuda con un abono ahora de $25,000 y otros dos iguales entre sí, a 3 y 5 meses, contados a partir de ahora. ¿De cuánto es cada uno, si se tienen intereses del 17.4% capitalizable por mes? ¿A cuánto ascienden los intereses?

9. El l de junio se consiguió un préstamo por $19,750, el cual se liquidará 7 quincenas después con un pago de $20,800. Obtenga la magnitud de dos pagos iguales que sustituyen al anterior y que se hacen a 2 y 5 quincenas, contadas a partir del 1 de junio. ¿De cuánto es cada pago si el segundo es 50% mayor que el primero? (*Sugerencia*: obtenga primero la tasa de interés.)

10. Obtenga dos pagos iguales que se hacen el 15 de abril y el 8 de junio, y que reemplazan a los que se harían el 3 de mayo y el 15 de mayo, por $35,000 cada uno, para liquidar una deuda del 23 de diciembre anterior con intereses del 13.68% capitalizable por día. ¿Por qué cantidad fue la deuda? ¿Cuánto se paga por concepto de intereses?

11. El contador Aldana tiene 4 deudas de $21,350, $15,000, $12,000 y $13,500, que vencen, respectivamente, el 15 de abril, el 7 de mayo, el 18 de julio y el 30 de octubre; todos devengan intereses del 13.32%, capitalizable por días. En una reunión acuerda con sus acreedores hacerles 3 pagos iguales el quinceavo día de los meses de abril, junio y agosto, en sustitución de los primeros. ¿De cuánto es cada uno?

12. Resuelva el problema 11 considerando dos abonos: el primero el 10 de mayo, y otro el 5 de julio, por una cantidad que es un 30% mayor que el primero.

13. Se compra una computadora con un anticipo del 30% y 3 abonos iguales de $5,000 a 1, 2 y 3 meses de la compra. ¿De cuánto es un pago a los 4 meses de la compra en sustitución de los 3 mensuales, si se tienen intereses del 9.63% capitalizable por mes? ¿Cuál es el precio de contado?

14. Al comprar un automóvil usado se deja un anticipo del 40% y el resto se liquida con 2 pagos a 60 y 90 días, por $30,000 y $43,000, respectivamente, a una tasa de interés del 15% anual compuesto por mes. ¿Cuánto se pagaría de contado por el automóvil, si además se hace un 5% de descuento adicional?

15. En el problema 14, ¿cuánto tiempo después de la compra se haría un pago por $82,000 en sustitución de los dos de $30,000 y $43,000? (*Sugerencia:* encuentre la tasa de interés anual capitalizable por día equivalente.)

16. ¿Cuánto debe invertirse el 5 de abril y el 16 de junio para disponer de $25,000 el 21 de agosto y de $30,000 el 3 de octubre, en una cuenta que paga intereses del 12.96% compuesto por día, suponiendo que:

a) Los dos depósitos son iguales.

b) El segundo depósito es un 50% mayor que el primero.

17. ¿De qué monto se dispone el 10 de diciembre en una cuenta de ahorros, si el 4 de mayo se depositaron $12,500 en la apertura, el 10 de junio se depositaron otros $15,000 y se retiraron: $8,250 el 21 de junio, $5,300 el 18 de julio y $7,300 el 5 de noviembre? Suponga intereses del 15.12% compuesto por día.

18. En el problema 17, ¿cuánto deberá depositarse adicionalmente el 15 de agosto para disponer de $15,000 el 10 de diciembre y la cuenta quede en cero?

19. ¿Cuánto debe invertirse el 3 de octubre, en una cuenta que abona el 13.50% de interés nominal diario, para disponer de $20,000 el 21 de diciembre, si además el 5 y el 30 de noviembre se depositan, respectivamente, $5,000 y $3,750? ¿Cuánto se genera por intereses?

En los problemas 20 a 38, seleccione la opción correcta justificando su elección.

20. Se consigue un préstamo endosando dos documentos a 30 y 60 días, por $15,200 y $24,100, respectivamente, con intereses del 8.4% nominal mensual. Poco antes de hacer el primero se acuerda con el acreedor sustituir los dos por uno solo a 53 días de que se otorgó el préstamo. ¿De cuánto es este pago?

a) $39,175.06 *b*) $38,986.04 *c*) $40,002.25 *d*) $39,362.71 *e*) Otra

21. En el problema 20, ¿cuánto se recibió en préstamo?

a) $38,036.25 *b*) $37,963.71 *c*) $39,008.23 *d*) $38,695.24 *e*) Otra

22. Con el 13.5% de interés efectivo, el 10 de enero se invierten $16,350. ¿Cuánto se tendrá en la cuenta el 19 de junio, si al 1 de mayo se tenían $27,365.03?

a) $28,446.70 *b*) $28,093.61 *c*) $29,003.42 *d*) $28,649.32 *e*) Otra

23. En el problema 22, ¿cuánto dinero se tenía en la cuenta poco antes de hacer el depósito del 10 de enero?

a) $9,675.48 *b*) $10,693.41 *c*) $10,549.37 *d*) $10,175.43 *e*) Otra

24. ¿De cuánto puede disponer el señor Huerta el 25 de octubre, si el 15 de marzo depositó $15,650 en una cuenta que le bonifica el 9.6% nominal diario? Suponga que el primer día de año tenía $18,325 y el 21 de junio dispuso de $20,200 de la misma cuenta.

a) $15,531.63 *b*) $16,070.42 *c*) $15,029.32 *d*) $15,968.31 *e*) Otra

25. Fabiola debe $6,350 pagaderos a 2 meses y $9,163 a 5 meses incluyendo intereses. Al término de los primeros 40 días, hace un abono de $7,000, ¿con cuánto saldará su cuenta 125 días después de que hizo el primer abono? Suponga intereses del 10.8% nominal mensual.

a) $8,389.34 *b*) $8,521.43 *c*) $8,629.03 *d*) $8,921.45 *e*) Otra

26. ¿Cuántos días después del primer depósito, Fabiola, la chica del problema 25, cancela su deuda con $9,100?

a) 299 *b*) 324 *c*) 408 *d*) 397 *e*) Otra

27. Obtenga tres pagos iguales que se realizan el 10 de junio, el 25 de agosto y el 3 de octubre, y sustituyen los que se harán el 5 de abril por $18,960, y el 12 de septiembre por $26,425, por un crédito que se logró el 28 de enero con intereses del 17.36% efectivo.

a) $15,691.42 *b*) $15,028.45 *c*) $15,384.02 *d*) $16,056.73 *e*) Otra

28. En el problema 27, ¿a cuánto asciende la diferencia entre los dos planes de pagos?

a) $767.06 *b*) $695.61 *c*) $743.67 *d*) $708.95 *e*) Otra

29. ¿Cuánto se recibió en el préstamo del problema 27?

a) $42,898.84 *b*) $42,129.73 *c*) $41,926.05 *d*) $43,021.51 *e*) Otra

30. La Constructora Piscis consigue un crédito y endosa tres documentos con un valor nominal de $425,000, $650,000 y $76,0000, con plazo de 2, 5 y 8 meses, respectivamente. Luego de efectuar el primero, acuerda con sus acreedores liquidar el resto con 4 abonos quincenales, comenzando tres meses después de otorgado el préstamo. ¿De cuánto es cada uno si se consideran intereses del 11.52% anual capitalizable por mes?

a) $125,302.41 *b*) $140,129.53 *c*) $139,171.51 *d*) $142,504.03 *e*) Otra

31. ¿Cuánto pagó la constructora del problema 30 por concepto de intereses?

a) $75,528.03 *b*) $76,005.38 *c*) $78,421.65 *d*) $76,936.08 *e*) Otra

32. Una importante firma comercial compra un local para la venta de sus productos, con un anticipo del 40% y 5 abonos quincenales de $45,000 cada uno, haciendo el primero 4 meses después de la compra. Logra ventas tan extraordinarias que decide liquidar su deuda con tres pagos, el primero por $150,000 en lugar del primer abono quincenal, otro por $260,000 tres meses después del primero, y un tercero, a dos meses del anterior. ¿De cuánto es este pago, si le cargan intereses del 11.7% efectivo?

a) $260,325.04 *b*) $248,321.35 *c*) $253,031.13 *d*) $252,865.33 *e*) Otra

33. ¿Cuál es el precio de contado del local en el problema 32?

a) $1′050,039.02 *b*) $980,436.33 *c*) $966,598.93 *d*) $1′035,328.3 *e*) Otra

34. ¿Cuánto se ahorra por intereses la firma comercial del problema 32 por anticipar sus pagos?

a) $15,948.31 *b*) $18,363.08 *c*) $12,963.31 *d*) $11,968.87 *e*) Otra

35. El 19 de marzo se endosa un documento con valor nominal de $21,350 y vencimiento al 3 de agosto, y el 23 de mayo por un crédito de $42,725, se firmó otro que vence el 15 de octubre. Poco después de la firma del primero, se realiza un convenio para cancelar los compromisos con tres pagos iguales el primer día de los meses de julio, septiembre y octubre. ¿De cuánto es cada uno, si se cargan intereses del 11.16% convertible por día?

a) $20,910.63 *b*) $21,036.08 *c*) $22,195.33 *d*) $21,810.31 *e*) Otra

36. En el problema 35, ¿cuánto se recibió en total en los dos créditos?

a) $63,212.38 *b*) $63,986.41 *c*) $62,268.09 *d*) $62,078.43 *e*) Otra

37. ¿Cuánto dinero pagó de más el deudor del problema 35 por haber cambiado el plan de pagos?

a) $1,330.93 *b*) $1,495.08 *c*) $1,396.78 *d*) $1,463.71 *e*) Otra

38. En el mismo problema 35, ¿de cuánto será el primero de los tres pagos, si cada uno es un 18% mayor que el anterior?

a) $19,238.41 *b*) $20,009.03 *c*) $18,344.17 *d*) $18,701.48 *e*) Otra

4.6 Algunos problemas de aplicación

Aunque la gran mayoría de los ejemplos resueltos y los ejercicios propuestos son verdaderas aplicaciones del interés compuesto, a continuación se agregan otras que pueden considerarse como un compendio de los temas tratados en el capítulo.

Flujo de caja

Ejemplo 1

Flujo de caja en construcción de vivienda

Para la construcción de un núcleo de vivienda, un contratista requiere de $5′000,000 distribuidos de la forma siguiente: 40% al comenzar las obras, 30% a los 3 meses, 20% a los 6 meses y el 10% restante al entregar las viviendas, 8 meses después de haber comenzado las obras. Con este propósito, el propietario deposita $2′000,000, un mes antes de comenzar la construcción. Tres meses después del primer depósito, hace otro, equivalente al resto del presupuesto, en un banco que paga el 13.92% de interés anual capitalizable por mes. ¿De qué cantidad es este pago?

solución

La figura 4.5 muestra un diagrama de tiempo con las cantidades en millones de dólares, donde cada subdivisión de la recta representa un periodo mensual. La fecha focal se localiza al final, por lo que de todas las cantidades se obtiene el monto.

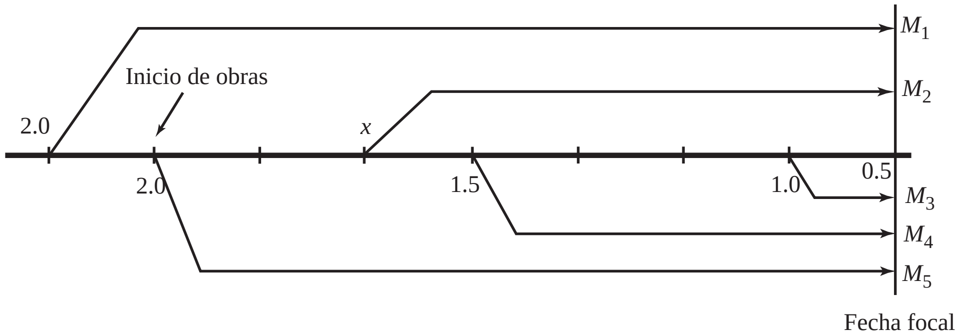


FIGURA 4.5

En el extremo izquierdo de la gráfica se encuentra el primer depósito y 1 mes después, al inicio de las obras, el primer retiro, que es igual al 40% del presupuesto total:

$$0.40(5'000{,}000) = 2'000{,}000$$

Tres meses después está el segundo retiro, del 30%:

$$0.30(5'000{,}000) = 1'500{,}000$$

y el 20% a los 6 meses de iniciadas las obras:

$$0.20(5'000{,}000) = 1'000{,}000$$

Al final está el 10% restante, es decir, \$500,000. El segundo depósito por x dólares se localiza a tres meses después del primero.

Todas las cantidades se trasladan hasta la fecha focal, con la fórmula del interés compuesto y los plazos que se observan en el diagrama de la misma figura.

$$M_1 = 2(1 + 0.1392/12)^8 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$M_1 = 2(1.0116)^8$$
$$M_1 = 2(1.096656369) \quad \text{o} \quad M_1 = 2.193312738 \text{ millones}$$

El valor futuro del segundo pago, cinco meses después, es

$$M_2 = x(1.0116)^5$$

o

$$M_2 = (1.0593613)x$$

Un lado de la ecuación de valores equivalentes es, por lo tanto,

$$P = 2.193312738 + (1.0593613)x$$

y el otro lado, el de las disposiciones, es

$$Q = M_3 + M_4 + M_5 + 0.5 \text{ millones de dólares}$$

Tal como se aprecia en la misma figura 4.5, donde también se observa que los plazos son, respectivamente, uno, cuatro y siete meses, y

$$M_3 = 1.0(1.0116)^1 \quad \text{o} \quad M_3 = 1.0116 \text{ millones de dólares}$$
$$M_4 = 1.5(1.0116)^4$$
$$M_4 = 1.5(1.047213622) \quad \text{o} \quad M_4 = 1.570820433$$
$$M_5 = 2.0(1.0116)^7$$
$$M_5 = 2.0(1.08408103) \quad \text{o} \quad M_5 = 2.16816206$$

Así,

$$Q = 1.0116 + 1.570820433 + 2.16816206 + 0.5$$
$$Q = 5.250582493 \text{ millones de dólares}$$

La ecuación de valor es, en consecuencia,

$$2.193312738 + (1.0593613)x = 5.250582493 \qquad P = Q$$

de donde

$$x = (5.250582493 - 2.193312738)/1.0593613$$
$$x = 3.057269755/1.0593613 \quad \text{o} \quad x = 2.885955674$$

es decir,

$$x = \$2'885{,}955.67$$

Reestructuración de un crédito automotriz

Ejemplo 2

Se compra un automóvil con precio de contado de \$193,500, con un anticipo y 3 abonos bimestrales iguales al anticipo, con un interés del 16.2% anual capitalizable por bimestre. Poco antes de hacer el primer pago bimestral se conviene en reestructurar la deuda con dos pagos a 3 y 6 meses de la compra, de tal manera que el segundo pago es un 25% mayor que el primero.

a) ¿De cuánto es cada pago?

b) ¿Cuánto se paga por intereses?

solución

a) Para conocer el monto de los 2 nuevos pagos es necesario encontrar el valor del anticipo A. Para esto se calcula el valor presente C_1, C_2 y C_3 de cada uno de los 3 pagos originales R_1, R_2 y R_3. La suma de los 4 debe ser igual al precio del automóvil.

$$A + C_1 + C_2 + C_3 = \$193{,}500$$

La frecuencia de conversión es $p = 6$, ya que son 6 los bimestres que tiene 1 año y la tasa de interés anual es $i = 0.162$. Por lo tanto, para el primero el plazo es de 1 bimestre:

$$C_1 = R_1(1 + 0.162/6)^{-1} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$

$$C_1 = R_1(1.027)^{-1}$$

o $$C_1 = (0.973709835)R_1$$

Para el segundo y el tercero, el plazo es, respectivamente, de 2 y 3 bimestres:

$$C_2 = R_2(1.027)^{-2} \quad \text{o} \quad C_2 = (0.948110842)R_2$$

$$C_3 = R_3(1.027)^{-3} \quad \text{o} \quad C_2 = (0.923184851)R_3$$

La suma de los cuatro es, entonces,

$$A + (0.973709835)R_1 + (0.948110842)R_2 + (0.923184851)R_3 = \$193{,}500$$

Puesto que todos son iguales, $A = R_1 = R_2 = R_3$, se suman los coeficientes de las variables en el lado izquierdo y después se divide la ecuación entre la suma.

$$(3.845005527)A = \$193{,}500$$

de donde

$$A = 193{,}500/3.845005527 \quad \text{o} \quad A = \$50{,}325.03$$

que es igual al anticipo e igual a los otros 3 abonos.

Entonces, después del anticipo el crédito es

$$C = 193{,}500 - 50{,}325.03$$

o $$C = \$143{,}174.97$$

que deberá ser igual al valor presente, el día de la compraventa, de los dos pagos del nuevo convenio.

En la figura 4.6 se aprecian los pagos originales en la parte superior de la línea, y los nuevos, en la inferior. Cada espacio representa un periodo mensual.

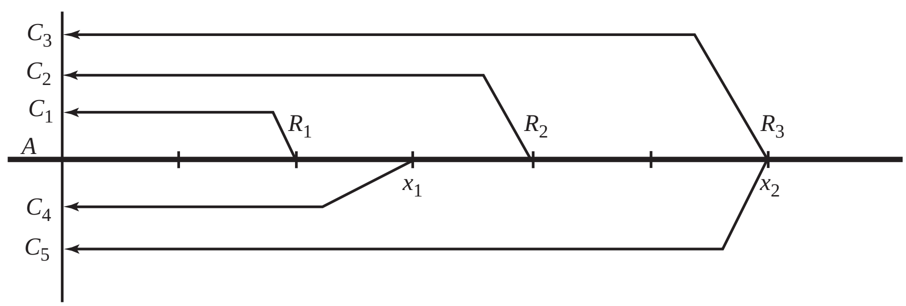


FIGURA 4.6

Ahora se encuentra el valor presente de los 2 pagos x_1 y x_2, y la suma debe ser igual al crédito C.

El valor presente del primero con 1.5 bimestres o 3 meses de plazo es

$$C_4 = x_1(1+ 0.0162/6)^{-1.5}$$
$$C_4 = x_1(1.027)^{-1.5}$$
o $$C_4 = (0.960825089)x_1 \qquad a^{-n} = 1/a^n$$

y el segundo es

$$C_5 = x_2(1.027)^{-3} \quad \text{o} \quad C_5 = (0.923184851)x_2$$

pero como x_2 es como un 25% mayor que x_1, $x_2 = 1.25x_1$, se tiene que

$$C_5 = (0.923184851)(1.25x_1) \quad \text{o} \quad C_5 = (1.153981064)x_1$$

Note que para estos dos capitales podría emplearse la tasa de interés compuesta por mes, equivalente. La suma de los dos debe ser igual al crédito inicial, luego de dar el anticipo, es decir,

$$C_4 + C_5 = 143{,}174.97$$

o $$(0.960825089)x_1 + (1.153981064)x_1 = 143{,}174.97$$

de donde $$(2.114806153)X_1 = 143{,}174.97$$

$$x_1 = 143{,}174.97/2.114806153 \quad \text{o} \quad x_1 = \$67{,}701.23$$

El segundo pago es un 25% mayor que éste, y

$$x_2 = 1.25(67{,}701.23)$$
o $$x_2 = \$84{,}626.54$$

b) Los intereses son iguales a la diferencia entre el total que se pagó $x_1 + x_2$ y el crédito original; esto es:

$$I = 67{,}701.23 + 84{,}626.54 - 143{,}174.97$$
o $$I = \$9{,}152.80$$

Constitución de un fideicomiso con tasa variable

Ejemplo 3

¿Cuánto debe depositarse ahora, cuánto dentro de dos años y cuánto más 3 años después, para constituir un fideicomiso y disponer de $4.5 millones, al cabo de 12 años contados a partir de ahora, considerando que el segundo depósito es un 25% mayor que el primero y que el último excede en $450,000 al anterior?

Suponga que se devengan intereses del 9.3% nominal mensual en los primeros cuatro años, del 10.4% anual capitalizable por semestre en los 3 años siguientes y del 11.8% efectivo en los últimos cinco.

solución

El diagrama temporal de la figura 4.7, donde cada subdivisión representa un periodo anual y el dinero está en miles, puede auxiliarnos a plantear el problema. En él se han anotado los 3 depósitos, el primero de los cuales es x_1, el segundo será $x_2 = x_1 + 0.25x_1$, o $x_2 = (1.25)x_1$, factorizando x_1. Puesto que es \$450,000 mayor que el segundo, el tercer pago en miles de dólares será

$$x_3 = x_2 + 450$$

o $$x_3 = (1.25)x_1 + 450 \qquad \text{ya que } x_2 = 1.25x_1$$

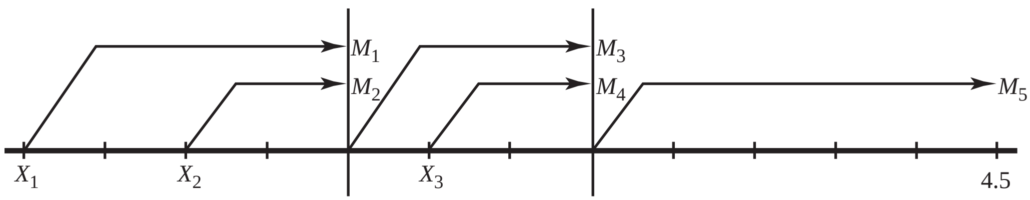


FIGURA 4.7

Como la tasa es variable, se deben considerar tres plazos distintos, tal como se observa en la misma figura, de 4, 3 y 5 años, respectivamente, cada uno. Ahí mismo se aprecian 5 montos, el último de los cuales debe ser igual a los pretendidos \$4.5 millones. Todos se obtienen con la fórmula del interés compuesto. En el primero, por ejemplo, el valor presente es x_1, el plazo es de 4 años o 48 meses, y la tasa de interés nominal mensual, esto es, capitalizable por mes, es 9.3%.

$$M_1 = x_1(1 + 0.093/12)^{48} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$
$$M_1 = x_1(1.00775)^{48} \qquad \text{o} \qquad M_1 = (1.448554126)x_1$$

De manera semejante, el segundo es

$$M_2 = x_2(1.00775)^{24} \qquad \text{son dos años de plazo}$$
$$M_2 = (1.203558942)x_2$$
$$M_2 = (1.203558942)(1.25x_1) \qquad x_2 = 1.25x_1$$

o $$M_2 = (1.504448678)x_1$$

La suma de los dos es

$$M_1 + M_2 = (1.448554126)x_1 + (1.504448678)x_1$$

o $$M_1 + M_2 = (2.953002804)x_1 \qquad \text{sumando los coeficientes de } x_1$$

y su valor futuro, a 3 años, esto es, 6 semestres después con la nueva tasa, es

$$M_3 = (2.953002804)x_1(1 + 0.104/2)^6$$
$$M_3 = (2.953002804)(x_1)(1.052)^6$$
$$M_3 = (2.953002804)(x_1)(1.355484135)$$

es decir,

$$M_3 = (4.002748451)(x_1)$$

El valor acumulado del tercer pago, dos años después, es

$$M_4 = x_3(1.052)^4$$
$$M_4 = (1.224793744)x_3$$
$$M_4 = (1.224793744)(1.25x_1 + 450) \qquad x_3 = 1.25x_1 + 450$$

o $$M_4 = (1.53099218)x_1 + 551.1571848$$

La suma de los dos, M_3 y M_4, sumando los coeficientes de x_1 es

$$M_3 + M_4 = (5.533740631)x_1 + 551.1571848$$

Y, finalmente, considerando a esta suma como un capital C, su valor futuro 5 años después, con la tasa efectiva del 11.8%, es

$$M_5 = C(1 + 0.118)^5$$
$$M_5 = C(1.746662586)$$

Al sustituir C y efectuar las multiplicaciones, quedará

$$M_5 = (9.665577721)x_1 + 962.6856337$$

que debe ser igual a los 4.5 millones o $4′500,000. Esto es

$$(9.665577721)x_1 + 962.6856337 = 4{,}500$$

de donde el primer depósito en miles de dólares es

$$x_1 = (4{,}500 - 962.6856337)/\ 9.665577721$$
$$x_1 = 365.9702987 \qquad \text{o} \qquad \$365{,}970.30$$

El segundo es 25% mayor:

$$x_2 = (1.25)x_1 \qquad \text{o} \qquad x_2 = \$457{,}462.87$$

y el tercero es

$$x_3 = x_2 + 450{,}000$$

o $$x_3 = \$907{,}462.87$$

Ejemplo 4

¿A cuánto ascienden los intereses que se devengan en el fideicomiso del ejemplo 3?

solución

Los intereses son la diferencia entre el total depositado y los $4.5 millones del monto, $I = M - C$

$$I = 4'500,000 - (365,970.30 + 457,462.87 + 907,462.87)$$
$$I = 4'500,000 - 1'730,896.04$$
o $$I = \$2'769,103.96$$

Plazos equivalentes

Cuando una serie de obligaciones, con montos y plazos establecidos, se reemplaza por una sola cuya magnitud es igual a la suma de las anteriores, pero con fecha diferente, al tiempo transcurrido para este pago, se le llama *plazo equivalente*.

Ejemplo 5

¿Qué día deberá efectuarse un pago único por \$60,000 que sustituye a dos montos, el primero por \$25,000 con plazo de 5 meses, y el segundo por \$35,000 con plazo de 8 meses, suponiendo intereses del 10% efectivo?

solución

El diagrama de la figura 4.8, donde cada subdivisión representa un periodo mensual y los montos están en miles, puede ayudarnos.

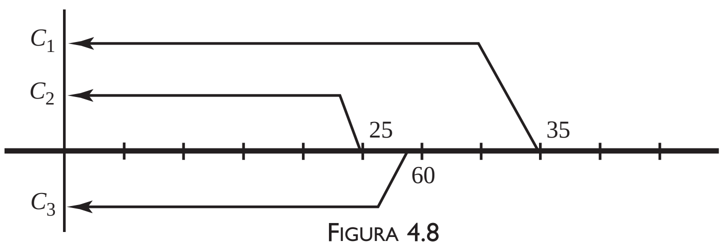


FIGURA 4.8

La tasa de interés capitalizable por mes, equivalente al 10% efectivo es i de la siguiente ecuación, que resulta de igualar los montos con diferentes periodos de capitalización.

$$(1 + i/12)^{12} = 1 + 0.10$$

de donde

$$1 + i/12 = \sqrt[12]{1.1} \quad \text{o} \quad 1 + i/12 = 1.00797414$$

Con ésta y la fórmula del interés compuesto, se obtienen los tres capitales, notando que el plazo para el tercero es x, la incógnita.

$$C_1 = 35,000(1.00797414)^{-8} \qquad C = M(1+i/p)^{-np}$$
$$C_1 = 35,000(0.938436472) \quad \text{o} \quad C_1 = \$32,845.28$$
$$C_2 = 25,000(1.00797414)^{-5}$$
$$C_2 = 25,000(0.961065636) \quad \text{o} \quad C_2 = \$24,026.64$$
$$C_3 = 60,000(1.00797414)^{-x}$$

La ecuación de valores equivalentes es, por lo tanto,

$$60{,}000(1.00797414)^{-x} = 56{,}871.92 \qquad C_3 = C_1 + C_2$$

Se toma logaritmo natural, o común, a ambos lados; pero antes el 60,000 pasa dividiendo al lado derecho.

$$(1.00797414)^{-x} = 56{,}871.92/60{,}000$$
$$(1.00797414)^{-x} = 0.94786529$$
$$Ln(1.00797414)^{-x} = Ln(0.94786529)$$
$$-x = Ln(0.94786529)/Ln(1.00797414)$$
$$-x = -6.741301559 \quad \text{o} \quad x = 6.741301559$$

Esto es, 6 meses y 22 días, ya que 0.7413 años, la parte decimal del resultado, expresada en días es

$$0.741301559(30) = 22.23904677$$

Importante

En el desarrollo anterior, al haber hallado los 3 capitales al inicio del plazo, ahí se localizó la fecha focal, pero como anteriormente se dijo, el resultado no cambia si se ubica en otro punto, con lo cual queremos decir que no cambia la fecha donde se localizan los $60,000, llamada **fecha de vencimiento promedio**, aunque, claro, el valor de *x*, es decir el plazo se modificaría.

Ejemplo 6

¿Qué día deben pagarse $50,500 en sustitución de 3 pagos: el primero por $9,000 del día 10 de julio, el segundo por $28,500 del 25 de agosto y el otro por $13,000 del 3 de octubre, considerando intereses del 12.87% nominal mensual.

solución

Con la ayuda de un diagrama temporal principalmente para los plazos, y considerando el 3 de octubre como fecha focal, se tienen 3 montos:

$$M_1 = 9{,}000(1 + 0.1287/360)^{85}$$
$$M_1 = 9{,}000(1.030848314) \quad \text{o} \quad M_1 = \$9{,}277.63$$
$$M_2 = 28{,}500(1.0003575)^{39}$$
$$M_2 = 28{,}500(1.014037623) \quad \text{o} \quad M_2 = \$28{,}900.07$$
$$M_3 = 50{,}500(1.0003575)^{x}$$

La ecuación de valor es, entonces,

$$50{,}500(1.0003575)^x = 9{,}277.63 + 28{,}900.07 + 13{,}000$$
$$(1.0003575)^x = 51{,}177.70/50{,}500$$
$$(1.0003575)^x = 1.013419942$$

de donde

$$x = Ln(1.013419942)/Ln(1.0003575)$$
$$x = 37.2953 \quad \text{o} \quad 37 \text{ días, redondeando.}$$

Este plazo se cumple el 27 de agosto. ¿Por qué?

Ejercicios 4.6

1. Tres meses antes de comenzar la construcción de su casa, el señor Aguilera deposita $250,000 en una cuenta que paga el 9.84% de interés nominal mensual, y otros $450,000 al iniciar las obras. ¿Cuánto deberá depositar 2 meses después, si el presupuesto total es de $1.2 millones, distribuidos de la forma siguiente: 30% al comenzar la construcción, 35% a los 3 meses, 20% 2 meses después, y el resto al terminar, es decir, 8 meses después del inicio?
2. La empresa Distribuidora de Libros, S.A., suscribió tres operaciones de crédito con la Editorial del Centro, S.A. La primera de las operaciones se suscribió el 15 de marzo por $150,000 a pagarse el 30 de noviembre; la segunda, el 8 de mayo mediante un pagaré con valor nominal de $200,000 y vencimiento al 10 de diciembre, y la última el 1 de junio con un documento con valor nominal de $75,000, que incluyen los intereses y vencimiento al 25 de agosto. Acuerdan reemplazar el compromiso con 2 pagos, uno el 15 de agosto y el otro el 15 de octubre, por un monto que es el doble del primero. ¿De cuánto es cada pago si se devengan intereses del 14.04% compuesto por día? ¿Con cuánto se liquidan las deudas con un pago único el 10 de diciembre? ¿A cuánto ascienden los intereses?
3. ¿Cuánto se tendrá en una cuenta bancaria el 7 de febrero, si el 15 de junio anterior se depositaron $4,500 y había un saldo a favor del cuentahabiente de $6,275. Además, tenga en cuenta que se hicieron los siguientes movimientos:

Fecha	Depósitos	Retiros
julio 10	$4,300	
agosto 1		$8,000
noviembre 5	$7,800	
noviembre 19		$11,350
diciembre 15		$3,200
enero 20	$10,200	

Considere que se ganan intereses del 14.4% capitalizables por día.

4. Ahora se depositan $750,000 en un banco que bonifica intereses del 6.35% efectivo. ¿Cuánto se tendrá dentro de 10 años, considerando que hace 7 meses se habían depositado otros $625,000 y se espera que la tasa de interés aumente 1.2 puntos porcentuales por año cada 3 años contando desde que se depositaron los $625,000?

5. ¿Qué día deben pagarse $128,000 en sustitución de tres pagarés con valor nominal de $40,000, $55,000 y $30,000 que vencen, respectivamente, el 10 de abril, el 5 de junio y 23 de octubre? Considere cargos o intereses del 7.11% capitalizable por día.

6. Para ampliar un tramo de carretera con un presupuesto actual de $2.7 millones el día de hoy se crea un fideicomiso con un depósito de $1.3 millones, en un banco que bonifica intereses del 11.6% nominal bimestral, ¿cuánto deberá depositarse 8 meses después de ahora para realizar el proyecto al cabo de 20 meses, considerando que el presupuesto se incrementará un 0.61% mensual por los efectos inflacionarios?

7. ¿Cuánto se genera por intereses en el fideicomiso del problema 6.

8. El señor Uribe compra un automóvil con un anticipo y el 65% restante, mediante un crédito endosando tres pagarés por $45,000, $35,000 y $25,000 que vencen, respectivamente, el 6 de mayo, 18 de julio y el 1 de octubre. Obtiene un importante premio en Pronósticos Deportivos y determina liquidar su deuda el 15 de marzo. ¿Con cuánto lo hace, considerando intereses del 11.8% efectivo?

9. ¿Cuánto se ahorró el señor Uribe del problema 8 por concepto de intereses?

10. ¿En cuánto ofrece la agencia el automóvil del problema 8, si adicionalmente otorga un descuento del 5.4% sobre el precio de contado? Supóngase que se compró el 20 de febrero, con un anticipo del 35%

11. Un Centro Médico pretende adquirir un equipo de resonancia magnética en el país, y se ofrece con un anticipo y dos pagos adicionales a 3 y 5 meses por $1.30 y $1.45 millones, respectivamente, con intereses del 7.8% anual capitalizable por mes. Ya se incluyen impuestos.

    Si lo compra en Estados Unidos con el mismo anticipo, haría un pago adicional por $246,000 a los 4 meses de la compra e intereses del 6.8% nominal mensual y $9,300 por permisos y transportación. Pero si lo compra en Canadá, además del mismo anticipo, efectuará tres pagos iguales por 72,500 dólares canadienses cada uno a los 3, 5 y 6 meses de la compra, con el 7.2% anual compuesto por bimestre, y $10,800 dólares canadienses por transporte y permisos.

    Considerando que la paridad actual en el país es de $10.75 por cada dólar y $12.05 por cada dólar canadiense,¿cuál de las alternativas debe elegir?

12. Sin contar el anticipo cuántos dólares se pagarán por el equipo del problema 11 si se compra en Canadá y el dólar de aquel país aumenta su cotización en 0.008% cada día.

En los problemas 13 al 29 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

13. ¿Qué día deben pagarse $75,000 en sustitución de dos documentos por $15,000 y $60,000 con vencimiento al 10 de septiembre y 26 de noviembre, respectivamente? Considere intereses del 9.9% anual capitalizable por día.

a) Octubre 7 *b*) Octubre 23 *c*) Noviembre 1 *d*) Noviembre 16 *e*) Otra

14. Se constituye un fideicomiso con un depósito de $600,000 en un banco que bonifica el 11.4% de interés nominal mensual. ¿Con cuánto dinero se podrá contar 7 años después, si además se depositaron otros $750,000, dos años y tres meses después del primero?

a) $2′302,425.03 *b*) $1′968,364.05 *c*) $2′295,772.59 *d*) $1′898,963.42 *e*) Otra

15. ¿Cuánto se genera por concepto de intereses en el problema 14?

a) $945,772.59 *b*) $1′026,963.05 *c*) $865,321.38 *d*) $906,907.45 *e*) Otra

16. El licenciado Ponce compra un departamento con $48,000 de anticipo y tres pagos iguales, a 3, 5 y 6 meses con intereses del 9.63% nominal mensual. ¿De cuánto es cada uno si el anticipo fue del 30%?

a) $43,065.32 *b*) $40,687.83 *c*) $38,852.26 *d*) $39,675.61 *e*) Otra

17. En el problema 16, ¿de cuánto es el primer pago, si el segundo excede en $10,000 al primero, y el último es un 15% menor que el segundo?

a) $35,295.42 *b*) $33,083.95 *c*) $34,427.85 *d*) $31,965.06 *e*) Otra

18. ¿Cuántos días después de conseguir el crédito y dar el anticipo se hará un pago único que sea igual a la suma de los tres y los sustituya, en el problema 16?

a) 140 *b*) 148 *c*) 150 *d*) 157 *e*) Otra

19. Carolina vende su automóvil usado. Determine qué le conviene más, considerando que el dinero reditúa en 13.56% nominal mensual.

a) Una agencia le ofrece $127,200 a cuenta de otro nuevo.

b) Su amiga Paola le ofrece $43,000 de contado, un pago a los 3 meses por $35,000, y otro por $53,000 dos meses después.

c) Otro amigo le daría 3 pagos trimestrales de $45,000 cada uno, sin anticipo.

d) Una agencia le ofrece $60,500 de contado y $70,000 en 5 meses.

20. Seis meses antes de iniciar la construcción de la biblioteca de la universidad local, se depositan $2′300,000 en una cuenta que bonifica el 10.2% nominal mensual. ¿De cuánto dinero podría disponerse al inicio de las obras? Considere que 2 meses antes del depósito se hizo otro por $3′530,000, que se requieren $725,000 al final de cada bimestre durante los tres que dura la construcción, y 7 meses después del inicio se necesitarán 1′650,000 para mobiliario, libros y soporte tecnológico.

a) $2′539,249.31 *b*) $2′106,423.62 *c*) $1′876,429.47 *d*) $2′427,928.03 *e*) Otra

21. Para instalar un café-Internet, Jorge consigue un préstamo que liquidará con tres pagos, el primero el día 5 de enero por $39,500, el segundo el 15 de febrero por $41,600, y el último el 22 de abril por $75,400. Considerando intereses del 13% efectivo, indique por cuánto dinero logró el préstamo el 6 de diciembre anterior?

a) $148,923.09 *b*) $160,093.21 *c*) $152,968.91 *d*) $151,682.41 *e*) Otra

22. ¿Cuánto pagó Jorge por intereses en el problema 21?

a) $4,817.59 *b*) $5,103.42 *c*) $5,201.48 *d*) $4,993.28 *e*) Otra

23. ¿Qué día se realizaría un pago por $156,500 que sustituya a los 3 del problema 21?

a) 1 de marzo *b*) 8 de marzo *c*) 23 de marzo *d*) 5 de abril *e*) Otra

24. ¿Cuánto pagaría Jorge del problema 21, el 3 de febrero en sustitución de los 3 pactados, considerando que en el pago que se retrasó, el primero, le cargan adicionalmente intereses moratorios del 3.5% mensual capitalizable por mes?

a) $155,963.28 *b*) $158,065.36 *c*) $156,099.66 *d*) $150,362.08 *e*) Otra

25. Los 726 empleados de una embotelladora de bebidas gaseosas constituyen un fideicomiso con un depósito bancario. Ocho meses después ya son 801 y hacen otro depósito con la participación de $1,000 cada uno. ¿Cuánto tendrán 7 años después del primero? Considere intereses del 9.63% nominal mensual en promedio durante los primeros 3 años y 10.5% nominal mensual en el resto del plazo. Suponga también que cada empleado cooperó con $850 para la constitución del fideicomiso.

a) $2′795,227.04 *b*) $2′703,929.23 *c*) $2′698,424.59 *d*) $2′563,424.05 *e*) Otra

26. ¿Por concepto de intereses cuánto dinero generaron los depósitos para los empleados del problema 25?

a) $1′265,095.36 *b*) $1′377,127.04 *c*) $1′193,462.51 *d*) $1′098,674.63 e) Otra

27. ¿De qué magnitud son tres pagos iguales, el 10 de septiembre, el 2 de noviembre y el 28 de enero, que sustituyen a otros 3 que se iban a realizar el 1 de julio por $26,250, el 3 de diciembre por $54,800 y el 21 de febrero por $45,000? Suponga intereses del 15.84% anual capitalizable por día.

a) $41,739.19 *b*) $42,308.43 *c*) $41,093.36 *d*) $41,598.39 *e*) Otra

28. ¿Cuál es la **fecha de vencimiento promedio** en las condiciones originales del problema 27?

a) Noviembre 15 *b*) Noviembre 23 *c*) Diciembre 15 *d*) Noviembre 28 *e*) Otra

29. En el problema 27, ¿cuál es la **fecha de vencimiento promedio** cuando los tres abonos son iguales?

a) Noviembre 13 *b*) Noviembre 25 *c*) Diciembre 10 *d*) Diciembre 18 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Pronosticar y realizar cálculos operativos con cantidades que crecen de manera no constante, como inflación, devaluación, producción, etcétera.
- Evaluar el *monto acumulado*, el *capital*, los *intereses*, el *plazo* y la *tasa de interés* en operaciones financieras y comerciales con interés compuesto, utilizando la fórmula del interés compuesto:

$$M = C(1 + i/p)^{np}$$

- Explicar los conceptos de
  – Interés compuesto
  – Periodo de capitalización
  – Frecuencia de conversión
  – Tasas de interés equivalentes
  – Tasas efectivas y nominales
  – Diagramas de tiempo
  – Fecha focal
  – Ecuación de valores equivalentes
  – Plazos equivalentes
  – Fecha de vencimiento promedio
- Hacer cálculos financieros y comerciales con tasas de interés nominales dada la tasa efectiva y, recíprocamente, empleando la fórmula $e = (1 + i/p)^p - 1$.
- Sustituir un conjunto de obligaciones comerciales o financieras por otro equivalente, utilizando diagramas de tiempo, fecha focal y ecuaciones de valor equivalente.
- Decidir cuál es la opción más conveniente en operaciones con interés compuesto.
- Utilizar el concepto y las fórmulas del interés compuesto en problemas de aplicación.

Conceptos importantes

Descuento compuesto
Fecha focal, ecuaciones de valor, diagramas de tiempo
Frecuencia de conversión
Incrementos geométricos constantes y no constantes
Interés compuesto
Periodo de capitalización de intereses
Plazo con interés compuesto
Tasa con interés compuesto
Tasas equivalentes, efectivas y nominales
Valor futuro de un capital
Valor presente de un monto

Problemas propuestos para exámenes

En los problemas 1 a 9 conteste verdadero (V) o falso (F).

1. El índice inflacionario del 12% anual es equivalente al l % mensual. _________
2. Es más productivo invertir al 9.9% compuesto por mes que al 10.1% efectivo. _________
3. Un capital que se invierte al 33.33% efectivo se triplica en 3 años. _________
4. Si la inflación en octubre fue del 0.98%, en noviembre del 1.03% y en diciembre del 1.09, entonces la inflación acumulada en el trimestre será la suma, es decir, 3.10%. _________
5. La tasa de interés efectiva del 14% es más productiva que la tasa de interés del 13.2% compuesto del 13% por mes. _________
6. Los intereses que se cargan en un préstamo al 13.5% nominal mensual son mayores que los que se cargan al 13.45% nominal semanal. _________
7. Si las ganancias de una compañía en 2003 fueron de $3′000,000, y en 2005 de $3′750,000, entonces crecieron en 25% en el periodo bianual. _________
8. Si el poder adquisitivo de un trabajador pierde un 18% semestral, entonces pierde un 3% mensual. _________
9. La bolsa de valores ganó 2.3 puntos porcentuales el lunes; 1.9 puntos el martes, 4.1 puntos el miércoles, 3.2 el jueves, y el viernes perdió 4 puntos. Entonces, en la semana ganó la suma en puntos porcentuales, es decir, 7.5 puntos. _________

En los problemas 10 a 20 complete las afirmaciones.

10. En 2004 las ventas de un nuevo artículo para el hogar fueron de $150,000, y en 2005 de $177,000 dólares. ¿De cuánto serán en el año 2009 suponiendo que se sostiene el crecimiento de manera geométrica? _________
11. La Bolsa de Valores subió 3.2 puntos porcentuales en la primera semana, 1.9 puntos en la segunda, y 4.8 en la tercera. Entonces, en las tres semanas subió _________ puntos porcentuales.
12. Si ahora se invierten $25,000 al 11.4% compuesto por mes entonces en 4 meses se acumulan $_________.
13. Para disponer de $7,250 el 5 de junio, el 15 de enero anterior deben invertirse $_________ al 12.6% de interés efectivo.

14. El 11.2% de interés compuesto por quincena es equivalente al _________ % de interés efectivo.

15. Un capital se duplica en 5 años si se invierte al _________ % de interés efectivo.

16. El 13.8% de interés efectivo es equivalente al _________ % nominal mensual.

17. En un préstamo de $35,000 que se ampara con un documento con $36,250 de valor nominal y 7 meses de plazo, la tasa efectiva es _________ .

18. Invertir un capital al 9.36% de interés nominal mensual es igual de redituable que hacerlo con el _________ % compuesto por semestre.

19. Un capital de $8,000 genera intereses de $_________ en 5 meses cuando se invierte al 12.5% compuesto por bimestre.

20. El precio de contado de un televisor que se compra con un anticipo del 30%, un pago a los 2 meses de $3,750 y con el 12.4% de interés nominal mensual es $_________.

21. El índice poblacional del país aumenta en 5.2 puntos porcentuales por año. ¿Cuánto crece en 4 años?

22. ¿Por qué cantidad es un pago a los 4 meses de la compra de una computadora, si se dio un anticipo de $8,500 que corresponden al 40% del precio y se tienen cargos del 9.3% de interés efectivo?

23. ¿De cuánto es cada pago a 2 y 3 meses, si con un anticipo del 25% se adquirió un televisor de 34 pulgadas, con precio de contado de $7,850 y con el 13.8% de interés nominal mensual? Suponga que:

a) Los dos pagos son iguales.

b) El segundo es 20% menor que el primero.

24. El 21 de marzo se firmó un pagaré con valor nominal de $15,000 con vencimiento al 15 de octubre. El 5 de enero se firmó otro por un crédito de $20,000 y vencimiento al 20 de junio. Se ha llegado a un acuerdo para reemplazar los dos pagarés, por 3 de la misma cantidad y cuyo vencimiento sea el 15 de mayo, el 16 de junio y el 10 de agosto, respectivamente. ¿De cuánto es cada uno si se cargan intereses del 13.8% de interés nominal mensual? ¿Cuánto se genera por intereses?

25. El 6 de enero la compañía Construcciones del Noroeste, S.A., compra materiales para la construcción de un edificio de departamentos, suscribiendo dos documentos con valor nominal de $135,000 y $82,000, y cuyo vencimiento es, respectivamente, el 19 de marzo y el 12 de mayo siguientes con intereses del 12% efectivo. Determine:

a) El capital, es decir, el precio de los materiales.

b) El cargo por concepto de intereses.

c) El valor descontado de los dos documentos el 15 de febrero con un descuento del 11.3% nominal bimestral.

26. El flujo de capitales que una constructora tiene contemplados en su cuenta bancaria para la construcción de viviendas (en miles de $) es:

Fecha	Ingresos	Egresos
febrero 10	$5,000	
marzo 1		$2,600
abril 10		$1,500
abril 27		$750
mayo 2		$1, 850
junio 10	$2,600	
julio 30		$975

¿Cuánto tendrá en la cuenta el 30 de julio, luego del último retiro, si el saldo anterior al 10 de febrero fue de $75,000 a su favor y la cuenta reditúa el 12.4% de interés anual capitalizable por día?

En los problemas 27 a 46, seleccione la opción correcta justificando su elección.

27. En 2005 las utilidades de una constructora fueron de $765,000, y en 2006 de $782,595. ¿De cuánto serán en 2009 si se sostiene el incremento geométrico?

a) $825,203.40 *b*) $860,427.33 *c*) $837,845.55 *d*) $802,968.03 *e*) Otra

28. ¿En cuántos días se duplica un capital que se invierte al 11.3% anual capitalizable por día?

a) 2,369 *b*) 697 *c*) 1,360 *d*) 2,209 *e*) Otra

29. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por quincena equivalente al 11.8% nominal bimestral?

a) 11.5168368% *b*) 11.3342513% *c*) 11.0068914% *d*) 11.4986353% *e*) Otra

30. Es el porcentaje aproximado en que un capital, que se invierte al 13.65% nominal mensual, crece en año y medio de plazo.

a) 22.58% *b*) 25.04% *c*) 19.68% *d*) 19.44% *e*) Otra

31. ¿Cuánto debe invertirse al 14% efectivo para acumular $30 mil en 7 meses?

a) $27,792.45 *b*) $28,023.42 *c*) $27,473.95 *d*) $27,068.63 *e*) Otra

32. Es el monto que se acumula al 20 de diciembre al invertir $48,500 el 5 de junio anterior, con interés del 9.36% convertible cada día.

a) $50,396.93 *b*) $53,201.41 *c*) $52,236.43 *d*) $51,061.82 *e*) Otra

33. Son los intereses que $37,200 generan en 9 meses, cuando se invierten ganando intereses del 11.25% nominal trimestral.

a) $4,263.91 *b*) $4,037.42 *c*) $3,861.03 *d*) $3.227.85 *e*) Otra

34. Encuentre el tamaño de cada pago que se realizan el 10 de febrero y el 25 de abril, para liquidar un crédito en mercancía por $85,375 del 26 de noviembre anterior con cargos del 12.6% nominal mensual, considerando que son iguales.

a) $45,298.03 *b*) $44,396.78 *c*) $43,996.61 *d*) $44,765.32 *e*) Otra

35. En el problema 34, ¿de qué cantidad es el primer pago si el segundo es un 40% mayor?

a) $36,495.35 *b*) $37,961.43 *c*) $37,076.92 *d*) $36,765.08 *e*) Otra

36. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 35?

a) $3,938.08 *b*) $4,025.41 *c*) $3,609.61 *d*) $3,785.23 *e*) Otra

37. El 28 de enero se endosó un pagaré con vencimiento al 11 de julio, por un préstamo de $36,950. ¿En cuánto se negocia el 3 de mayo, considerando intereses del 9.96% nominal mensual y descuento compuesto del 10.4% nominal diario?

a) $37,895.08 *b*) $36,963.91 *c*) $37,069.08 *d*) $36,125.30 *e*) Otra

38. ¿Cuál es la tasa anual aproximada de descuento compuesto por días, si el 23 de octubre se negocia en $73,800 un documento con valor nominal de $75,205 y vencimiento al 3 de marzo del año siguiente?

a) 7.025387% *b*) 9.352215% *c*) 5.182992% *d*) 6.257112% *e*) Otra

39. Se consigue un préstamo y se firman tres pagarés por $28,750.00 cada uno, que vencen el 4 de mayo, el 23 agosto y el 15 de octubre, con intereses del 14.6% nominal diario. ¿Cuál es la fecha de vencimiento promedio?

a) Agosto 3 *b*) Agosto 15 *c*) Agosto 21 *d*) Septiembre 5 *e*) Otra

40. ¿De qué cantidad es el pago que se realiza el 3 de julio y sustituye a los tres del problema 40?

a) $83,621.45 *b*) $84,096.35 *c*) $85,171.02 *d*) $85,421.35 *e*) Otra

41. ¿A cuánto ascienden los intereses del problema 40 suponiendo que los documentos se firmaron el 3 de marzo anterior?

a) $8,201.43 *b*) $8,023.40 *c*) $7,779.11 *d*) $7,928.23 *e*) Otra

42. ¿Cuánto debe invertirse el 5 de marzo en una cuenta que bonifica el 10.5% efectivo para disponer de $60,000 el 28 de septiembre? Suponga que el 3 de enero se había realizado un depósito por $25,000.

a) $30,429.33 *b*) $31,968.03 *c*) $31,225.79 *d*) $32,125.38 *e*) Otra

43. La Maquiladora de Occidente consiguió un crédito por $750,000 para ampliar sus instalaciones y endosó dos documentos; el primero por $375,000, que vence a los 5 meses, y el segundo con un plazo de 9 meses. ¿De cuánto es este pago si los intereses son del 15% efectivo en los primeros 4 meses, y del 15% nominal mensual en el resto del plazo?

a) $442,016.32 *b*) $435,923.05 *c*) $456,023.43 *d*) $460,321.83 *e*) Otra

44. ¿En cuánto se descuentan los documentos del problema anterior, 3 meses después de que se firmaron con descuento del 14.5% compuesto por mes?

a) $796,087.49 *b*) $781,805.76 *c*) $774,008.91 *d*) $779,467.09 *e*) Otra

45. Diga qué conviene más al inversionista que dispone de $675,000.

a) Llevar su dinero a un banco que bonifica el 10% efectivo.

b) Comprar monedas de oro que incrementan su valor en 0.19% cada semana.

c) Invertir en certificados del Tesoro (CT) que ofrecen el 9.98% simple anual.

d) Comprar onzas de plata si su valor crece 0.194 centavos cada semana.

e) Prestar su dinero si le endosan un documento con valor nominal de $745,000.00.

Considere un año de plazo en todas las opciones.

46. El 3 de mayo se firman los contratos para construir un residencial, con un presupuesto de $35 millones y el mismo día se reciben $7 millones. Localizando los 35 millones en el inicio de obras, el 1 de junio, determine el tamaño del cuarto pago que se realiza el 22 de mayo del año siguiente, si el 23 de octubre y el 10 de febrero se hicieron dos pagos más por $10 millones cada uno. Considere intereses del 12.8% efectivo.

a) $10′095,321.42 *b*) $9′963,286.04 *c*) $10′265,429.41 *d*) $10′379,199.36 *e*) Otra

Capítulo 5

Anualidades

Contenido de la unidad

En el capítulo 3 se estudió cómo distribuir un capital al comienzo del plazo en varios pagos periódicos posteriores, ganando un interés simple. Ahora se estudiarán las *anualidades* que son semejantes pero con tasas de interés compuesto. Y se verá la forma en que varios pagos sucesivos se acumulan en un monto al final del plazo.

El capítulo comienza con algunas definiciones y la clasificación más usual de las anualidades. Continúa con el cálculo de sus elementos como el *capital*, el *valor acumulado*, el *plazo* o número de pagos, el valor de cada pago y, en algunos casos, la *tasa de interés*, aunque esto es poco usual, ya que son las instituciones financieras las que generalmente determinan dichas tasas.

El capítulo concluye con una sección de aplicaciones donde se engloban las fórmulas y los conceptos tratados, con problemas que combinan los diferentes tipos y las modalidades de las anualidades. En esa sección se pretende que el estudiante desarrolle su capacidad para plantear y resolver problemas.

Además, se hace referencia al concepto de *rentas equivalentes*, tan importante como el de las *tasas y plazos equivalentes* estudiados en el capítulo 4. Y se utiliza para explicar un par de fórmulas que sirven para encontrar el valor presente de las anualidades *anticipadas* y el valor futuro de las *ordinarias*.

5.1 Definiciones y clasificación de las anualidades

Aunque literalmente la palabra *anualidad* indica periodos anuales, no necesariamente los pagos se realizan cada año, sino que su frecuencia puede ser cualquiera otra: mensual, semanal, semestral o diaria, como se verá en este capítulo, pero antes, es necesario formular algunas definiciones importantes relacionadas con el tema.

Definición 5.1

Anualidad es una sucesión de pagos generalmente iguales que se realizan a intervalos de tiempo iguales y con interés compuesto.

Quizá los pagos sean iguales entre sí, por la misma cantidad, o diferentes. Ahora se estudiará el primer caso y en capítulos subsecuentes el segundo, es decir, las anualidades de renta variable.

Definición 5.2

Renta de la anualidad es el pago periódico y se expresa con R.

Definición 5.3

Intervalo de pago es el tiempo que hay entre dos pagos sucesivos, y el ***plazo de la anualidad*** es el tiempo entre las fechas inicial del primer periodo y terminal del último.

Definición 5.4

El valor equivalente a las rentas al inicio del plazo se conoce como capital o ***valor presente C***. Su valor al final del plazo es el ***valor futuro*** o ***monto de la anualidad,*** que se expresa con M.

Ejemplo 1

Elementos de una anualidad

Si el propietario de un departamento suscribe un contrato de arrendamiento por un año, para rentarlo en $6,500 por mes, entonces:

El *plazo* es de un año, la *renta* es R = $6,500 y el *intervalo de pago* es un mes.

Además, si el inquilino decide pagar por adelantado en la firma del contrato el equivalente a las 12 mensualidades, entonces el propietario, a causa de los intereses que devenga el dinero anticipado, recibirá un capital menor a los $78,000 que obtendría durante el año. Este capital es el *valor presente* o *valor actual* de la anualidad.

Si al contrario, al recibir cada pago mensual, el propietario lo deposita en un banco que reditúa un interés compuesto, entonces el dinero que al final del año tendrá en la institución bancaria será mayor a los $78,000 y eso será el *monto* o *valor futuro* de la anualidad.

Clasificación de las anualidades

Genéricamente la frecuencia de pagos coincide con la frecuencia de capitalización de intereses, pero es posible que no coincida. Quizá también la renta se haga al inicio de cada periodo o al final; o que la primera se realice en el primer periodo o algunos periodos después. Dependiendo de éstas y otras variantes, las anualidades se clasifican de la siguiente manera:

Según las fechas inicial y terminal del plazo

Anualidad cierta: cuando se estipulan, es decir, se conocen las fechas extremas del plazo. En un crédito automotriz, por ejemplo, se establecen desde la compra el pago del anticipo y el número de mensualidades en las que se liquidará el precio del automóvil.

Anualidad eventual o contingente: cuando no se conoce al menos una de las fechas extremas del plazo. Un ejemplo de este tipo de anualidades es la pensión mensual que de parte del Seguro Social recibe un empleado jubilado, donde la pensión se suspende o cambia de magnitud al fallecer el empleado.

Según los pagos

Anualidad anticipada: cuando los pagos o las rentas se realizan al comienzo de cada periodo. Un ejemplo de este tipo se presenta cuando se deposita cada mes un capital, en una cuenta bancaria comenzando desde la apertura.

Anualidad ordinaria o vencida: cuando los pagos se realizan al final de cada periodo. Un ejemplo es la amortización de un crédito, donde la primera mensualidad se hace al terminar el primer periodo.

De acuerdo con la primera renta

Anualidad inmediata: cuando los pagos se hacen desde el primer periodo. Un ejemplo de esta categoría se presenta en la compra de un departamento, donde el anticipo se paga en abonos comenzando el día de la compra.

Anualidad diferida: cuando el primer pago no se realiza en el primer periodo, sino después. El ejemplo típico de este caso se relaciona con las ventas a crédito del tipo “compre ahora y pague después”, que es un atractivo sistema comercial que permite hacer el primer abono dos o más periodos después de la compra.

Según los intervalos de pago

Anualidad simple: cuando los pagos se realizan en las mismas fechas en que se capitalizan los intereses y coinciden las frecuencias de pagos y de conversión de intereses. Por ejemplo, los depósitos mensuales a una cuenta bancaria que reditúa el 11% de interés anual compuesto por meses.

Anualidad general: cuando los periodos de capitalización de intereses son diferentes a los intervalos de pago. Una renta mensual con intereses capitalizables por trimestre es un ejemplo de esta clase de anualidades.

Otro tipo de anualidades es la **perpetuidad** o **anualidad perpetua**, la cual se caracteriza porque los pagos se realizan por tiempo ilimitado. La beca mensual, determinada por los intereses que genera un capital donado por personas, o instituciones filantrópicas, es un claro ejemplo de estas anualidades.

Todas las anualidades de este capítulo son *ciertas*, las primeras son *simples* e *inmediatas*; también se analizan las *generales*, tomando en cuenta que pueden convertirse en simples utilizando las tasas equivalentes que se estudiaron en el capítulo anterior.

También es cierto que los problemas de anualidades se resuelven:

a) Con tablas financieras con las que se obtiene el valor presente o el valor acumulado para *np* rentas unitarias. En el apéndice de este libro están las tablas (véase www.pearsoneducacion.net/villalobos) para algunas tasas *i/p* y algunos plazos o número de rentas *np*.

b) Empleando fórmulas que para cada clase de anualidad existen y aquí se deducen, ya que la gran mayoría de los ejercicios en este libro se resuelven de esta manera.

c) Utilizando solamente dos fórmulas, la del interés compuesto y la de la suma de los primeros términos de una progresión geométrica, tal como se deducen las fórmulas de las anualidades, en las secciones 5.2 y 5.3.

d) Con programas y paquetería de software que hay en el mercado, que son de fácil acceso para el usuario y que fueron elaborados con fundamento en los conceptos y la teoría de las matemáticas financieras. Uno de estos soportes es el que se consigue con la editorial que publica este libro.

Para decidir con acierto cómo plantear o a qué clase de anualidad corresponde o se ajusta una situación particular, se sugiere considerar lo siguiente antes de entrar en detalles del tema.

En vez de la recta horizontal que hasta ahora hemos utilizado para los diagramas de tiempo, utilizaremos rectángulos que representan los periodos, y en cada uno en su extremo derecho o izquierdo se grafican flechas verticales indicando la renta o pago de la anualidad, utilizando, claro, puntos suspensivos para representarlos a todos sin tener que graficarlos.

Si una persona deposita, digamos, $3,000 cada mes durante siete meses, entonces una gráfica será la figura 5.1, donde los depósitos están al final de cada periodo, y el monto que se acumula está al final del último rectángulo.

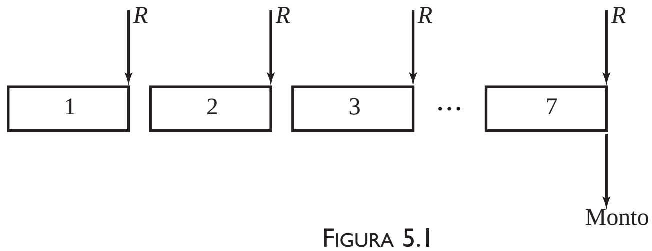


FIGURA 5.1

En esta gráfica se aprecian dos puntos importantes.

- El plazo real no es de 7 meses sino solamente de 6, ya que el primer mes no interviene, salvo que el trato se haya realizado al inicio; en la práctica, lo más común es que el primer depósito se realice al comenzar el plazo.
- En el momento en que se retira el monto acumulado de los anteriores, se realiza el último depósito. Esto no tiene razón de ser ya que este pago no se incluiría.

En consecuencia, cuando de la sucesión de rentas se requiera el monto, éstas deberán considerarse al inicio de cada periodo, siendo el diagrama apropiado el de la figura 5.2, donde las flechas horizontales indican que cada renta se traslada en el tiempo hasta el final del plazo, sumando los intereses de cada una y sumándolas todas.

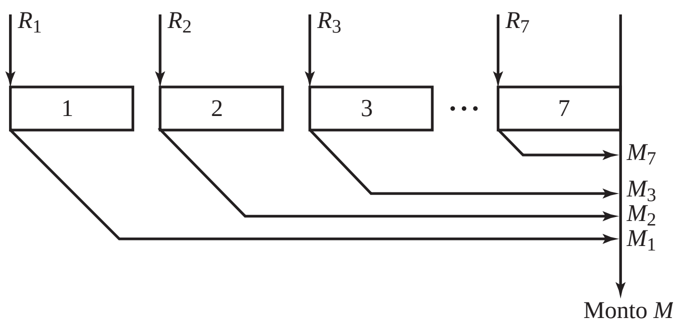


FIGURA 5.2

Contrariamente, si de las rentas se requiere el valor presente al comenzar el plazo, entonces éstas deberán ubicarse al final de cada periodo, como se aprecia en la figura 5.3.

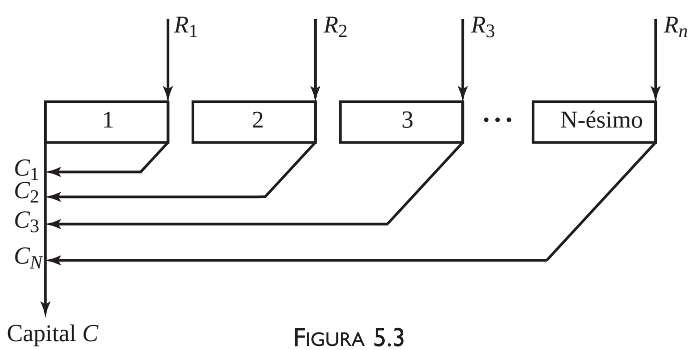
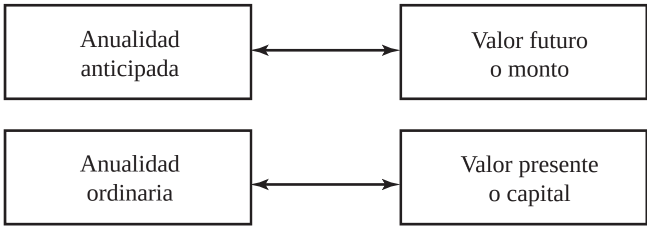


FIGURA 5.3

Esto significa que al no especificarse lo contrario las anualidades anticipadas se asociarán con el valor futuro al término del plazo, mientras que las ordinarias serán asociadas con su valor presente al comenzar el plazo; es decir,



Por supuesto que lo anterior no es una regla y, como se estudiará después, en muchas ocasiones el monto se relaciona con rentas vencidas; y el valor presente, con una serie de rentas anticipadas.

Por otro lado, como se aprecia en las figuras 5.4 y 5.5, cada renta hará las veces de capital al considerar el monto de la anualidad, y será un monto cuando se trate del valor presente.

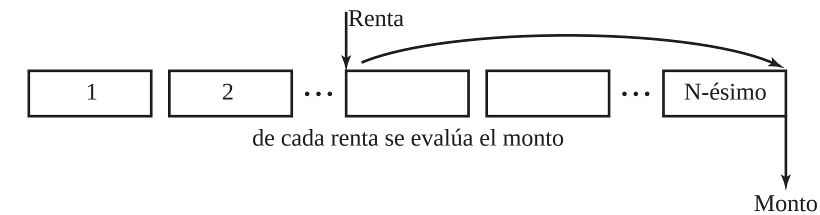


FIGURA 5.4

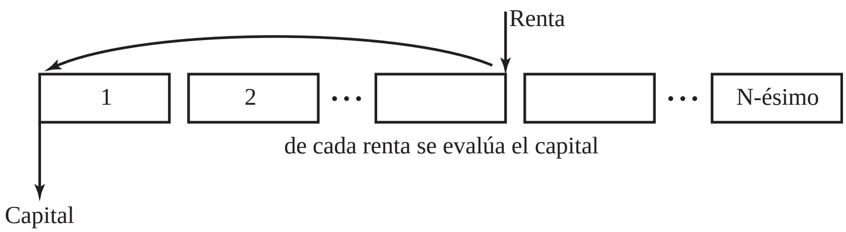


FIGURA 5.5

Ejercicios 5.1

1. Defina y explique *plazo* e *intervalo de pago* en las anualidades.

2. ¿Cómo se definen las *anualidades* y la *renta de una anualidad*?

3. ¿Qué son el *monto* y el *valor presente* de una anualidad?

4. Mencione cinco ejemplos de anualidades en la vida real.
5. En los ejemplos del problema 4, defina el *monto* o el *valor presente*, el *plazo*, la *renta*, el intervalo *de pago* y la *tasa de interés*.
6. Si usted deposita $1,350 cada quincena durante 2 años y al final le devuelven $45,000, determine cuál son la *renta,* el *plazo,* los *intereses*, el *valor futuro* y el *intervalo de pago* de la anualidad.

Recuerde que los intereses son la diferencia entre el monto y el capital.

7. Mencione las características principales de las anualidades:

a) Diferidas
b) Contingentes
c) Ciertas
d) Simples
e) Generales
f) Anticipadas
g) Inmediatas
h) Perpetuas

8. Mencione la diferencia básica entre la anualidad:
a) *inmediata* y *diferida*
b) *simple* y *general*
c) *cierta* y *contingente*
d) *ordinaria* y *anticipada*

9. Justificando su respuesta, determine si es posible que una anualidad sea, al mismo tiempo,

a) ordinaria, general y anticipada.
b) inmediata, simple y anticipada.
c) vencida, diferida, simple y cierta.
d) general, ordinaria, diferida y contingente.
e) ordinaria, simple y cierta.
f) contingente, cierta y general.
g) anticipada, cierta, simple y diferida.

10. Describa con detalle las anualidades que sí son posibles en el problema 9.
11. Mencione y describa con brevedad los cuatro métodos para evaluar los elementos de las anualidades.
12. ¿Por qué causas una serie de depósitos periódicos que se acumulan en un monto al final del plazo no debiera considerarse vencida?
13. Mencione dos razones por las que los pagos periódicos en una anualidad no debieran ser anticipados, cuando se relacionan con su valor presente.
14. ¿Qué diferencia encuentra entre las *anualidades* y *amortizaciones* que se estudiaron en el capítulo 3?

5.2 Monto de una anualidad anticipada

Se ha dicho que una anualidad es anticipada si los pagos se realizan al comenzar cada periodo.

Como se aprecia en el ejemplo 1, para hallar el monto de una anualidad anticipada, a cada renta se le agregan los intereses que dependen del número de periodos que haya entre la renta y el final del plazo. Por lo tanto, la fórmula del interés compuesto se emplea para cada monto parcial, después se suman y se obtiene una fórmula general.

Cabe señalar que cualquier anualidad se resuelve aplicando apropiadamente esta fórmula general, ya que si se tiene un valor único equivalente a todas las rentas, al término del plazo éste se traslada a cualquiera otra fecha con la fórmula del interés compuesto, como se ilustra en la solución alterna del ejemplo 2 de la sección 5.3.

Ejemplo 1

Deducción de la fórmula general

Obtenga el monto que se acumula en 2 años, si se depositan $1,500 al inicio de cada mes en un banco que abona una tasa del 24% anual capitalizable por mes.

solución

La anualidad es *simple* porque coinciden la frecuencia de conversión y la de pagos; es *cierta* porque se conoce el número de rentas; es *inmediata* porque desde el primer periodo se hacen los depósitos; y es *anticipada* porque estos últimos se realizan al principio de cada periodo mensual.

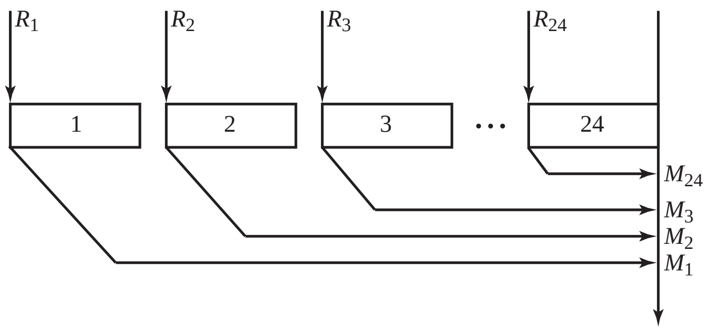


FIGURA 5.6

Como se observa en la figura 5.6, el primer depósito genera intereses durante 24 periodos mensuales, el segundo durante 23 meses y así sucesivamente, hasta el último que gana solamente durante un mes.

Por lo tanto, los montos parciales son, respectivamente:

$$M_1 = 1,500(1 + 0.24/12)^{24} \qquad M = C\,(1 + i/p)^{np}$$
$$M_2 = 1,500(1 + 0.02)^{23}$$
$$M_3 = 1,500(1.02)^{22}$$
$$\vdots$$
$$M_{23} = 1,500(1.02)^2$$
$$M_{24} = 1,500(1.02)$$

El valor futuro o monto de la anualidad es la suma de todos los anteriores, que en orden inverso es:

$$M = 1{,}500(1.02) + 1{,}500(1.02)^2 + \cdots + 1{,}500(1.02)^{24}$$

Se factoriza la renta \$1,500, y lo que queda entre los paréntesis corresponde a los términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 1.02$; la razón es también $r = 1.02$ y el número de términos es $m = 24$. Por lo tanto:

$$M = 1{,}500[1.02 + (1.02)^2 + (1.02)^3 + \cdots + (1.02)^{24}] \qquad \textbf{(A)}$$

La suma, según la ecuación 2.4, es

$$\text{suma} = 1.02\left(\frac{1-(1.02)^{24}}{1-1.02}\right) \qquad \text{suma} = a_1\frac{1-r^m}{1-r}$$

$$\text{suma} = 1.02\left(\frac{1-1.608437249}{-0.02}\right)$$

$$\text{suma} = 1.02(30.42186245) \quad \text{o} \quad \text{suma} = 31.0302997$$

Si se sustituye este resultado en la ecuación **(A)**, se tendrá que el monto total es:

$$M = 1{,}500(31.0302997) \quad \text{o} \quad M = \$46{,}545.45$$

Para generalizar, note que el primer término y la razón son:

$$a_1 = r = 1 + 0.24/12 \quad \text{o} \quad a_1 = r = 1 + i/p$$

y el número de términos es el número de rentas:

$$m = 2(12) = 24 \quad \text{o} \quad m = np$$

La suma es, entonces:

$$\text{suma} = (1+i/p)\frac{1-(1+i/p)^{np}}{1-(1+i/p)} \qquad \text{ya que } S = a_1\frac{1-r^m}{1-r}$$

$$\text{suma} = (1+i/p)\frac{1-(1+i/p)}{-i/p} \qquad \text{se cancelan los unos del denominador}$$

$$\text{suma} = (1+i/p)\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p} \qquad a - b = -(a-b)$$

Resultado que se formaliza en el siguiente teorema:

Teorema 5.1

El **monto acumulado** de np depósitos anticipados en las anualidades simples y ciertas es:

$$M = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right) \text{ donde}$$

R es el pago periódico, n es el plazo en años, e i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año.

De manera semejante a los otros, en lo sucesivo se hará referencia a este teorema como "ecuación 5.1", "teorema 5.1" o "ecuación del teorema 5.1".

Ejemplo 2

Resuelva el ejemplo 1 con la ecuación 5.1.

solución

Los valores a reemplazar por las literales son:

R = 1,500, la renta mensual

p = 12, la frecuencia de conversión y la de pagos son mensuales

n = 2, los años del plazo

np = 24, el total de rentas

i = 0.24, la tasa de interés anual capitalizable por mes

i/p = 0.02, la tasa por periodo mensual. Entonces,

$$M = 1{,}500\ (1+0.02)\left(\frac{(1.02)^{24}-1}{0.02}\right)$$

$$M = 1{,}500(1.02)(30.42186245) \quad \text{o} \quad M = \$46{,}545.45$$

Note que más que el valor de n, el plazo en años, es más útil el de np, el número de rentas.

Ejemplo 3

Plazo en inversiones

¿En cuánto tiempo se acumulan $40,000 en una cuenta bancaria que paga intereses del 8.06% anual capitalizable por semana, si se depositan $2,650 al inicio de cada semana?

solución

En la ecuación 5.1 se reemplazan los valores:

$M = 40{,}000$, el monto que se pretende.

$R = 2{,}650$, la renta semanal.

$i = 0.0806$, la tasa de interés anual capitalizable por semana.

$i/p = 0.0806/52 = 0.\ 00155$, la tasa semanal capitalizable por semana.

La incógnita es n, el plazo en años o $np = x$, el número de rentas; entonces:

$$40{,}000 = 2{,}650(1 + 0.\ 00155)\left[\frac{(1.00155)^{x} - 1}{0.00155}\right] \qquad \text{(Teorema 5.1)}$$

Para despejar x, 2,650(1.000155) pasa dividiendo, y 0.000155 pasa multiplicando al lado izquierdo; luego el 1 pasa sumando, es decir:*

$$\frac{40{,}000}{2{,}650(1.00155)}(0.00155) + 1 = (1.\ 00155)^{x}$$

$$15.0709796\ (0.\ 00155) + 1 = (1.\ 00155)^{x}$$

o

$$(1.\ 00155)^{x} = 1.023360018$$

Como siempre que la incógnita está en el exponente, se despeja empleando logaritmos, ya que "si dos números positivos son iguales, entonces sus logaritmos también son iguales". Es decir:

$$\text{Ln}(1.\ 00155)^{x} = \text{Ln}(1.023360018)$$

$$(x)\text{Ln}(1.\ 00155) = \text{Ln}(1.023360018), \qquad \text{ya que Ln}(a^{n}) = (n)\text{Ln}(a)$$

$$x = \text{Ln}(1.023360018)/\text{Ln}(1.00155)$$

$$= 0.023091349/0.0015488$$

$$x = 14.90918709$$

Puesto que el número de rentas, $x = np$, debe ser un entero, el resultado se redondea dando lugar a que la renta o el monto varíen un poco.

Por ejemplo, con $np = 15$, el entero más cercano, resulta que la renta es:

$$40{,}000 = R(1.\ 00155)\left(\frac{(1.00155)^{15} - 1}{0.00155}\right)$$

$$40{,}000 = R(15.18735236)$$

de donde

$$R = 40{,}000/15.18735236 \qquad \text{o} \qquad R = \$2{,}633.77$$

* Esto es equivalente a decir que los dos lados de la igualdad se dividen entre 2,650(1.000155), se multiplican por 0.000155 y el 1 se suma en ambos lados.

Ejemplo 4

Tasa nominal quincenal y recuperación de pagaré

¿Qué tasa de interés capitalizable por quincena le están cargando a la señora de Ramírez, si para recuperar un pagaré con valor nominal de \$39,750, incluidos los intereses, hace 15 pagos quincenales anticipados de \$2,400?

solución

Se trata de una anualidad anticipada, donde:

M = 39,750, el valor futuro

R = 2,400, la renta quincenal

p = 24, la frecuencia de pagos y de conversión

n = 15/24, el plazo en años

np = 15, el número de rentas

i = la incógnita

por lo tanto, $$39{,}750 = 2{,}400(1 + i/24)\left(\frac{(1+i/24)^{15}-1}{i/24}\right)$$

Para despejar i, se sustituye $i/24$ por x, y se dividen los dos miembros entre 2,400.

$$16.5625 = (1 + x)\left(\frac{(1+x)^{15}-1}{x}\right)$$

En la tabla 4 del apéndice se encuentran algunos valores de la expresión:

$$\frac{(1+i/p)^{15}-1}{i/p}$$

Ahí se busca un valor que sea poco menor que 16.5625 en el renglón que corresponde a np = 15. El resultado obtenido para la tasa i/p = 0.0125 es el valor 16.3863, el cual es una buena aproximación para la incógnita.

Para determinar el valor de i/p con mayor exactitud, o para encontrarlo sin el uso de tablas, se procede con iteraciones, dando a x valores sucesivos hasta alcanzar la precisión deseada. A continuación se indican algunos de tales valores.

Primero se simplifica la ecuación anterior, multiplicándola por x y otras operaciones algebraicas.

$$16.5625(x) = (l + x)[(1 + x)^{15} \_ 1]$$

$$16.5625(x) = (l + x)^{16} \_ (l + x) \qquad aa^n = a^{1+n}$$

$$(l + x)^{16} - 1 - x - 16.5625(x) = 0 \text{ o } (l + x)^{16} - 17.5625(x) = 1$$

Si $x = 0.01$,

$$(1.01)^{16} - 17.5625(0.01) = 0.996953645$$

Si $x = 0.02$,

$$(1.01)^{16} - 17.5625(0.01) = 1.021535705$$

Si con $x = 0.01$ resultó menor que 1 y con $x = 0.02$ quedó mayor que 1, entonces el valor que se busca para x debe estar entre 0.01 y 0.02, argumento que sirve para continuar con las iteraciones.

$$\text{Si } x = 0.015\text{: } (1.015)^{16} - 17.5625(0.015) = 1.005548048$$

$$\text{Si } x = 0.012\text{: } (1.012)^{16} - 17.5625(0.012) = 0.999536531$$

Continuando con el proceso se verá que cuando

$x = 0.012287288$, el resultado es 1.000000001

entonces, $x = i/24 = 0.012287288$

de donde $i = (0.012287288)24$, $i = 0.294894912$ o 29.4894912%, la cual es la tasa anual capitalizable por quincena que le cargan a la señora de Ramírez. Y puede comprobarse reemplazándola en la primera ecuación del desarrollo anterior.

Solución alterna

Este resultado se obtiene más fácil con la calculadora financiera, la HP12C por ejemplo, y las siguientes instrucciones:

$\boxed{\text{f}}$ $\boxed{\text{CLX}}$ 39,750 $\boxed{\text{FV}}$ 2,400 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$ 15 $\boxed{\text{n}}$

$\boxed{\text{i}}$ 24 $\boxed{\text{x}}$ 29.48949002

Tasa de interés variable

Ejemplo 5

Monto en cuenta de ahorros e intereses

¿Cuánto se acumula en una cuenta de ahorros con 32 pagos quincenales de $625 cada uno, si la tasa de interés nominal quincenal en los primeros 5 meses es del 22.32%, y después aumenta 2.4 puntos porcentuales por año cada trimestre? ¿Cuánto se genera por concepto de intereses?

solución

a) El ejercicio se resuelve considerando cuatro anualidades de 10, 8, 8 y 6 rentas quincenales cada una, como se ilustra en la figura 5.7.

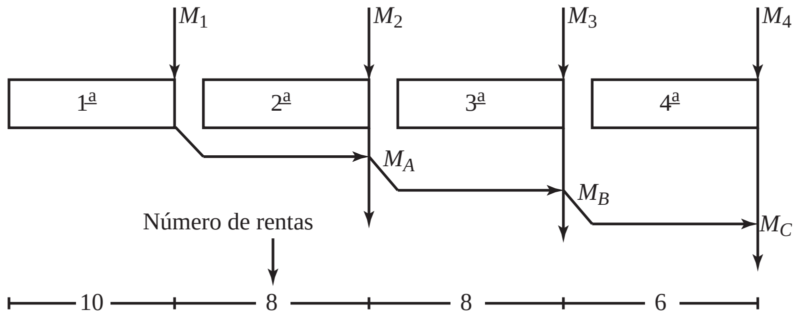


FIGURA 5.7

El monto de la primera, puesto que la tasa por quincena es $i/p = 0.2232/24 = 0.0093$, es

$$M_1 = 625(1 + 0.0093)\left(\frac{(1.0093)^{10} - 1}{0.0093}\right)$$

$$M_1 = 625(1.0093)(10.42904957) \quad \text{o} \quad M_1 = \$6,578.77$$

que se traslada hasta el final de la segunda anualidad empleando la fórmula del interés compuesto, con la nueva tasa que es 2.4 puntos mayor que la primera.

$i = 0.2232 + 0.024 = 0.2472$ o $i/24 = 0.2472/24 = 0.0103$, quincenal compuesto por quincena; entonces:

$$M_A = 6,578.77(1.0103)^8$$

$$M_A = 6,578.77(1.085432507)$$

$$M_A = \$7,140.81$$

Este monto deberá sumarse con el monto acumulado M_2 de la segunda anualidad:

$$M_2 = 625(1.0103)\left(\frac{(1.0103)^8 - 1}{0.0103}\right)$$

$$M_2 = 625(1.0103)(8.294418155)$$

$$M_2 = \$5,237.41$$

El acumulado de las primeras 18 rentas es, entonces:

$$M_A + M_2 = 7,140.81 + 5,237.41 = 12,378.22$$

que también se traslada con la nueva tasa, la del tercer grupo de rentas, hasta el final de la tercera anualidad, ocho quincenas después.

$$M_B = 12,378.22(1 + 0.2712/24)^8$$

$$M_B = 12,378.22(1.094057274) \quad \text{o} \quad M_B = 13,542.48$$

monto que debe sumarse al monto M_3 del tercer grupo de rentas

$$M_3 = 625(1.0113)\left(\frac{(1.0113)^8 - 1}{0.0113}\right)$$

$$M_3 = 625(1.0113)(8.323652566) \quad \text{o} \quad M_3 = 5{,}261.07$$

entonces,

$$M_B + M_3 = 13{,}542.48 + 5{,}261.07$$
$$M_B + M_3 = 18{,}803.55$$

que es el acumulado de los 26 depósitos al término de la tercera anualidad. Este monto se lleva hasta la fecha terminal del plazo y, finalmente, se suma con el monto M_4 de la última que comprende seis quincenas.

La tasa de interés anual es ahora

$$i = 0.2232 + 3(0.024) \qquad \text{o} \qquad i = 0.2952$$

e $i/24 = 0.0123$ es la quincenal capitalizable por quincena, entonces

$$M_C = 18{,}803.55(1.0123)^6 \quad \text{o} \quad M_C = 20{,}234.63 \quad \text{y}$$

$$M_4 = 625(1.0123)\left(\frac{(1.0123)^6 - 1}{0.0123}\right)$$

$$M_4 = 625(1.0123)(6.187553821) \quad \text{o} \quad M_4 = 3{,}914.79$$

Consecuentemente el monto acumulado de los 32 depósitos quincenales en la cuenta de ahorros al final del plazo es:

$$M_C + M_4 = 20{,}234.63 + 3{,}914.79$$
$$M_C + M_4 = \$24{,}149.42$$

b) Los intereses son la diferencia entre este monto y el total invertido en los 32 pagos quincenales.

$$I = 24{,}149.42 - 32(625.00)$$
$$I = \$4{,}149.42$$

Ejercicios 5.2

l. Explique las características de las anualidades anticipadas.

2. ¿Cuánto debe invertir cada quincena en una cuenta que abona el 9.06% de interés compuesto por quincena, durante 6 meses, para disponer de $20,000 al final?

3. ¿En cuánto tiempo se acumulan $15,000 con depósitos semanales de $445 y una tasa de interés del 6.5% anual compuesto por semana?

4. ¿Cuánto se acumula en 8 meses con depósitos quincenales de $700, en una cuenta que abona el 10.24% de interés compuesto por mes?

5. ¿Cuántos pagos mensuales de $1,800 se necesitan para acumular $25,000, a una tasa de interés del 11.4% nominal mensual?

6. ¿Cuánto debe invertir quincenalmente la contadora Rosalía durante 7 meses, para recuperar un pagaré que firmó por un crédito de $35,000 al principio, a una tasa de interés del 12% simple anual? Suponga que su inversión reditúa el 13.02% de interés compuesto por quincena.

7. ¿Qué le conviene más al comprador de un reproductor de DVD cuyo precio es de $3,200: pagarla de contado en ese precio o en 8 abonos semanales anticipados de $375, antes de adquirirla?

Suponga que el dinero reditúa el 9.52% de interés compuesto por semana.

8. ¿Cuánto gana en intereses la licenciada Claudia, al realizar 20 depósitos quincenales anticipados de $450 que devengan el 11.20% de interés anual compuesto por quincena?

9. Determine cuál alternativa acumula más dinero en un año y medio:

   a) Un pago único al principio de $22,500 y una tasa de interés del 10% anual simple.

   b) 18 rentas mensuales anticipados de $1,380 ganando el 9.06% de interés compuesto por mes.

   c) 6 pagos trimestrales de $4,050 y una tasa de interés del 11% anual compuesto por trimestre.

   d) 3 depósitos semestrales anticipadas de $7,800 y una tasa de interés del 12.36% efectiva.

10. Al nacer su primogénito, un padre de familia realiza un depósito bancario por $7,000, ¿cuánto debe depositar al comenzar cada semestre, desde el segundo, para disponer de $150,000 cuando su hijo cumpla los 7 años de edad, suponiendo que la inversión reditúa el 11.6% de interés nominal semestral? ¿De cuánto dispondría a los 15 años de edad si continúa con los depósitos? Obtenga los intereses que ganó a los 15 años del primogénito.

11. ¿Con cuántas rentas mensuales anticipadas de $875 se acumula un monto de $14,000? Si la tasa de interés es del 9.72% anual capitalizable por mes?

12. Al comenzar su carrera profesional, cuya duración es de 9 semestres, un estudiante decide ahorrar $500 al inicio de cada mes, durante todo ese tiempo, en un banco que paga intereses del 21.6% anual capitalizable por mes. ¿De cuánto dinero dispondrá 2 años después de haber concluido sus estudios?

13. ¿Cuánto debe invertir cada quincena, al principio, una persona que pretende acumular $54,000 en un año y medio, considerando que su inversión gana el 11.76% de interés anual compuesto por quincena?

14. ¿Cuánto dinero se acumula con 15 pagos mensuales anticipados de $850, si la tasa de interés anual capitalizable por mes en los primeros 4 meses es del 9.6% y después aumenta 1.8 puntos porcentuales cada semestre? Evalúe los intereses.

15. ¿Cuántos depósitos semanales de $375 se necesitan para acumular $8,500 con intereses del 12.48% anual compuesto por semana?

16. ¿Con cuál de los siguientes planes de ahorro un empleado acumula más dinero en un periodo de dos años?

a) Depositando $400 al inicio de cada mes ganando intereses del 12.6% anual capitalizable por mes.

b) Invirtiendo $800 al comenzar cada bimestre con intereses del 12.6% nominal bimestral.

c) Ahorrando $200 cada quincena, al inicio, devengando intereses del 11.28% compuesto por quincena.

17. ¿Cuánto acumula la licenciada Martha Patricia con 26 pagos quincenales de $425 en un banco que le da a ganar el 19.8% de interés anual, capitalizable por quincena, en los primeros 3 meses, el 22.2% en los 4 meses siguientes y el 24% en los últimos 6 meses del plazo?

18. ¿Cuánto dinero tiene Adriana si desde hace 5 años ha estado ahorrando $650 al inicio de cada quincena en un banco que le ha pagado el 16.8% compuesto por quincena?

19. ¿Cuántos abonos semanales de $1,735 se requieren para acumular $25,000, si se devengan intereses del 20.28% anual compuesto por semana?

20. Para rescatar un pagaré que se firmó por un crédito en mercancía de $179,500, intereses del 15% simple anual y un plazo de 14 meses, un comerciante en abarrotes deposita $41,600 cada bimestre, en un banco que le da intereses del 11.70% anual compuesto por bimestre. ¿Cuántos abonos deberá hacer antes de que se venza el documento?

21. ¿Cuánto debe depositar cada mes al inicio, el arquitecto Hernández durante 8 meses a partir del segundo para acumular $125,000, que piensa destinar a la remodelación de sus oficinas, si su inversión devenga intereses del 12.9% anual capitalizable por mes y abrió la cuenta con $30,000?

En los problemas 22 a 36 seleccione la opción correcta justificando la elección.

22. ¿Cuánto se acumula con 13 depósitos semanales de $1,750 en una cuenta que bonifica intereses del 9.10% anual capitalizable por semana?

a) $23,653.09 *b*) $24,786.42 *c*) $23,030.65 *d*) $25,093.18 *e*) Otra

23. ¿Cuánto debe invertirse cada mes al 13.8% capitalizable por mes, para disponer de $129,000 en un año?

a) $9,322.45 *b*) $10,005.38 *c*) $9,972.22 *d*) $9,725.40 *e*) Otra

24. ¿En cuánto tiempo se acumulan $38,850, depositando $2,500 cada quincena al 10.5% nominal quincenal?

a) 16 *b*) 15 *c*) 14 *d*) 13 *e*) Otra

25. ¿Cuánto se devenga por intereses en el problema 24?

a) $1,450 *b*) $1,430 *c*) $1,350 *d*) $1,270 *e*) Otra

26. El matemático González firma un documento por un crédito de $32,570, con cargos del 13% simple anual y plazo de 6 meses. ¿Cuánto debe depositar cada semana en una cuenta que bonifica el 11.44% nominal semanal para librar el pagaré? Suponga que abre la cuenta cuando firma el documento.

a) $1,311.75 *b*) $1,250.43 *c*) $1,297.00 *d*) $1,294.94 *e*) Otra

27. ¿Cuánto ganó o perdió por intereses el matemático del problema 26?

a) perdió $1,098.44 *b*) ganó $502.75 *c*) perdió $502.75 *d*) ganó $785.32 *e*) Otra

28. Un estudiante abre una cuenta en un banco que paga el 15.6% nominal quincenal y continúa depositando $1,750 cada quincena al inicio. 20 meses después de que la abrió tiene acumulados $90,857.45. ¿Con cuánto inició sus ahorros?

a) $8,250 *b*) $10,000 *c*) $11,750 *d*) $9,000 *e*) Otra

29. ¿Cuántos pagos bimestrales de $8,193, se necesitan para alcanzar un monto de $70,000, si se devengan intereses del 8.76% capitalizable por bimestre?

a) 10 *b*) 9 *c*) 7 *d*) 8 *e*) Otra

30. Para ayudar con los gastos de su graduación, una pareja de estudiantes decide depositar $450 cada quincena, desde que comienzan su carrera profesional. ¿Cuánto acumulan si el primer año ganan el 8.4% de interés anual capitalizable por quincena, los siguientes dos les bonifican el 9.12% y los últimos 3 semestres, el 9.60% nominal quincenal?

a) $61,243.09 *b*) $60,110.07 *c*) $60,425.08 *d*) $60,021.32 *e*) Otra

31. ¿Cuánto pagó por intereses la pareja del problema 30?

a) $11,510.07 *b*) $11,623.21 *c*) $12,008.72 *d*) $11,927.72 *e*) Otra

32. Durante los primeros 6 años de vida de su hijo, un padre de familia deposita $750 cada mes en un banco que durante ese periodo bonifica intereses del 15.84% nominal mensual. Para los siguientes 5 años incrementa sus depósitos en un 20%, pero la tasa de interés se reduce al 15.48% nominal mensual y durante los siguientes 7 años incrementa los depósitos mensuales otro 15%, pero en un lapso el banco le bonificará el 17% efectivo. ¿Cuánto dinero tiene cuando el hijo llega a los 18 años de edad?

a) $859,343.09 *b*) $600,302.48 *c*) $429,425.71 *d*) $961,496.67 *e*) Otra

33. ¿Cuánto ganó por intereses el padre del problema 32?

a) $763,556.67 *b*) $302,465.03 *c*) $528,293.45 *d*) $899,008.35 *e*) Otra

34. Para renovar su maquinaria y equipamiento, la Impresora Occidental consigue un crédito y firma un documento con valor nominal de $1’950,000 incluyendo intereses y vencimiento a 13 meses. Simultáneamente, abre una cuenta con depósitos mensuales de $125,000 e intereses del 10.2%. ¿Cuánto le faltará para liberar su pagaré?

a) $175,243.25 *b*) $302,425.58 *c*) $273,429.82 *d*) $224,946.96 *e*) Otra

35. En el problema 34, ¿por qué capital fue el crédito otorgado a la Impresora, si le cargaron el 12% efectivo?

a) $1’724,706.05 *b*) $1’689,423.52 *c*) $1’605.405.38 *d*) $1’ 928.878.43 *e*) Otra

36. En el problema 34, ¿cuánto dinero pagó por concepto de intereses a la Impresora Occidental?

a) $127,943.51 *b*) $125,240.91 *c*) $115,201.43 *d*) $140,810.03 *e*) Otra

5.3 Valor presente de las anualidades ordinarias

Estas anualidades se caracterizan porque los pagos se realizan al final de cada periodo, razón por la cual se conocen también como *anualidades vencidas*. Lo más común, como se dijo antes, es asociar las rentas con su valor equivalente al comenzar el plazo, es decir, con su valor presente C que se obtiene con la fórmula que se desarrolla en el primer ejemplo de esta sección.

Las aplicaciones más comunes de estas anualidades se refieren a la amortización de deudas, como créditos hipotecarios, automotrices o cualquier otro que se liquida con pagos periódicos y cargos de interés compuesto.

Ejemplo 1

Deducción de la fórmula general

¿Cuánto podrá retirar cada viernes durante 8 meses el ingeniero Serrano, si al comienzo del plazo deposita $30,000 devengando intereses del 26% compuesto por semana?

solución

Los rectángulos de la gráfica de la figura 5.8 representan las semanas. Al final de cada uno se ubican las rentas.

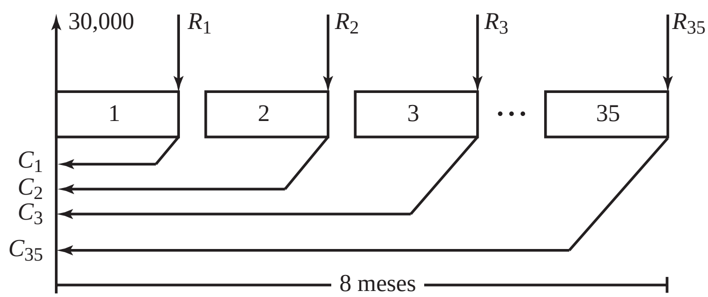


FIGURA 5.8

El número de semanas que hay en 8 meses es

$$(8/12)52 = 34.67,$$

resultado que se redondea como 35 semanas.

El proceso consiste en encontrar al inicio del plazo el valor presente C de cada renta, para después igualar la suma de todos con los $30,000 de la inversión inicial, como si el inicio fuese una fecha focal.

Se emplea la fórmula del interés compuesto:

$$M = C(1 + i/p)^{np}$$

de donde se despeja C dividiendo los dos lados entre $(1 + i/p)^{np}$.

$$M/(1 + i/p)^{np} = C \quad \text{o} \quad C = M(1 + i/p)^{-np} \quad \text{ya que} \quad a/b^n = ab^{-n}$$

La tasa por periodo es $i/p = 0.26/52 = 0.005$ y el plazo en cada renta es, respectivamente, de 1, 2, 3, …, hasta 35 meses en la última. Por lo tanto, el valor actual de cada una es:

$$\begin{aligned} C_1 &= R_1(1 + 0.005)^{-1} \\ C_2 &= R_2(1.005)^{-2} \\ C_3 &= R_3(1.005)^{-3} \\ &\vdots \\ C_{35} &= R_{35}(1.005)^{-35} \end{aligned}$$

y cuya suma deberá ser igual a los $30,000 iniciales, es decir:

$$R_1(1.005)^{-1} + R_2(1.005)^{-2} + \ldots + R_{35}(1.005)^{-35} = 30{,}000.$$

Puesto que todas las rentas son iguales, éstas se reemplazan por R que luego se factoriza.

(A) $$R[(1.005)^{-1} + (1.005)^{-2} + \ldots + (1.005)^{-35}] = 30{,}000$$

De nuevo, la suma entre paréntesis es una serie geométrica con 35 términos, donde el primero y la razón son:

$a_1 = r = (1.005)^{-1}$ porque $r = a_2/a_1$, por lo tanto, está dada por

$$\text{suma} = (1.005)^{-1}\left(\frac{1-((1.005)^{-1})^{-35}}{1-(1.005)^{-1}}\right) \qquad S = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\text{suma} = \frac{1}{1.005}\left(\frac{1-(1.005)^{35}}{1-(1.005)^{-1}}\right) \qquad a^{-1} = 1/a, \text{ si } a \neq 0$$

$$\text{suma} = \frac{1-(1.005)^{-35}}{1.005-1} \qquad aa^{-1} = 1, \quad \text{siempre que } a \neq 0$$

(B) $$\text{suma} = \frac{1-(1.005)^{-35}}{0.005} \qquad 1.005 - 1 = 0.005$$

$$\text{suma} = 32.03537132$$

Este resultado se sustituye por el paréntesis de la ecuación **(A)**:

$$R[32.03537132] = 30{,}000$$

de donde la renta semanal queda como:

$$R = 30{,}000/32.03537132 \quad \text{o} \quad R = \$936.46$$

Para generalizar, note que la suma entre los paréntesis en la misma ecuación **(A)** está dada por:

$$\text{suma} = (1+1/p)^{-1}\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{1-(1+i/p)^{-1}}\right)$$

que con algunos pasos algebraicos, como en el desarrollo anterior, se simplifica como:

$$\text{suma} = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

tal como resultó en la ecuación **(B)**.

En la tabla 5 del apéndice están algunos valores para esta expresión, que en ocasiones se denota como $a_{\overline{N}|i}$: "a subíndice N al i", que corresponde al valor presente de N, es decir, np rentas vencidas de \$1 cada una.

Si se reemplaza la suma en la ecuación **(A)**, resulta la fórmula del siguiente teorema.

Teorema 5.2

El valor presente C de una anualidad vencida, simple, cierta e inmediata está dado por:

$$C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

donde:

R es la renta por periodo.
i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año.
p es la frecuencia de conversión de intereses y de pagos, y
n es el plazo en años.

Como en todas las fórmulas, es posible cuestionar cualquiera de las literales, por lo que para despejar una, lo mejor, insistimos, es hacerlo después de haber sustituido los valores que se conocen.

Ejemplo 2

Valor presente de un seguro de vida

F

La beneficiaria de un seguro de vida recibiría \$3,100 mensuales durante 10 años, aunque prefiere que le den el equivalente total al inicio del plazo. ¿Cuánto le darán si el dinero reditúa en promedio el 19.35% anual compuesto por mes?

solución

Los valores para reemplazar en la ecuación 5.2 son:

R = 3,100, la renta mensual
n = 10, el plazo en años
p = 12, porque son mensuales
i = 0.1935 o i/p = 0.016125, la tasa mensual capitalizable por mes

Entonces, el capital que la aseguradora deberá entregar a la beneficiaria es:

$$C = 3{,}100\left(\frac{1-(1.016125)^{-120}}{0.016125}\right) \qquad np = 10(12) = 120$$

$C = 3{,}100(52.91964132)$ o $C = \$164{,}050.89$

Solución alterna

Como se dijo en la sección que precede, otra forma de obtener este resultado consiste en aplicar la ecuación 5.1 para el monto de anualidades anticipadas; no obstante, para ello se necesita convertir o expresar la anualidad ordinaria como una anticipada, agregando un periodo ficticio, el 121, e ignorando el primero tal como se ve en la figura 5.9, teniendo presente que realizar un pago al final de cada periodo es lo mismo que hacerlo al inicio del siguiente.

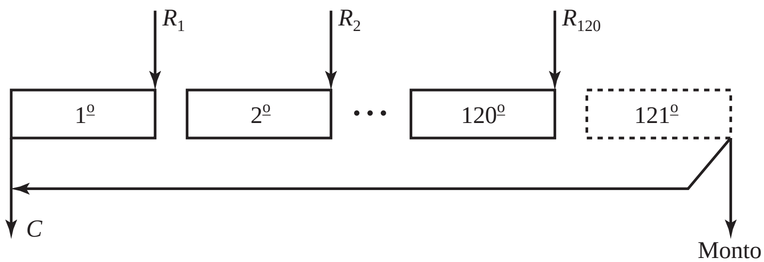


FIGURA 5.9

Entonces, el monto que se acumula al final del periodo 120 sin contar el primero, es

$$M = 3{,}100(1.016125)\left(\frac{(1.016125)^{120}-1}{0.016125}\right)$$

$$M = 3{,}100(1.016125)(360.8056081) \quad \text{o} \quad M = 1'136{,}533.155$$

y 121 meses antes está el valor presente C de este monto, de tal forma que:

$$1'136{,}533.155 = C(1.016155)^{121}$$

de donde $C = 1'136{,}533.155/6.927930526$ o $C = \$164{,}050.89$, que es igual al anterior.

Ejemplo 3

Plazo en la compra de un tractor

¿Cuántos abonos bimestrales vencidos de $40,000 son necesarios para pagar el precio de un tractor, que se compró con un anticipo y un crédito de $350,000? Suponga intereses de 13.8% capita1izab1e por bimestre.

solución

En la ecuación 5.2 se reemplazan C por 350,000, i por 0.138, p por 6, porque son bimestrales y son 6 los bimestres del año, R por \$40,000, el valor de cada pago, e $i/p = 0.023$. La incógnita es n o np, entonces,

$$350,000 = 40,000\left(\frac{1-(1.023)^{-np}}{0.023}\right)$$

Para despejar la incógnita, se multiplica por 0.023, se divide entre 40,000, se resta la unidad a los dos lados de la ecuación, se denota con x a np, el número de pagos, y después se toma logaritmo.

$$\frac{350,000(0.023)}{40,000} - 1 = -(1.023)^{-x}$$

$$0.20125 - 1 = -(1.023)^{-x}$$

$$(1.023)^{-x} = 0.79875$$

$$Ln(1.023)^{-x} = Ln(0.79875)$$

$$(-x)Ln(1.023) = Ln(0.79875)$$

$$-x = Ln(0.79875)/Ln(1.023)$$

$$-x = -9.881809277 \quad \text{o} \quad x = 9.881809277$$

Ajuste del número de rentas

En virtud de que los intereses se hacen efectivos hasta que concluyen periodos completos, el resultado anterior deberá ser un entero, por eso se hace un ajuste, en este caso y casi siempre que se cuestione el número de rentas. Este ajuste se realiza por lo menos de las siguientes maneras:

- Redondeando x al entero menor, razón por la cual los abonos crecen.
- Redondeando al entero mayor, con lo que la renta disminuye.
- Con un pago menor al final del plazo. O bien,
- Con uno mayor al final.

En todas se supone, claro, que el capital no varía, variarlo sería otra opción

a) Con $np = 9$ rentas, cada una es de \$43,496.61, ya que

$$350,000 = R\left(\frac{1-(1.023)^{-9}}{0.023}\right)$$

$$350,000 = R(8.046604074)$$

de donde

$$R = 350{,}000/8.046604074 \qquad \text{o} \qquad R = \$43{,}496.61$$

b) Si se consideran 10 rentas, entonces cada una se reduce:

$$350{,}000 = R\left(\frac{1-(1.023)^{-10}}{0.023}\right)$$

$$350{,}000 = R(8.843210239)$$

de donde

$$R = 350{,}000/8.843210239 \qquad \text{o} \qquad R = \$39{,}578.39$$

En éste y todos los casos semejantes, debe suponerse que el saldo al final es nulo, es decir, que la deuda queda en ceros.

c) Para hallar el pago menor al final del plazo, se obtiene el valor actual C de los 9 primeros y su diferencia con el crédito original, será el valor presente del último pago 10 bimestres después.

$$C = 40{,}000\left(\frac{1-(1.023)^{-9}}{0.023}\right)$$

$$C = 40{,}000(8.046604074) \qquad \text{o} \qquad C = \$321{,}864.163$$

La diferencia con el crédito inicial es:

$$350{,}000 - 321{,}864.163 = 28{,}135.837$$

y el valor futuro, 10 bimestres después, es:

$$M = 28{,}135.837(1.023)^{10}$$

$$M = 28{,}135.837(1.25532546) \;\; \text{o} \;\; M = \$35{,}319.63$$

Note que otra manera más práctica de obtener la última renta consiste en multiplicar la parte decimal de x por 40,000, aunque esto carece de precisión.

$$0.881809277(40{,}000) = 35{,}272.37$$

d) Si el último abono es mayor que los restantes, entonces deberá ser el noveno. Para obtenerlo, a los \$40,000 se les suma el valor futuro de la diferencia anterior, que con plazo de 9 meses, es:

$$M = 28{,}135.84(1.023)^{9}$$

$$M = 28{,}135.84(1.227102112) \qquad \text{o} \qquad M = 34{,}525.55$$

Consecuentemente, el último abono es

$$R_9 = 40{,}000.00 + 34{,}525.55 \qquad \text{o} \qquad R_9 = \$74{,}525.55$$

Anualidad general

Como se dijo anteriormente, una anualidad es *general* si los pagos se realizan en periodos distintos a la frecuencia con que los intereses se capitalizan. Un método de solución consiste en transformar la anualidad *general* en *simple*, utilizando la tasa de interés equivalente, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

Toma de decisiones al vender un camión

El dueño de un camión de volteo tiene las siguientes opciones para vender su unidad:

a) Un cliente puede pagarle $300,000 de contado.

b) Otro le ofrece $100,000 de contado y 7 mensualidades de $30,000 cada una.

c) Un tercero le ofrece $63,000 de contado y 20 abonos quincenales de $12,500 cada uno.

Determine cuál le conviene más, si sabe que el dinero reditúa el 9.6% de interés anual capitalizable por quincena.

solución

El problema se resuelve si se encuentra el valor presente de las últimas dos opciones y se compara con los $300,000 de la primera.

Para el capital al inicio del plazo de la segunda alternativa, es necesario encontrar la tasa capitalizable por mes, equivalente al 9.6% nominal quincenal, ya que los abonos son mensuales. Para esto se igualan los montos considerando que el capital es $C = 1$. Luego, para despejar i, se obtiene la raíz doceava y se realizan otros pasos algebraicos, esto es:

$$(1 + i/12)^{12} = (1 + 0.096/24)^{24}$$

$$1 + i/12 = (1.004)^2 \qquad \text{se obtiene raíz doceava, } 24/12 = 2$$

$$1 + i/12 = 1.008016$$

de donde

$$i = (1.008016 - 1)12 \qquad i = 0.096192 \qquad \text{o} \qquad 9.6192\%$$

El valor presente de las 7 mensualidades de $30,000 es, por lo tanto,

$$C = 30,000\left(\frac{1-(1.008016)^{-7}}{0.008016}\right)$$

$$C = 30,000(6.780843239)$$

$$C = 203,425.2972 \qquad \text{o} \qquad C = \$203,425.30$$

que agregados al anticipo arrojan un total de

$$100,000 + 203,425.30 = \$303,425.30$$

Note que la anualidad general se transformó en una simple.

Para la última opción, se tiene que el valor presente de las 20 rentas quincenales de $12,500 es:

$$C = 12{,}500\left(\frac{1-(1+0.096/24)^{-20}}{0.004}\right)$$

$$C = 12{,}500(19.18408398) \quad \text{o} \quad C = 239{,}801.0498$$

que junto con el pago de contado nos dan:

$$63{,}000 + 239{,}801.05 = \$302{,}801.05$$

Según estos tres valores $C_a = 300{,}000$, $C_b = 303{,}425.30$ y $C_c = 302{,}801.05$, que sin tomar en cuenta otros factores como la inflación, la segunda opción es la que más conviene a los intereses del propietario del camión. Sin embargo, la primera, aunque sea menor, sería la más atractiva, ya que se dispone del dinero en efectivo.

Ejercicios 5.3

1. ¿Cuál es la característica de las anualidades ordinarias?

2. ¿Por qué en las anualidades ordinarias las rentas se relacionan con su valor presente al inicio del plazo?

3. ¿Cuánto debe invertir al principio, al 16% de interés compuesto por semestre, un padre de familia para retirar $15,000 al final de cada semestre durante 4 años?

4. ¿Cuánto puede retirar cada quincena durante 2 años la beneficiaria de un seguro de vida de $250,000, si al principio los invierte en una cuenta que produce intereses del 11.28% anual compuesto por quincena?

5. ¿Cuántos retiros de $3,585 al mes pueden hacerse, si al inicio se depositan $47,000 en una cuenta que genera intereses del 29.4% anual compuesto por mes?

6. Se compra una lancha cuyo precio es de $275,000 y se paga con un anticipo del 30%, un abono a los 3 meses por $50,000 y el resto con 10 mensualidades vencidas a partir del cuarto mes. ¿De cuánto es cada mensualidad si se tienen cargos del 18.6% de interés anual compuesto por mes? ¿A cuánto ascienden los intereses?

7. ¿Cuál es el precio al contado de una recámara que se paga con anticipo de $1,500 el día de la compra, 24 abonos semanales de $325 e intereses del 13.26% nominal semanal?

8. ¿Cuánto debe invertir el padre de un estudiante un año antes de que éste comience sus estudios profesionales, si sabe que necesitará $10,000 al inicio de cada cuatrimestre durante 2 años y 8 meses, y el interés es del 19.5% anual compuesto por cuatrimestre?

9. Promociones Turísticas Internacionales ofrece un paquete con el 20% de anticipo y el resto en 7 mensualidades de $3,500 cada una. ¿Cuál es el precio del paquete si se cargan intereses del 15.24% anual compuesto por mes?

10. El asesor González aprovecha el paquete del problema 9 y conviene pagarlo con el 40% de anticipo y 10 abonos quincenales. ¿De cuánto es cada uno?

11. Al comprar un automóvil que le venden en $180,000, el arquitecto Morales puede elegir entre 3 planes de pago. Diga cuál le conviene más, si el dinero reditúa el 14.82% de interés anual compuesto por mes.

a) De contado con el 8% de descuento.

b) Un anticipo de $45,000 y 18 pagos mensuales de $7,500 cada uno.

c) Un anticipo del 30% y 8 abonos bimestrales de $15,000 cada uno.

12. Un empleado considera que puede abonar $3,500 cada mes con excepción de los meses de junio y diciembre, cuando por el reparto de utilidades y el aguinaldo abonaría $10,000. Calcule la cantidad por la que podría solicitar un crédito hipotecario, si sabe que le dan 10 años para pagarlo, el tipo de interés es del 21.6% anual capitalizable por mes y comenzaría en diciembre.

13. Una tienda de artículos electrodomésticos que cobra intereses del 13.38% nominal mensual en sus ventas a crédito ofrece un refrigerador con 40 pagos semanales vencidos de $195 cada uno. El contador Sánchez compra uno de contado con un descuento adicional del 9%. ¿Cuánto pagó por el aparato?

14. ¿Cuánto debe invertir al principio, en una cuenta bancaria que reditúa el 10.20% anual capitalizable por quincena, una compañía para que uno de sus jubilados perciba $4,750 al final de cada quincena durante 12 años? ¿Cuánto se genera por concepto de intereses?

15. ¿Con cuántos abonos semanales de $113 se paga un televisor de $2,750, si se tienen intereses del 12.48% nominal semanal?

16. El precio de contado de un camión de pasajeros es $2.1 millones de dólares y se paga con un anticipo del 35%, dos abonos de $250,000 cada uno, a 2 y 3 meses de la compra, y después 8 pagos mensuales vencidos. ¿De cuánto es cada pago si los intereses son del 11.4% compuesto por mes?

17. El sistema intermunicipal de agua potable estima que el consumo bimestral en un hogar es de $375. ¿Cuánto debería cobrar al comenzar el año, si se sabe que el dinero reditúa el 8.46% anual convertible por bimestre?

18. ¿Cuál es el precio de un lote de refacciones automotrices que se paga en 20 abonos quincenales de $3,250, los intereses equivalen al 25.2% anual capitalizable por quincena en los primeros 2 meses y después se reducen 1.2 puntos porcentuales por año cada trimestre?

19. Al vender su automóvil, el profesor Anguiano tiene las siguientes opciones:

a) La agencia se lo compra en $84,000.

b) Un amigo le da $35,000 de contado, y dos abonos de $25,000 cada uno a 2 y 3 meses.

c) Otro le ofrece $15,000 de contado y 6 mensualidades de $12,000 cada una.

¿Cuál le conviene más suponiendo que el dinero en el banco produce el 15% de interés anual capitalizable por mes?

20. La gerencia de una compañía adquiere un equipo de computación con un pago de 30,000 a los 8 meses y abonos mensuales anticipados de $7,000 cada uno. ¿Cuántos abonos serán necesarios si corresponden al 60% del precio y se cargan intereses del 14.52% anual compuesto por mes? Haga un ajuste en las rentas.

21. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por mes si un crédito de $784,607.16 se amortiza con 20 rentas mensuales anticipados de $42,000 cada una?

22. ¿Cuántos pagos bimestrales anticipados de $45,000 son necesarios para liquidar un crédito de $500,000, con intereses del 13.2% nominal bimestral? Ajuste con un pago mayor al final.

Justificando su respuesta, seleccione la opción correcta en los problemas del 23 a 34.

23. Es el capital que debe invertirse al principio para disponer de $7,650 al final de cada mes durante año y medio, considerando intereses del 11.40% nominal mensual.

a) $129,948.03 *b*) $126,021.93 *c*) $130,402.85 *d*) $128,921.36 *e*) Otra

24. Se compra maquinaria para perforar pozos profundos con un anticipo y 15 abonos mensuales de $65,000 con cargos del 12% efectivo. ¿Por qué cantidad fue el crédito?

a) $904,803.07 *b*) $900,789.42 *c*) $894,305.41 *d*) $864,876.92 *e*) Otra

25. Un crédito hipotecario de $458,000 se amortiza con 60 abonos mensuales e intereses del 10.2% capitalizable por mes. ¿De cuánto es cada uno?

a) $9,159.36 *b*) $10,583.04 *c*) $9,568.91 *d*) $9,776.28 *e*) Otra

26. ¿Cuántos abonos quincenales de $7,500 se necesitan para amortizar una deuda de $148,161.16, si se tienen cargos o intereses del 13.5%?

a) 23 *b*) 20 *c*) 22 *d*) 21 *e*) Otra

27. ¿Cuál es el precio de una batidora que se paga con 30 abonos semanales de $230 con intereses del 14.82% nominal semanal?

a) $6,083.42 *b*) $7,425.32 *c*) $7,008.23 *d*) $6,604.25 *e*) Otra

28. La Mueblería del Centro ofrece un televisor de pantalla gigante con un anticipo del 35% y 15 abonos mensuales de $1,750 cada uno. Un cliente que no deja anticipo, puede pagarla dando $1,450 cada quincena. ¿En cuánto tiempo lo logra? Suponga cargos del 14.16% nominal mensual y un pago mayor al final.

a) 25 *b*) 28 *c*) 30 *d*) 27 *e*) Otra

29. ¿Cuánto dinero le cuesta al cliente del problema 28, por no pagarla de contado?

a) $3,171.11 *b*) $2,872.40 *c*) $3,421.10 *d*) $2,998.85 *e*) Otra

30. La urbanizadora Vicar compra una niveladora con un anticipo de $190,000, un pago a los 3 meses por $350,000 y otro 4 meses después por $870,000, con intereses del 15.8% de interés efectivo. Poco antes de efectuar el primer abono, deciden con su acreedor reestructurar la deuda con 8 pagos mensuales. ¿De cuánto es cada uno si el primero se realiza a los 3 meses de la compra?

a) $155,579.84 *b*) $180,293.91 *c*) $150,923.50 *d*) $172,048.45 *e*) Otra

31. En el problema 30, ¿cuál fue el precio de la máquina?

a) $1’326,045.71 *b*) $1’275,098.29 *c*) $1’209.302.55 *d*) $1’297.990.32 *e*) Otra

32. ¿Cuánto dinero se ahorró la urbanizadora del problema 30 al cambiar el plan de financiamiento?

a) $24,638.72 *b*) $19,625.43 *c*) $22,429.35 *d*) No se ahorró *e*) Otra

33. La empresa “Diseño e Impresión Virtual” compra una máquina con un anticipo del 25% y 12 pagos mensuales de $95,000 con cargos del 12.36% nominal mensual. ¿Cuál es el precio de la máquina?

a) $1’422,944.57 *b*) $1’067,208.43 *c*) $1’395.874.21 *d*) $1’400.982.50 *e*) Otra

34. En el problema 33, ¿de qué cantidad sería cada abono si fueran bimestrales?

a) $230,789.43 *b*) $243,098.35 *c*) $254,642.91 *d*) $248,893.03 *e*) Otra

5.4 Rentas equivalentes

Si bien es cierto que al comenzar este capítulo se dijo que cuando las rentas son vencidas se asocian con su capital o valor presente al comenzar el plazo, y que cuando son anticipadas se relacionarían, es decir, se hallaría su monto o valor acumulado al final del plazo, hay situaciones en la cuales los pagos anticipados se asocian con el capital y los vencidos con su monto. El caso más notorio se da cuando, por ejemplo, un conjunto de pagos periódicos se reemplaza por otro que es equivalente; esto es, que tiene los mismos efectos pero con diferente frecuencia, dando lugar a lo que se conoce como *rentas equivalentes*, que vamos a definir.

Definición 5.5

Si un conjunto de rentas es sustituido por otro que con diferente frecuencia de pagos produce el mismo monto, o si a los dos corresponde el mismo valor presente, entonces se habla de *rentas equivalentes.*

Rentas anticipadas

Como ya se estudió en la sección 5.2 el valor futuro M de las anualidades con pagos anticipados está determinado por

$$M = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

y para encontrar su valor presente C al inicio del plazo, basta con trasladar este monto hasta esa fecha con la fórmula del interés compuesto, es decir,

$$M = C(1 + i/p)^{np} \text{ de donde } C = M/(1 + i/p)^{np} \quad \text{o}$$

$$C = M(1 + i/p)^{-np} \quad \text{ya que} \quad a/b^n = a(b^{-n})$$

Por lo tanto, al reemplazar M en está ecuación, resulta:

$$C = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)(1+i/p)^{-np}$$

Si se multiplica el factor $(1 + i/p)^{-np}$ por los dos términos del numerador entre los paréntesis, y puesto que $a^n a^{-n} = a^0 = 1$ y $1(a) = a$, se obtendrá como resultado la fórmula del teorema siguiente:

Teorema 5.3

El valor presente C de una **anualidad anticipada**, simple y cierta está dado por:

$$C = R(1+i/p)\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

donde:

R es la renta,
i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año
n es el plazo en años
np es el número total de rentas e
i/p es la tasa de interés por periodo

Ejemplo 1

Renta semestral equivalente a una renta mensual

¿Qué renta semestral anticipada sustituye a los pagos mensuales anticipados de \$500 con intereses del 15% anual compuesto por mes?

solución

La tasa de interés por periodo mensual es $i/p = 0.15/12 = 0.0125$ y la renta semestral anticipada que corresponde a los 6 pagos mensuales de \$500 es:

$$C = 500(1+0.0125)\left(\frac{1-(1.0125)^{-6}}{0.0125}\right)$$

$$C = 500(1.0125)(5.74600992) \quad \text{o} \quad C = \$2{,}908.92$$

Ejemplo 2

Pago anticipado por renta de vivienda

El señor Cortés viene del extranjero a vacacionar y antes de su regreso paga la renta mensual anticipada por dos años de la vivienda que habitan sus familiares. ¿De cuánto es su pago si la mensualidad es de $4,750 y el dinero reditúa el 12.60% de interés nominal mensual?

solución

El problema es encontrar el valor presente C de 24 rentas anticipadas de $4,750. Para esto se emplea la ecuación del teorema 5.3 con $i/p = 0.1260/12$ o $i/p = 0.0105$:

$$C = 4,750(1+0.0105)\left(\frac{1-(1.0105)^{-24}}{0.0105}\right)$$

$$C = 4,750(1.0105)(21.11747028) \quad \text{o} \quad C = \$101,361.22$$

Esto significa que al pagar anticipadamente, el señor Cortés se está ahorrando la cantidad de $12,638.78, ya que de lo contrario pagaría:

$$4,750(24) = \$114,000.00$$

Rentas vencidas

Para el monto de una anualidad vencida, el valor presente C de los np pagos vencidos dado por $C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$ se traslada hasta el final del plazo con la misma fórmula del interés compuesto $M = C(1+i/p)^{np}$.

Por lo tanto, el monto es

$$M = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)(1+i/p)^{np}$$

El último factor, $(1 + i/p)^{np}$, se multiplica por los dos términos que están en el numerador y puesto que $a^n a^{-n} = 1$, se obtiene la fórmula del siguiente teorema.

Teorema 5.4

El valor futuro M de una anualidad vencida u ordinaria, simple y cierta está dado por:

$$M = R\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

donde, como antes, R es la renta, i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año, y np es el número de rentas.

Ejemplo 3

Renta semestral equivalente a renta mensual

¿Cuál es la renta semestral vencida equivalente a \$2,400 mensuales vencidos con intereses del 21.6% anual capitalizable por mes?

solución

En la ecuación del último teorema se reemplazan R por 2,400, i por 0.216, p por 12 y np por 6, el número de rentas por semestre. La incógnita es M.

$$M = 2,400\left(\frac{(1+0.216/12)^6 - 1}{0.216/12}\right)$$

$$M = 2,400(6.276568111) \quad \text{o} \quad M = \$15,063.76$$

Ejemplo 4

Ahorro con rentas equivalentes

Si con 5 pagos de \$24,500 al final de cada trimestre, con intereses del 14% efectivo, se amortiza un crédito, ¿cuánto dinero se ahorra el deudor si lo amortiza con abonos semanales vencidos equivalentes en el mismo plazo?

solución

Es necesario hallar primero la tasa capitalizable por semana equivalente al 14% efectivo, considerando un capital de \$1 y un año de plazo. Al igualar los montos resulta:

$$(1 + i/52)^{52} = (1 + 0.14/1)^1 \qquad \text{¿Por qué?}$$

$$1 + i/52 = \sqrt[52]{1.14}$$

$$1 + i/52 = 1.002522952$$

de donde

$$i = (1.002522952 - 1)^{52}$$

$$i = 0.131193504 \quad \text{o} \quad 13.1193504\%$$

Note usted que para las operaciones es suficiente el valor de $1 + i/52 = 1.002522952$ y no el último resultado. Entonces, puesto que en un trimestre quedan comprendidas 13 semanas, se tiene:

$$24,500 = R\frac{(1.002522952)^{13} - 1}{0.002522952}$$

$$24,500 = R(13.19862209)$$

de donde

$$R = 24,500/13.19862209 \quad \text{o} \quad R = \$1,856.25$$

Entonces, el deudor se ahorra, digámoslo así, la cantidad de $1,843.75, ya que con abonos trimestrales pagará en total 24,500(5) = 122,500; mientras que con los semanales pagará 1,856.25(65) = 120,656.25.

Importante

Si bien es cierto que dos conjuntos de rentas equivalentes producen los mismos efectos, esto no debe confundirse con que generan los mismos intereses, ya que como se observa con el ejemplo 4, el total que se carga por intereses, en las dos maneras con las que se amortiza la supuesta deuda, es diferente y esto no deja de ser lógico porque al recibir el acreedor los abonos cada semana, recibirá en total menos dinero que si se espera para recibirlo hasta el final del trimestre. Es evidente y es razonable que también el deudor pague menos al adelantar sus pagos.

Ejemplo 5

Cargo con intereses moratorios

Teresa adquirió un refrigerador que está pagando con 20 abonos quincenales de $650 e intereses del 12.48% anual capitalizable por quincena. Luego de 3 pagos, se retrasa con 5 y se pone al corriente al hacer el noveno.

a) ¿A cuánto equivale este pago si adicionalmente se cargan intereses moratorios del 0.9% quincenal compuesto por quincena?
b) Halle los intereses.

solución

En la figura 5.10 se aprecia que es necesario encontrar el valor futuro de 6 rentas vencidas de $650, 5 que se retrasaron y el noveno pago.

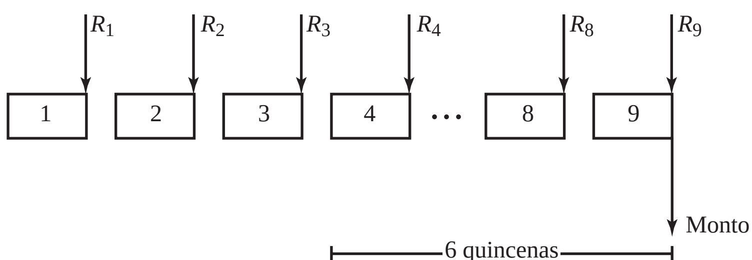


Figura 5.10

a) La tasa de interés que se sustituye en la ecuación 5.4 es:

$$0.1248/24 + 0.009 = 0.0142$$

El acumulado de los 6 abonos es, por lo tanto,

$$M = 650\left(\frac{(1+0.0142)^6 - 1}{0.0142}\right)$$

$$M = 650(6.217075986) \quad \text{o} \quad M = \$4{,}041.10$$

b) Para calcular los intereses, se resta el precio del refrigerador del total que se paga.

El total pagado es la suma del resultado anterior y los 14 abonos de \$650 que se pagaron sin retraso, esto quiere decir que:

$$M = 4{,}041.10 + 14(650.00)$$
$$M = \$13{,}141.10$$

El precio del refrigerador es el valor presente de los 20 abonos originales. Dicho valor se encuentra con la ecuación 5.2 para anualidades ordinarias:

$$C = 650\left(\frac{1-(1+0.1248/24)^{-20}}{0.0052}\right)$$

$$C = 650(18.94842694)$$
$$C = \$12{,}316.48$$

En consecuencia, el monto de los intereses es

$$I = M - C$$
$$I = 13{,}141.10 - 12{,}316.48 \quad \text{o} \quad I = \$824.62$$

Anualidad general

El siguiente y último ejercicio de esta sección, como en las otras del capítulo, se refiere a las anualidades generales, las cuales se caracterizan, se dijo, porque no coincide el intervalo de pago con la frecuencia de capitalización de intereses. Lo primero es hacerlos coincidir utilizando tasas equivalentes, tomando en cuenta que en las fórmulas debe utilizarse la que se capitaliza con mayor frecuencia, es decir, la menor de las dos equivalentes.

Ejemplo 6

Cambio de rentas bimestrales por quincenales en el pago de un terreno

El señor Anaya compra el terreno para su casa con un anticipo, una hipoteca de 30 abonos bimestrales anticipados de \$6,250 cada uno y una tasa de interés del 13.2% capitalizable por bimestre. Poco antes de hacer el séptimo, decide amortizar el resto con pagos quincenales equivalentes. ¿De cuánto es cada uno?

solución

La tasa i nominal quincenal equivalente al 13.2% compuesto por bimestre es:

$$(1 + i/24)^{24} = (1 + 0.132/6)^6$$
$$(1 + i/24)^{24} = 1.139476505$$

de donde $$1 + i/24 = \sqrt[24]{1.139476505}$$

$$1 + i/24 = 1.005455199$$

$$i = (1.005455199 - 1)\, 24$$

o $$i = 0.130924776$$

Por lo tanto, la renta quincenal *R*, equivalente a los $6,250 bimestrales, ya que en un bimestre hay 4 quincenas, está dada por:

$$6{,}250 = R(1.005455199)\left(\frac{1-(1.005455199)^{-4}}{0.005455199}\right)$$

$$6{,}250 = R(1.005455199)(3.946037569)$$

$$6{,}250 = R(3.967563989)$$

de donde

$$R = 6{,}250/3.967563989$$

$$R = \$1{,}575.27$$

Ejercicios 5.4

1. Explique el significado de *rentas equivalentes.*

2. ¿Qué es menor, una renta semestral anticipada o la suma de las 6 mensuales que la sustituyan?

3. ¿Qué es menor, una renta trimestral vencida o la suma de las 13 semanales vencidas equivalentes?

4. ¿Cuál es la renta mensual anticipada equivalente a la renta de $750 trimestrales anticipados e intereses del 24.6% anual capitalizable por mes?

5. Obtenga la renta semanal anticipada que es equivalente a $5,300 trimestrales, con una tasa de interés del 14.56% compuesto por semana.

6. ¿Cuál es la renta bimestral anticipada equivalente a $4,250 quincenales anticipados e interés del 16.32% compuesto por quincena?

7. Un crédito automotriz de $150,000 se amortiza con 48 rentas mensuales e interés del 11.4% compuesto por mes. Se conviene que a partir del decimotercero estos pagos serán trimestrales. ¿De cuánto será cada uno suponiendo que todos son vencidos?

8. Muebles del Sur ofrece un refrigerador con un anticipo del 35%, 26 abonos semanales de $175 e intereses del 10.4% compuesto por semana. El profesor Delgado compra uno, pero lo paga con abonos trimestrales. ¿De cuánto es cada pago, si éstos son vencidos? ¿Cuál es el precio de contado? ¿A cuánto asciende el monto de los intereses?

9. ¿Con cuántos abonos mensuales anticipados de $735 se liquida una lavadora de vajillas, cuyo precio es de $6,350 y el interés equivale al 18.3% compuesto por mes?. Haga un ajuste al final con un pago menor.

10. Obtenga el precio de contado de un automóvil que se paga con 15 abonos mensuales anticipados de $12,500 cada uno e interés del 13.32% anual capitalizable por mes. Calcule los intereses.

11. En el problema 10, calcule el pago si éste es trimestral.

12. El precio de un terreno es de $450,000 y se vende con 36 mensualidades anticipadas y un interés del 16.8% nominal mensual. ¿De cuánto es cada pago?

13. La estilista Pilar renueva el mobiliario de su sala de belleza, con un crédito que paga con 12 abonos quincenales anticipados de $3,100 a un interés del 26.4%, capitalizable por quincena. Determine:

a) ¿Cuál es el precio de los muebles?
b) ¿Cuánto pagó por concepto de intereses?
c) Si decide pagar con abonos bimestrales anticipados, ¿de cuánto será cada uno?

14. Un agricultor compra una máquina trilladora pagando un anticipo y 24 rentas mensuales vencidas de $32,000. ¿Cuánto debe pagar al hacer el décimo abono para ponerse al corriente, ya que suspendió seis pagos y le cargan un interés del 12.96% compuesto por mes en el lapso de retraso?

15. ¿Qué capital debe invertir el padre de un estudiante cuando éste inicia su carrera universitaria, en un banco que reditúa el 14% de interés nominal semestral, para disponer de $35,000 al comenzar cada uno de los 9 semestres que duran los estudios profesionales? Obtenga los intereses.

16. Para construir una residencia, el ingeniero Andrade necesitará de $45,000 al inicio de cada semana, durante los 6 meses que dure la construcción. ¿Cuánto debe depositar el propietario al comienzo de las obras, en un banco que paga un interés del 13.26% anual compuesto por semana?

17. ¿Cuánto se acumula en una cuenta de ahorros, si se realizan 15 depósitos quincenales vencidos de $1,500 y la tasa de interés es del 11.4% nominal quincenal? ¿Cuál es la renta bimestral equivalente?

18. ¿Cuánto debe depositar la señora de Medina al término de cada semana durante 20 semanas, para disponer de $26,000 al final, suponiendo que gana una tasa de interés del 13% anual compuesto por semana?

19. El ingeniero López pretende comprar un torno en un plazo de 8 meses. Para esto abre una cuenta en una institución bancaria con un depósito inicial de $30,000 y después deposita $8,500 al final de cada mes. ¿Cuánto logra acumular si le pagan una tasa de interés del 18.24% anual compuesto por mes?

20. Lupita abre una cuenta de ahorros con $10,000 y después abona $1,800 al final de cada quincena. ¿Cuánto logra acumular en 2 años, si gana una tasa de interés del 8.64% anual capitalizable por quincena?

21. ¿Con cuánto debe abrir una cuenta bancaria el señor Aguirre, si pretende acumular $40,000 depositando $750 al final de cada semana, durante 9 meses, ganando una tasa de interés del 9.60% compuesto por semana?

22. Una institución bancaria ofrece una tasa del 16.5% de interés anual compuesto por mes en el siguiente plan de ahorro: $2,000 en la apertura y, después, $750 al final de cada semana durante 15 meses. ¿Cuál es el monto que se acumula?

23. En el problema 22, ¿cuál es la renta trimestral equivalente?

24. Para disponer aproximadamente de $25,000 cuando su hija cumpla 15 años, cuando tiene 8 años de edad un padre de familia abre una cuenta con $5,000, en un banco que le reditúa el 11% de interés efectivo. Después deposita $600 al final de cada quincena. ¿Cuándo debe empezar? En los problemas 25 a 36 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

25. Es la renta mensual anticipada equivalente a $5,000 trimestrales anticipados, considerando intereses del 15% efectivo.

a) $1,686.12 *b*) $1,593.03 *c*) $1,618.03 *d*) $1,598.92 *e*) Otra

26. ¿De cuánto es la renta trimestral anticipada equivalente a $1,250 semanales anticipados, si la tasa es del 12.74% nominal semanal?

a) $15,836.43 *b*) $16,013.83 *c*) $15,792.05 *d*) $16,328.42 *e*) Otra

27. ¿Cuál es la renta bimestral vencida que sustituye $4,500 a final de cada quincena, si los intereses son del 15.3% anual capitalizable por quincena?

a) $17,963.21 *b*) $18,433.62 *c*) $18,138.85 *d*) $18,296.04 *e*) Otra

28. ¿Por qué cantidad es la renta semestral ordinaria que sustituye $1,325 al final de cada semana, con intereses del 15% efectivo?

a) $34,963.08 *b*) $35,952.23 *c*) $35,096.43 *d*) $35,634.30 *e*) Otra

29. ¿De cuánto es la renta quincenal ordinaria equivalente a una renta de $6,750, al final de cada cuatrimestre, considerando intereses del 11.4% nominal cuatrimestral?

a) $825.09 *b*) $832.48 *c*) $796.03 *d*) $830.05 *e*) Otra

30. Si un crédito se amortiza con 36 pagos de $2,450 al final de cada quincena, con intereses del 15.12% nominal quincenal, ¿en cuánto se incrementarán los intereses si se amortiza con abonos trimestrales vencidos equivalentes en el mismo plazo?

a) $1,386.43 *b*) $1,502.63 *c*) $1,400.88 *d*) $1,463.09 *e*) Otra

31. ¿Por cuánto es cada pago mensual anticipado, equivalente a $9,520 al comenzar cada trimestre con intereses del 9.84% anual capitalizable por mes?

a) $3,051.43 *b*) $3,199.28 *c*) $3,302.08 *d*) $2,986.32 *e*) Otra

32. ¿En cuánto se reduce el total que se paga cada semestre, si una renta trimestral de $10,300 vencida se reemplaza por 13 semanales equivalentes, considerando intereses del 12.7% efectivo?

a) $557.66 *b*) $623.43 *c*) $278.83 *d*) $305.62 *e*) Otra

33. ¿Cuál es el costo para un deudor, que en vez de abonar $7,250 al final de cada quincena durante año y medio, realiza pagos bimestrales vencidos? Suponga cargos del 11.28% nominal quincenal.

a) $1,845.81 *b*) $1,695.32 *c*) $2,005.39 *d*) $1,967.78 *e*) Otra

34. El ingeniero Ramírez compró un tractor con un anticipo de $52,000 y 18 abonos mensuales vencidos de $15,750. Luego de efectuar el sexto se retrasa con 7. ¿Con cuánto se pone al corriente al hacer el pago 14, si le cargan intereses del 10.68% anual, capitalizable por mes?

a) $130,245.62 *b*) $129,995.55 *c*) $129,093.43 *d*) $130,529.68 *e*) Otra

35. Resuelva el problema 34, considerando intereses moratorios adicionales del 1.3% mensual capitalizable por mes.

a) $134,929.88 *b*) $132,696.07 *c*) $136,092 *d*) $135,675.23 *e*) Otra

36. En el problema 35, ¿cuál fue el costo por haberse retrasado en los pagos?

a) $8,693.85 *b*) $11,209.73 *c*) $10,527.32 *d*) $10,092.70 *e*) Otra

5.5 Anualidad diferida

Estas anualidades se caracterizan porque la primera renta no se ejecuta en el primer periodo o la última no se hace en el último.

El procedimiento para evaluar sus elementos es muy simple, ya que se resuelven como inmediatas utilizando las fórmulas anteriores, para después trasladar en el tiempo el monto o el capital, utilizando la fórmula del interés compuesto, como se aprecia en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Renta quincenal en anualidad diferida

Aerocaribe ofrece la promoción "Viaje ahora y pague después", que consiste en liquidar el precio del pasaje en 10 quincenas, empezando 3 meses después de haber viajado. ¿Cuánto pagará el licenciado José Luis, si el precio de sus boletos fue de \$8,320 y le cargan el 11.76% de interés anual compuesto por quincena?

solución

Como se aprecia en el diagrama de tiempos de la figura 5.11, los 10 abonos forman una anualidad ordinaria, cuyo valor presente es C al inicio del sexto periodo quincenal.

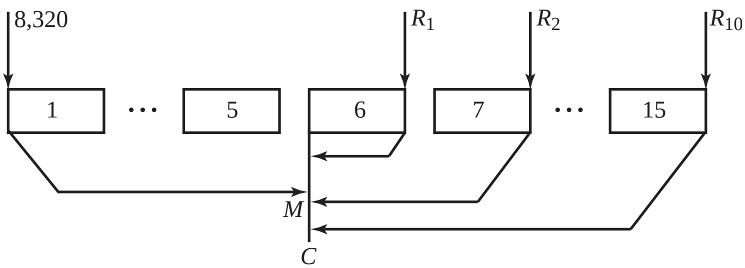


FIGURA 5.11

El valor futuro de los \$8,320, transcurridas 5 quincenas y al iniciar la sexta es:

$M = 8{,}320(1 + 0.1176/24)^5$ puesto que $M = C(1 + i/p)^{np}$

$M = 8{,}320(1.0049)^5$

$M = 8{,}320(1.024741279)$ o $M = 8{,}525.85$

que se sustituye como C en la fórmula del teorema 5.2 para obtener el valor de las 10 rentas quincenales R:

$$8{,}525.85 = R\left[\frac{1-(1.0049)^{-10}}{0.0049}\right] \qquad \text{ya que } C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$8{,}525.85 = R(9.735699224)$$

de donde

$$R = 8{,}525.85/9.735699224 \quad \text{o} \quad R = \$875.73$$

Ejemplo 2

Precio de equipo de cómputo, anualidad diferida

La Facultad de Ingeniería adquiere un equipo de cómputo con un pago inicial de $70,000 y 7 mensualidades de $25,000 cada una, pagando la primera 4 meses después de la compra. ¿Cuál es el precio del equipo, si se están cobrando intereses del 13.08% anual compuesto por mes?

solución

En la figura 5.12 se ilustran los 7 pagos en miles de dólares y su valor presente C al inicio del mes número cuatro.

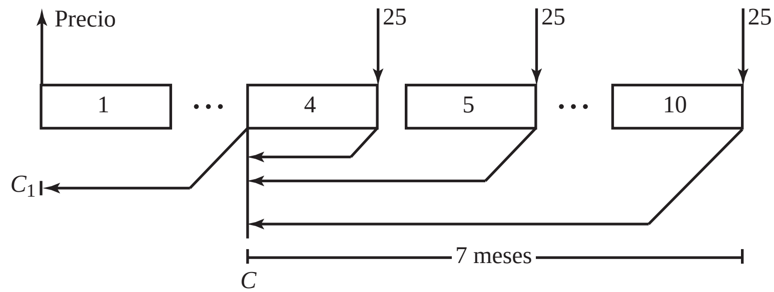


FIGURA 5.12

Se calcula el valor presente C de los 7 pagos y posteriormente se traslada hasta el inicio del plazo, y se suma esta cantidad con el anticipo.

Los valores para reemplazar en la ecuación 5.2 son

$R = 25{,}000$, la renta mensual vencida

$np = 7$, el número de pagos

$p = 12$, la frecuencia de pagos y de capitalización de intereses

$i/p = 0.1308/12$ o $i/p = 0.0109$, la tasa de interés por periodo, intereses

$$C = 25{,}000\left[\frac{1-(1.0109)^{-7}}{0.0109}\right]$$

$C = 25{,}000(6.704514468)$ o $C = \$167{,}612.86$

3 meses antes, esto es equivalente a C_1 de la igualdad:

$$167{,}612.86 = C_1(1.0109)^3 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$167{,}612.86 = C_1(1.033057725)$$

de donde

$$C_1 = 167{,}612.86/1.033057725 \quad \text{o} \quad C_1 = 162{,}249.27$$

Los cuales, sumados al anticipo, arrojan el precio del equipo:

$$162{,}249.27 + 70{,}000 = \$232{,}249.27$$

Ejemplo 3

Monto en un fondo de jubilación

¿De cuánto dispondrá una compañía en la fecha de jubilación de tres de sus empleados, si 3 años antes hace un depósito de \$40,000, seguido de 20 depósitos mensuales de \$3,500 cada uno, y ganando intereses del 9% nominal mensual? Obtenga los intereses.

solución

En la figura 5.13 está el diagrama de tiempo con rectángulos que representan los periodos mensuales.

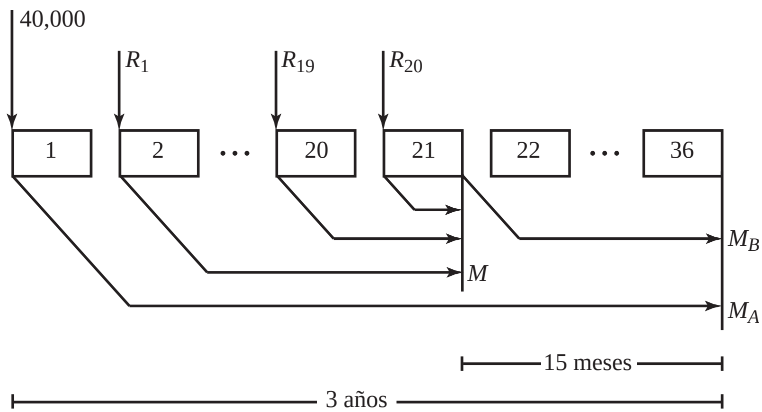


FIGURA 5.13

a) El monto total acumulado en los 3 años es igual a la suma de dos montos, M_A, el valor futuro de los primeros \$40,000, y M_B, el valor acumulado de las 20 rentas mensuales, las cuales constituyen una anualidad diferida. Puesto que la tasa por periodo es $i/p = 0.0075$ y el plazo es $n = 36$ meses, el primero es:

$$M_A = 40{,}000(1.0075)^{36} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M_A = 40{,}000(1.308645371)$$

o $$M = \$52{,}345.81$$

El acumulado de las 20 rentas mensuales al final del mes 21 es

$$M = 3{,}500(1.0075)\left[\frac{(1.0075)^{20} - 1}{0.0075}\right] \qquad M = R(1 + i/p)\left[\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right]$$

$$M = 3{,}500(1.0075)(21.49121893)$$

$$M = \$75{,}783.41$$

y 15 meses después, al final del plazo, el día de la jubilación, éste se convierte en

$$M_B = 75{,}783.41(1.0075)^{15} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M_B = 75{,}783.41(1.118602594) \quad \text{o} \quad M_B = \$84{,}771.52$$

El total para la jubilación es, entonces,

$$M = 52{,}345.81 + 84{,}771.52 \qquad M = M_A + M_B$$

o $$M = \$137{,}117.33$$

b) Los intereses son iguales al monto acumulado menos el capital total invertido:

$$I = 137{,}117.33 - [40{,}000 + 20(3{,}500)]$$

$$I = 137{,}117.33 - 110{,}000 \qquad \text{o} \qquad I = \$27{,}117.33$$

Tasa variable de interés

Ejemplo 4

Mensualidades en la compra de un departamento

Se compra un departamento de \$460,000, con un anticipo del 30% pagadero en 6 mensualidades que incluye un "apartado" de \$30,000. El 70% restante se pagará con 114 abonos mensuales, luego de pagar el anticipo. Obtenga el valor de los abonos, suponiendo que el interés es del 10.08% nominal mensual en el anticipo y del 8.16% en los restantes.

solución

Se tienen dos anualidades, la primera es inmediata con 6 rentas vencidas y un valor presente C igual al 30% del precio del departamento, menos los \$30,000 del apartado.

$$C = 0.30(460{,}000) - 30{,}000$$

$$C = 108{,}000$$

La tasa por periodo es $i/p = 0.108/12$ o $i/p = 0.009$, y el pago mensual se obtiene con la ecuación 5.2:

$$108{,}000 = R\left[\frac{1-(1.009)^{-6}}{0.009}\right] \qquad\qquad M = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$108{,}000 = R(5.815445778)$$

de donde

$$R = 108{,}000/5.815445778$$

o $$R = \$18{,}571.23$$

Como se ve en la figura 5.14, la segunda es un anualidad diferida en 6 periodos, los del anticipo, consta de 114 mensualidades y los intereses por periodo son:

$$i/p = 0.0816/12 \qquad \text{o} \qquad i/p = 0.0068$$

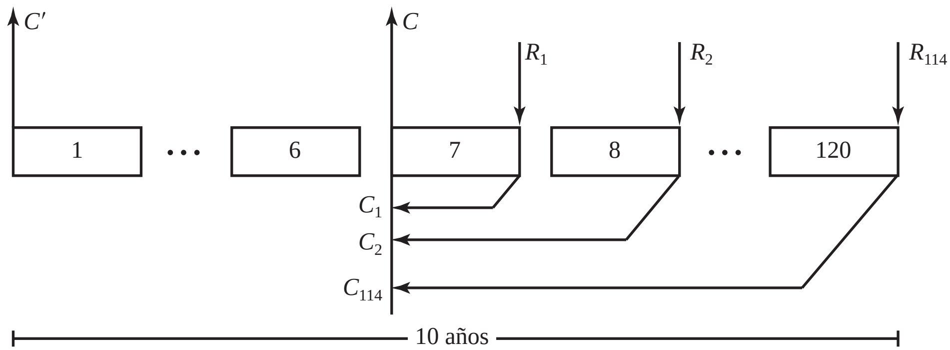


FIGURA 5.14

El valor presente C de la anualidad es igual al valor futuro M del 70% del precio del departamento:

$$0.70(460,000) = 322,000$$
$$M = 322,000(1.0068)^6$$
$$M = 322,000(1.041499912)$$
$$\text{o} \quad M = \$335,362.97$$

Éste es el valor presente de la anualidad ordinaria:

$$335,362.97 = R\left[\frac{1-(1.0068)^{-114}}{0.0068}\right] \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$335,362.97 = R(79.14385506)$$

de donde

$$R = 335,362.97/79.14385506$$

o $\quad R = \$4,237.38$

Anualidad General

Ejemplo 5

La mueblería Hernández ofrece un minicomponente con reproductor de discos MP3 con 30 abonos semanales de \$198 e intereses del 14.75% nominal mensual, y el atractivo de hacer el primero hasta 4 meses después de la compra. ¿Cuál es el precio de contado del aparato?

solución

La tasa anual capitalizable por semana equivalente al 14.75% compuesto por mes es i de la siguiente ecuación:

$$(1 + i/52)^{52} = (1 + 0.1475/12)^{12}$$

de donde

$$1 + i/52 = \sqrt[52]{1.157891703}$$

$$1 + i/52 = 1.002823225 \qquad \text{o} \qquad i = 0.144033916$$

El valor presente de los 30 abonos de $198, una semana antes de hacer el primero, es:

$$C = 198\left[\frac{1-(1.002823227)^{-30}}{0.002823227}\right] \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{ip}\right]$$

$$C = 198(28.72583113)$$

o $$C = \$5{,}687.714564$$

Cuatro meses después de la compra significa que el primer pago se realiza a 17 semanas de la compra, ya que

$$(4/12)52 = 17.33$$

y, entonces, hay que hallar el valor actual del capital, es decir, del monto C, 16 semanas antes:

$$C = 5{,}687.714564(1.002823227)^{-16}$$

$$C = 5{,}687.714564(0.955894283) \qquad \text{o} \qquad C = \$5{,}436.85$$

Ejercicios 5.5

1. ¿Cuál es la característica de las anualidades diferidas?
2. ¿De cuánto es cada una de las rentas semanales anticipadas que se hacen en las primeras 15 semanas del año, para disponer de $30,000 al final de ese año, considerando intereses del 13.52 anual capitalizable por semana?
3. ¿Cuál es el precio de un refrigerador que se paga con 10 abonos quincenales de $520, si el primero se hace 2 meses después de la compra y la tasa de interés es del 10.5% nominal semanal?
4. ¿Qué cantidad debe invertir un padre de familia al nacer su hijo, con la finalidad de retirar $25,000 cada vez que éste cumpla años, desde los 8 hasta los 20 años de edad, si la inversión devenga una tasa de interés del 13% efectiva? Obtenga los intereses que se devengan.
5. La compañía Turiservicios ofrece un atractivo plan de “Viaje ahora y pague después”. ¿Cuánto gastará la familia Aguilera, si su crédito lo liquida con 12 abonos mensuales de $525 cada uno, el primero a los 3 meses después de viajar, y la tasa de interés es del 16.80% capitalizable por mes?

6. La Mueblera del Centro ofrece un televisor con $3,750 de contado o 25 abonos semanales, con el primero a 3 meses de la compra a una tasa de interés del 11.44 % anual compuesto por semana. ¿De cuánto es cada uno?

7. Al inicio de cada uno de los primeros 5 meses del año se depositan $2,500 en una cuenta de ahorros que reditúa el 12.12% de interés nominal mensual. ¿Cuánto se tendrá al final del año?

8. Usted se compra una secadora de ropa, pagando $1,400 a 2 meses de la compra y luego 18 abonos quincenales de $450. Considerando que el crédito causa un interés del 24.36% anual capitalizable por quincena, determine:

a) El precio de contado de la secadora.

b) El total de intereses, es decir, el costo por pagar en abonos.

9. ¿Cuántos pagos mensuales anticipados de $13,000 deberán hacerse en los primeros meses de un lapso de 1.5 años, para acumular al final de este lapso $155,000 si la tasa de interés es del 15% anual compuesto por mes? Haga un ajuste a la renta.

10. ¿De cuánto es el crédito que se cancela con 10 rentas bimestrales de $28,500 si se cobra un interés del 7.38% nominal bimestral y la primera renta se realiza 4 meses después de la fecha inicial? Obtenga los intereses.

11. ¿De cuánto serán las 15 rentas semanales que cancelan un crédito de $38,000, si la primera se paga 7 semanas después y el cargo por intereses es del 13% anual capitalizable por semana? ¿Qué cantidad se pagará por concepto de intereses?

12. ¿A cuánto ascenderá el monto, 10 años después de la cuarta aportación, correspondiente a las primeras 4 aportaciones anuales de $2,850 que un empleado hace a su pensión, suponiendo que ésta le reditúa el 12.6% de interés efectivo?

13. ¿Cuánto se acumula en una cuenta bancaria que reditúa el 8.84% de interés compuesto por semanas al final de un año, si en el primer trimestre se invierten $300 cada semana, al inicio, y en el siguiente cuatrimestre se depositan $500 al comenzar cada quincena? Obtenga los intereses.

14. El 10 de febrero un prestatario acuerda pagar su deuda con 12 abonos mensuales de $1,425, realizando el primero el 10 de junio siguiente:

a) ¿Qué capital recibió en préstamo el 10 de febrero?

b) ¿Cuánto debe pagar al final del plazo, si suspende desde el octavo?

Suponga que la tasa de interés es del 26.4% anual compuesto por mes y 2.4 puntos porcentuales por año por intereses moratorios adicionales a los generados por la deuda.

15. Un crédito hipotecario de $250,000 se cancela con 60 mensualidades, depositando la primera 9 meses después de la fecha inicial. ¿De cuánto es cada renta si se paga una tasa de interés del 10.5% anual compuesto por mes? ¿A cuánto ascienden los intereses?

16. Una tienda comercial ofrece un televisor en 12 mensualidades de $325, comenzando a pagar a los 3 meses después de la compra. Otra ofrece el mismo televisor a 20 pagos quincenales de $190, iniciando los pagos a los 2 meses de la compra. ¿Dónde compraría usted el aparato, si ambas le cobran una tasa de interés del 12% efectivo?

17. ¿Cuánto debe invertirse quincenalmente, en las primeras 8 quincenas del plazo a una tasa de interés del 27% anual compuesto por quincena, para recuperar al final un pagaré que se firmó por un crédito en mercancía con valor de $125,000, a un plazo de 10 meses y a una tasa de interés del 25% simple anual?

18. La Mueblera del Sur vende un juego de sala, recámara y comedor en 9 pagos mensuales de $2,350 cada uno y una tasa de interés del 15% anual compuesto por mes.

a) ¿Cuál es el precio de los muebles considerando que el primer abono se realiza 3 meses después de la compra?

b) ¿A cuánto ascenderá cada uno de los 9 pagos, si el primero se hace un mes después de la compra?

c) ¿Cuántos pagos quincenales aproximadamente de $1,060 serán necesarios, si el primero se hace 5 quincenas después de comprarlos?

En los problemas 19 a 33 seleccione la opción correcta justificándola.

19. ¿Por qué cantidad es un crédito que se cancela con 24 pagos semanales de $520, si la tasa de interés en el primer trimestre es del 11.96% anual capitalizable por semana y, posteriormente, es del 10.4% compuesto por mes?

a) $12,070.43 *b*) $12,159.44 *c*) $11,892.43 *d*) $11,998.04 *e*) Otra

20. Se compra un tractor con un anticipo del 30% y 12 pagos mensuales. ¿De cuánto es cada uno de éstos si el primero se realiza 4 meses después de la compra, el precio fue de $450,000 y la tasa de interés en el primer trimestre fue del 10.5% capitalizable por mes, para luego incrementarse 1.8 puntos porcentuales por año cada semestre?

a) $31,429.07 *b*) $28,845.64 *c*) $30,295.43 *d*) $29,797.08 *e*) Otra

21. ¿Cuánto se acumula durante un año en una cuenta de ahorros que abona el 15.72% de interés anual compuesto por mes, si al principio se hacen 3 depósitos mensuales anticipados de $1,500, después 4 de $750 mensuales y luego 3 de $2,500 mensuales cada uno?

a) $18,402.35 *b*) $16,402.12 *c*) $19,629.93 *d*) $20,048.65 *e*) Otra

22. Una exportadora vende mercancía con valor de $47,500 que le pagan con 5 abonos quincenales a una tasa de interés del 12.72% nominal quincenal. ¿De cuánto es cada pago si el primero se realiza 2 meses después de la compraventa?

a) $9,805.86 *b*) $10,329.43 *c*) $10,968.04 *d*) $11,008.74 *e*) Otra

23. Encuentre el precio de un minibús que se paga con un anticipo del 45%, 5 pagos mensuales de $25,000 luego del anticipo, y 4 pagos bimestrales de $50,000 después de los primeros 5, suponiendo que se carga a una tasa de interés del 9.3% anual compuesto por bimestre.

a) $541,140.18 *b*) $693,429.03 *c*) $550,293.09 *d*) $520,705.93 *e*) Otra

24. ¿Cuál es el precio de una computadora que un estudiante de diseño publicitario adquirió con un anticipo de $4,500 y 7 abonos mensuales de $2,450 cada uno? Suponga que la tasa de interés fue de 10.32% compuesto por mes en el primer cuatrimestre y del 11.28% nominal mensual en los otros 3 meses. Determine el monto de los intereses.

a) $20,965.05 *b*) $21,063.91 *c*) $20,830.42 *d*) $21,239.49 *e*) Otra

25. ¿Cuál es el valor acumulado al final de 10 meses, si en los primeros 4 se invierten $8,975 con intereses del 8.04%?

a) $37,045.10 *b*) $36,836.03 *c*) $37,198.82 *d*) $36,968.45 *e*) Otra

26. Una mueblería ofrece un horno de microondas con el plan de comprar ahora y comenzar a pagar hasta 5 meses después, con 25 pagos semanales de $300 e intereses del 13.39% nominal semanal. ¿Cuál es el precio del horno?

a) $5,893.41 *b*) $6,028.40 *c*) $6,205.08 *d*) $6,105.73 *e*) Otra

27. ¿Cuánto acumula la señora María Eugenia en una cuenta con 25 pagos quincenales de $760, considerando que el primer trimestre le bonifican el 9.6% de interés nominal quincenal, y ésta se incrementa 0.14 puntos porcentuales por quincena cada semestre?

a) $20,908.33 *b*) $19,976.43 *c*) $20,617.65 *d*) $20,008.93 *e*) Otra

28. ¿Cuánto dinero gana la señora del problema 27 por concepto de intereses?

a) $1,519.32 *b*) $1,583.25 *c*) $1,695.08 *d*) $1,617.65 *e*) Otra

29. Carlos Eduardo compra una casa con un anticipo que se liquida con $15,000 de apartado y 10 abonos quincenales de $4,500. El 85% restante se amortiza con 50 mensualidades de $10,650 después de pagar el anticipo. ¿Cuál fue el precio de su casa si le cargan el 12.6% capitalizable por mes en los pagos del anticipo y el 11.52% nominal mensual en el resto?

a) $450,698.03 *b*) $470,572.23 *c*) $485,600.42 *d*) $460,414.92 *e*) Otra

30. ¿Cuánto se acumula en 15 meses, si en los primeros 5 se depositan $4,250 mensuales, $2,700 quincenales durante un semestre, y $5,000 cada mes en los últimos 4 meses? Suponga interés del 11% efectivo.

a) $78,748.40 *b*) $80,201.47 *c*) $79,193.23 *d*) $78,093.10 *e*) Otra

31. ¿Cuánto dinero, por concepto de intereses, se ganó en el plan de ahorros del problema 30?

a) $4,875.23 *b*) $5,013.10 *c*) $4,928.32 *d*) $5,098.40 *e*) Otra

32. Al comenzar cada mes del primer año de la vida de su hijo, el señor Pérez deposita $7,500. ¿Cuánto tendrá en su cuenta cuando el hijo cumpla los 17 años, si los primeros 4 devenga intereses del 12% anual capitalizable por mes, los siguientes 7 años gana con el 9% nominal mensual, y los últimos 6 le bonifican el 11% efectivo?

a) $262,787.42 *b*) $925,421.03 *c*) $481,592.31 *d*) $1’025,142.08 *e*) Otra

33. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 32?

a) $391,592.31 *b*) $835,421.03 *c*) $172,787.42 *d*) $420,200.05 *e*) Otra

5.6 Perpetuidades

Una perpetuidad es, se dijo, una anualidad donde la renta se mantiene fija, o variable, pero por tiempo ilimitado, y esto crea la necesidad de que el capital que la produce nunca se agote, a diferencia de las otras anualidades donde el capital al final del plazo queda siempre en ceros.

La renta periódica, por lo tanto, deberá ser menor o igual a los intereses que genera el capital correspondiente; y por esto nunca debe estar por arriba del resultado que se obtiene al multiplicar el capital C por i, la tasa de interés por periodo. Como esta tasa puede variar, la renta también, pero para efectos prácticos, desde el punto de vista operativo, se considera fija durante por lo menos un periodo anual. Puede probarse, además, que si la renta es menor que los intereses del periodo, los resultados varían muy poco y por eso no se considera el caso.

También es cierto que en este tipo de anualidades, no se da tiempo a que los intereses se capitalicen, y por eso es indiferente que la tasa de intereses sea simple o compuesta, aunque para facilitar las operaciones se considera simple, tomando en cuenta que la frecuencia de conversión o de capitalización de intereses coincide con la frecuencia de pagos.

Ejemplo 1

Inversión para una beca trimestral

Con el producto de sus ventas, la Lotería Nacional instituye una beca trimestral de \$20,500. ¿De cuánto debe ser el capital a invertir a la tasa de interés del 12% compuesto por trimestre?

solución

La renta por trimestre es igual a los intereses del periodo trimestral que están determinados por:

$$I = Cin$$

donde

$I = 20{,}500$, la renta trimestral

$n = 3/12$, un trimestre, el plazo en años

$i = 0.12$, la tasa de interés nominal trimestral

C, el capital a invertir, la incógnita

Por lo tanto,

$$20{,}500 = C(0.12)(3/12) \qquad I = Cin$$

de donde

$$C = 20{,}500/0.03 \quad \text{o} \quad C = \$683{,}333.33$$

Note usted que de emplearse la fórmula del interés compuesto el monto deberá ser $M = C + 20{,}500$ y, por lo tanto,

$$C + 20{,}500 = C(1 + 0.12/4) \qquad M = C(1 + i/p)^{np}, \quad np = 1$$

$$C + 20{,}500 = C(1.03)$$

$$20{,}500 = 1.03C - C$$

$$20{,}500 = (1.03 - 1)C$$

de donde

$$C = 20{,}500/0.03 \quad \text{o} \quad C = 683{,}333.33$$

Ejemplo 2

Renta mensual perpetua

¿Cuánto pueden retirar cada mes y por tiempo ilimitado la viuda de González y sus herederos, si les son depositados \$970,000 en un banco que paga una tasa de interés del 18.72% anual compuesto por mes?

solución

En la fórmula $I = Cin$ se sustituyen:

C por 970,000, n por 1/12, el plazo en años, e

i por 0.1872, la tasa de interés anual, por lo que la renta mensual es

$I = 970{,}000(0.1872)(1/12) \qquad I = Cin$

$I = \$15{,}132.00$

Ejemplo 3

Capital necesario para una renta perpetua

¿Cuál es el capital que debe depositarse en un banco que bonifica el 10.02% nominal mensual, para disponer de \$15,000 mensuales por tiempo ilimitado?

solución

En este caso, los valores para reemplazar en la fórmula $I = Cin$ son:

$I = 15{,}000$, la renta mensual $I = R$

$i = 0.1002$, la tasa anual capitalizable por mes

$n = 1/12$, el plazo en años, entonces,

$$15{,}000 = C(0.1002)(1/12)$$

de donde

$$C = 15{,}000/0.00835 \quad \text{o} \quad C = \$1'796{,}407.19$$

Ejemplo 4

Una inversión de millón y $1,500,000 de dólares produce los suficientes intereses para disponer de $38,000 cada bimestre y por tiempo ilimitado. ¿Cuál es la tasa de interés por periodo?

Ahora la incógnita es i, la tasa de interés bimestral:

$$38{,}000 = 1'500{,}000(i)(1/6) \qquad I = C(i)n$$

de donde

$$i = (38{,}000/1'500{,}000)6 \quad \text{o} \quad i = 0.152 \quad \text{o} \quad 15.2\% \text{ anual},$$

porque el plazo, 1/6, está en años, la bimestral es 0.152/6 = 0.025333333 o 2.5333% bimestral.

Ejemplo 5

Anualidad general

¿Cuánto debe depositar ahora el señor Paredes, para disponer de $9,000 cada quincena, comenzando dentro de tres años y suponiendo que para entonces la tasa de interés seguirá siendo del 13% efectivo?

solución

Para el capital que debe tenerse las disposiciones, primero se obtiene la tasa capitalizable por quincena, equivalente al 13% efectivo

$$0.13 = (1 + i/24)^{24} - 1 \qquad e = (1 + i/p)^p - 1$$

de donde

$$(1 + i/24)^{24} = 1.13$$

$$1 + i/24 = \sqrt[24]{1.13}$$

$$1 + i/24 = 1.00510539$$

$$i = (1.00510539 - 1)24 \quad \text{o} \quad i = 0.12252936$$

entonces,

$$9{,}000 = C_1(0.12252936)(1/24) \qquad I = Cin$$

de donde

$$C_1 = (9{,}000/0.00510539) \quad \text{o} \quad C_1 = \$1'762{,}842.799$$

este capital está una quincena antes de la primera renta y por eso debe trasladarse, con la fórmula de interés compuesto, hasta el día de hoy con un plazo de 24(3) − 1 = 71 quincenas, entonces:

$$C = C_1(1.00510539)^{-71} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$

$$C = 1'762{,}842.799\ (0.696588438) \quad \text{o} \quad C = \$1'227{,}975.91$$

Ejemplo 6

¿Cuánto tiempo antes de disponer de una renta semanal de $2,100 por tiempo ilimitado, deben depositarse $950,000 en un banco que bonifica el 10.4% de interés nominal semanal?

solución

Se obtiene primero el capital necesario una semana antes de la primera renta:

$$2{,}100 = C_1(0.104)(1/52) \qquad I = Cin \qquad I = R$$
$$2{,}100 = C_1(0.002)$$

de donde

$$C_1 = 2{,}100/0.002 \qquad \text{o} \qquad C_1 = \$1'050{,}000$$

Este capital es a la vez el monto o valor futuro de los $950,000, x semanas después; entonces:

$$1'050{,}000 = 950{,}000(1.002)^x \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

Para despejar la incógnita, se divide entre 950,000, es decir, este número pasa dividiendo al lado izquierdo de la igualdad, resultando:

$$1.105263158 = (1.002)^x \qquad \text{o} \qquad (1.002)^x = 1.105263158$$

Se toma el logaritmo natural, o común, a los dos miembros:

$$Ln(1.002)^x = Ln(1.105263158)$$

de donde

$$(x)Ln(1.002) = Ln(1.105263158), \qquad \text{ya que} \qquad Ln(A^n) = (n)Ln(A)$$
$$x = Ln(1.105263158)/Ln(1.002)$$
$$x = 0.100083459/0.001998003$$
$$x = 50.09175441$$

Esto indica que 51 semanas antes de la primera renta deberán depositarse los $950,000 en las condiciones dadas.

Ejercicios 5.6

1. Explique las características de las anualidades perpetuas.
2. ¿Cuál es la tasa de interés nominal mensual, si un capital de $400,000 genera una renta mensual de $6,750 por tiempo ilimitado?
3. ¿Cuánto dinero destinará la Lotería Nacional para una beca de $8,250 mensual por tiempo ilimitado, si se gana el 12.04% de interés anual compuesto por mes?

4. Una institución filantrópica instituye una beca semestral de $20,000. ¿Con cuánto lo hace si el interés es del 13.20% capitalizable por semestre?

5. Cinco años antes de su matrimonio, una persona recibe una herencia que le permite contar con $25,000 en su boda y con $5,200 al final de cada mes desde esa fecha y por tiempo indefinido. ¿Qué capital le fue heredado considerando que el dinero reditúa el 17.52% de interés anual compuesto por mes?

6. ¿Cuál es la tasa efectiva de interés si una inversión de $325,000 produce una renta quincenal de $2,250?

7. Un famoso filántropo regala $750,000 a una institución de beneficencia, y se deposita en una cuenta bancaria que paga una tasa de interés del 11.76% anual compuesto por bimestre. ¿Cuánto podrá retirar la institución cada bimestre desde el inicio del décimo bimestre y por tiempo ilimitado?

8. ¿A qué tasa de interés efectiva debe invertir $2 millones de dólares la Lotería Nacional para ofrecer 8 becas mensuales de $6,500 cada una?

9. ¿Cuánto podrán retirar al final de cada mes los herederos del señor Márquez a partir del décimo año y de manera perpetua, si ahora deposita $250,000 en un banco que paga el 9% de interés anual capitalizable por mes?

10. Un egresado dona a su alma máter $75,000 para una beca trimestral que será efectiva 3 años después. ¿Cuál es el monto de la beca si devenga una tasa de interés del 16.8% nominal trimestral?

11. ¿Con qué tasa de interés nominal mensual deberán invertirse $80,000 para retirar $1,350 cada mes por tiempo indefinido?

12. Pronósticos Deportivos instituye 5 becas mensuales de $7,500 cada una para estudiantes de escasos recursos. ¿Cuánto deberá invertir en una institución financiera que paga una tasa del 11% de interés efectiva?

13. Una universidad creó un fondo con $450,000 iniciales y $20,000 cada mes durante 5 años, para asegurar los estudios de alumnos de escasos recursos. ¿A cuánto ascenderá la renta semestral de que se dispone a partir de los 8 años del primer depósito, si se gana una tasa del 12.4% de interés nominal mensual?

14. ¿Qué capital se donará a una institución de beneficencia, si por ello recibe $17,500 trimestrales a una tasa del 13.4% de interés capitalizable por trimestre?

15. El testamento del señor Espinoza especifica que el 38% de su fortuna estimada en $1.7 millones sea legado al Instituto de Investigación Oncológica. ¿Cuánto recibirá la institución cada bimestre por este concepto y por tiempo indefinido, si se devenga una tasa de interés del 9.3% anual compuesto por bimestre y la primera renta se paga 3 años después?

16. ¿Por qué cantidad es la beca mensual que la Lotería Nacional instituyó con un importe inicial de $875,000 invertidos a una tasa de interés del 11.6% anual compuesto por trimestre?

17. Un afamado boxeador legó $925,000 a la Promotora Nacional del Deporte. ¿Qué capital podrá disponer cada trimestre y por tiempo ilimitado, si se invierten en una cuenta que genera intereses a una tasa del 15.4% de interés anual compuesto por bimestre?

En los problemas del 18 a 36 seleccione la opción correcta justificando su elección.

18. ¿Qué capital debe invertirse al 13.5% efectivo para disponer de $3,500 quincenales por tiempo indefinido?

a) $803,429.53 *b*) $661,587.56 *c*) $735,429.62 *d*) $780,901.33 *e*) Otra

19. ¿Con qué tasa efectiva aproximada deben depositarse $650,000 para retirar $4,850 mensuales por tiempo indefinido?

a) 9.33% *b*) 9.68% *c*) 10.02% *d*) 10.43% *e*) Otra

20. ¿Cuánto debe invertirse ahora para disponer de $12,560 cada mes, comenzando 4 años después y por tiempo ilimitado? Suponga intereses del 0.9% mensual, capitalizable por mes.

a) $915,930.07 *b*) $1’008,963.42 *c*) $960,393.02 *d*) $902,203.41 *e*) Otra

21. El 1 de octubre de 2004 se depositaron $1.5 millones de dólares, devengando intereses del 12.8% nominal mensual. ¿Cuánto puede retirarse cada día primero del mes, a partir del 1 de febrero de 2007?

a) $18,935.42 *b*) $19,588.93 *c*) $21,307.60 *d*) $20,978.52 *e*) Otra

22. ¿Cuántos meses después de ahora pueden retirarse $7,500 mensuales, considerando que hoy se invierten $775,000 con intereses del 13.6% nominal mensual?

a) 13 *b*) 16 *c*) 15 *d*) 20 *e*) Otra

23. Pronósticos invierte un capital para becar a estudiantes destacados de escasos recursos económicos con $45,000 mensuales. Determine el capital si se consideran intereses del 14.5% efectivo.

a) $3’258,421.73 *b*) $2’963,498.22 *c*) $3’965,588.91 *d*) $3’686,435.08 *e*) Otra

24. En el problema 23, ¿de cuánto dinero se dispondrá cada mes, si 5 años después de la inversión se dispone de la primera renta mensual?

a) $85,793.42 *b*) $90,605.35 *c*) $87,566.80 *d*) $86,963.08 *e*) Otra

25. ¿Cuál es la tasa efectiva aproximada, si un capital de $2.3 millones de dólares genera una renta bimestral de $35,000 por tiempo ilimitado?

a) 9.0356% *b*) 10.0645% *c*) 8.3649% *d*) 9.4849% *e*) Otra

26. En el problema 25, ¿de qué cantidad es la renta mensual perpetua, si la primera se realiza 15 meses después de la inversión?

a) $19,377.98 *b*) $20,015.25 *c*) $19,873.41 *d*) $18,993.08 *e*) Otra

27. Para que su hijo disponga de una renta mensual de $13,500 por tiempo ilimitado y a partir de los 14 años de edad, un padre de familia invierte un capital devengando intereses del 16% efectivo, cuando el muchacho cumple 5 años. ¿De qué magnitud es?

a) $288,791.00 *b*) $375,943.07 *c*) $403,129.61 *d*) $529,836.42 *e*) Otra

28. Para ayudar a los niños con capacidades especiales, una importante pizzería deposita $10,000 cada semana durante 8 años. ¿Cuál será la renta mensual para los niños a partir de esos 8 años, por tiempo indefinido, si se consideran intereses del 11.6% anual capitalizable por semana?

a) $12,403.52 *b*) $10,397.41 *c*) $11,096.03 *d*) $13,207.48 *e*) Otra

29. ¿Aproximadamente con qué tasa de interés deberán invertirse $780,000 para contar con una renta mensual de $6,750 de manera perpetua?

a) 11.0536% *b*) 12.3084% *c*) 11.9682% *d*) 10.3846% *e*) Otra

30. Si ahora se invierten $650,000 en una cuenta que bonifica el 12.6% de interés nominal mensual, ¿cuánto tiempo después podrán retirarse $10,000 mensuales por tiempo ilimitado?

a) 25 meses *b*) 2 años *c*) 37 meses *d*) 2.5 años *e*) Otra

31. El licenciado Cortés deposita $160,000 en una cuenta que reditúa el 10.6% de interés capitalizable por mes. Año y medio después, lleva al banco otros $200,000 y cuatro años después de la primera fecha, deposita otros $320,000. ¿De qué renta perpetua por quincena puede disponer su familia a partir del noveno año, desde que hizo la primera inversión?

a) $7,243.52 *b*) $6,542.63 *c*) $7,008.45 *d*) $6,104.25 *e*) Otra

32. ¿Cuánto dinero ganó el licenciado del problema 31 en los 9 años iniciales?

a) $705,139.53 *b*) $596,782.40 *c*) $762,048.23 *d*) $687,423.00 *e*) Otra

33. ¿De cuánto es la renta máxima que una persona puede disponer por mes y por tiempo ilimitado, si deposita $500,000 dólares ganando intereses del 11.8% nominal mensual?

a) $4,325.03 *b*) $5,023.48 *c*) $4,916.67 *d*) $4,710.52 *e*) Otra

34. ¿Cuánto es el mínimo que una persona debe invertir al 13.5% nominal semanal, para contar con una renta semanal de $1,750 por tiempo indefinido?

a) $647,074.07 *b*) $603,705.08 *c*) $710,428.63 *d*) $635,429.63 *e*) Otra

35. ¿Cuál es la tasa nominal bimestral mínima para retirar $41,250 cada bimestre y por tiempo ilimitado, si se deposita un capital de $2’750,000 al comienzo?

a) 8.75% *b*) 11.6% *c*) 13.08% *d*) 9.00% *e*) Otra

36. Si se depositan 2 millones de dólares en una cuenta que bonifica el 11.4% capitalizable por mes, entonces pueden retirarse $19,000 mensuales por tiempo ilimitado. ¿De cuánto podría disponerse desde el segundo, si en el primero se retiran solamente $18,000?

a) $19,095.00 *b*) $19,009.50 *c*) $19,019.00 *d*) $19,190.00 *e*) Otra

5.7 Algunos problemas de aplicación

Además de las aplicaciones específicas de las anualidades, en esta sección se repasan las anteriores del capítulo, con ejemplos que resumen y combinan, sin un orden específico, los diferentes tipos de anualidades, con la finalidad primordial de auxiliar al estudiante a elegir con acierto las fórmulas y la metodología en cada ejercicio para que, sin contar con la orientación que se tiene al resolver un problema de una sección cualquiera, por estar en esa sección, esté en condiciones de plantearlo y resolverlo correctamente.

Costo estimado por consumo de agua

Ejemplo 1

Estimado del costo bimestral del consumo de agua

¿Cuál será el costo estimado por bimestre del consumo de los servicios de agua y alcantarillado municipales de un usuario, si al comenzar el año le llega un recibo por \$6,725 por el periodo anual, suponiendo que los bancos pagan el 11.4% de interés anual capitalizable por bimestre?

solución

Se trata de una anualidad vencida, así se supone, donde la incógnita es la renta bimestral R, que se obtiene reemplazando en la ecuación 5.2 los valores de: el valor presente C por \$6,725, la tasa compuesta por bimestre; i por 0.114, la frecuencia de conversión y de pagos; p por 6, la tasa bimestral compuesta por bimestre; i/p por 0.019; y el número de rentas bimestrales por año np por 6.

$$6,725 = R\left[\frac{1-(1.019)^{-6}}{0.019}\right] \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$6,725 = R(5.6203835)$$

de donde

$$R = 6,725/5.6203835 \quad \text{o} \quad R = \$1,196.54$$

Aportaciones a un fondo para el retiro

Ejemplo 2

Renta trimestral en un fondo para el retiro

Los 550 miembros de la Asociación de Futbolistas participan con \$4,800 cada uno en un plan de inversión para el retiro, en un banco que reditúa el 12.96% de interés anual capitalizable por trimestre. ¿De qué renta trimestral podrán disponer luego de 3 años y por tiempo ilimitado?

solución

El capital que entre todos invierten es

$$C = 4{,}800(550)$$

$$C = \$2'640{,}000$$

El valor futuro de este capital, 11 trimestres después, o sea uno antes de hacer el primer retiro, es

$$M = 2'640{,}000(1 + 0.1296/4)^{11}$$

$$M = 2'640{,}000(1.420129.518) \qquad \text{o} \qquad M = 3'749{,}141.928$$

La renta trimestral perpetua a partir del duodécimo trimestre es igual a los intereses que genera este capital durante un trimestre.

$$I = R = 3'749{,}141.928\ (0.0324) \qquad I = Cin, \qquad n = 1 \text{ trimestre}$$

o $$R = \$121{,}472.20$$

Pagos equivalentes en dos anualidades

Ejemplo 3

Valor presente de 2 anualidades, pagos equivalentes

Una cadena hotelera contrata hoy servicios de limpieza por un año a la compañía Mantenimiento y Limpieza. Ambas empresas convienen en que el pago se realice de la manera siguiente:

Dos pagos bimestrales de \$15,000 al final de cada uno de los primeros dos bimestres, 5 pagos mensuales de \$10,000 el último de cada mes, y finalmente 6 abonos quincenales vencidos de \$7,500 cada uno. Suponga que la tasa de interés es del 15% capitalizable por mes.

a) ¿Cuánto se pagaría al comenzar el año, si en lugar de estos 13 abonos se hiciera un solo pago?

b) ¿Cuánto se pagaría si se hicieran 2 pagos iguales, uno al comenzar el plazo de un año y otro a los 6 meses?

solución

a) Es necesario obtener el valor presente de 3 anualidades al comienzo del año, la primera de ellas inmediata con sólo 2 rentas, y las otras dos diferidas con 5 y 6 rentas cada una.

El capital de la primera C_A se evalúa con el valor presente de cada renta, mediante la fórmula del interés compuesto, más que como una anualidad. El plazo en la primera es de 2 meses y en la segunda de 4.

$$C_1 = 15{,}000(1 + 0.15/12)^{-2} \quad {}^{-}C = M(1 + i/p)^{-np}$$
$$C_1 = 15{,}000(1.0125)^{-2}$$
$$C_1 = 15{,}000(0.975461058) \text{ o } C_1 = 14{,}631.92$$
$$C_2 = 15{,}000(1 + 0.15/12)^{-4}$$
$$C_2 = 15{,}000(0.951524275) \text{ o } C_2 = 14{,}272.86$$

Entonces, la suma es

$$C_A = 14{,}631.92 + 14{,}272.86 \quad \text{o} \quad C_A = \$28{,}904.78$$

Para el valor presente C_B de la segunda anualidad, primero se obtiene el capital C_3 al comenzar el quinto mes, como se aprecia en la figura 5.15.

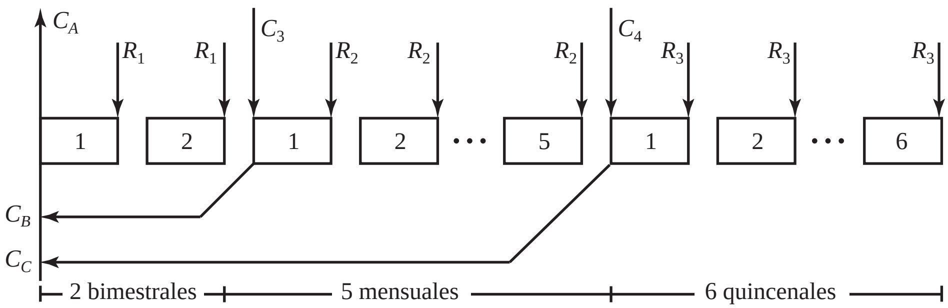


FIGURA 5.15

Ahora la renta es R = \$10,000, el número de rentas es np = 5 y la tasa por periodo es i/p = 0.15/12 o i/p = 0.0125; por lo tanto,

$$C_3 = 10{,}000 \frac{1-(1.0125)^{-5}}{0.0125}$$

$$C_3 = 10{,}000(4.817835048) \quad \text{o} \quad C_3 = \$48{,}178.35$$

4 meses antes, esto será equivalente a

$$C_B = 48{,}178.35(1.0125)^{-4}$$
$$C_B = 48{,}178.35\,(0.951524275) \quad \text{o} \quad C_B = \$45{,}842.87$$

Para el valor presente C_4 de la tercera al inicio del décimo mes, es decir al final del noveno, es necesario hallar primero la tasa i compuesta por quincenas equivalente al 15% de interés nominal mensual,

$$(1 + i/24)^{24} = (1 + 0.15/12)^{12}$$
$$(1 + i/24)^{24} = (1.0125)^{12}$$
$$(1 + i/24)^{24} = 1.160754518$$
$$1 + i/24 = \sqrt[24]{1.160754518} \quad \text{o} \quad 1 + i/24 = 1.00623059$$

El plazo es de 6 quincenas, 6 rentas quincenales, y cada una es de \$7,500; por lo tanto,

$$C_4 = 7{,}500\left(\frac{1-(1.00623059)^{-6}}{0.00623059}\right)$$

$$C_4 = 7{,}500(5.87130145) \quad \text{o} \quad C_4 = \$44{,}034.76$$

y nueve meses antes es $C_C = 44{,}034.76(1 + 0.0125)^{-9}$

$$C_C = 44{,}034.76(0.894220688) \quad \text{o} \quad C_C = \$39{,}376.79$$

En consecuencia, al iniciar el año el precio de los servicio de limpieza será:

$$C = C_A + C_B + C_C$$
$$C = 28{,}904.78 + 45{,}842.87 + 39{,}376.79$$

o $$C = \$114{,}124.44$$

b) Para esta segunda forma de pago se debe encontrar el valor x, el monto de cada uno de los dos pagos, uno al comenzar el año y otro a los 6 meses; para el segundo, el valor presente es

$$C_1 = x(1.0125)^{-6} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$

o $$C_1 = (0.928174876)x$$

La suma de C_1 y el primer pago x es igual al precio por la limpieza:

$$C_1 + x = 114{,}124.44$$
$$(0.928174876)x + x = 114{,}124.44,$$
$$(1.92817487)x = 114{,}124.44, \qquad \text{ya que} \qquad ab + b = (a + 1)b$$

de donde

$$x = 114{,}124.44/1.928174876 \quad \text{o} \quad x = \$59{,}187.80791$$

es decir, que cada uno de los pagos en este plan de crédito es de \$59,187.81.

Utilidades en cultivo de agave

Ejemplo 4

Suponiendo que el cultivo de agave requiere de gastos bimestrales de \$8,000 durante 7 años, al final de los cuales genera ingresos de \$325,000 mensuales durante tres meses, ¿de cuánto son las utilidades?

solución

Las utilidades son la diferencia entre los ingresos y los egresos. Los primeros son 3(325,000) = 975,000; y los egresos son 8,000(7)(6) = 336,000, entonces,

$$U = 975{,}000 - 336{,}000$$

o $$U = \$639{,}000$$

Ejemplo 5

Si el dinero del ejemplo 4 se invierte en un banco que bonifica el 9.09% anual capitalizable por mes, ¿de cuánto serán las utilidades, es decir, los intereses?

solución

La tasa compuesta por bimestre equivalente al 9.09% nominal mensual es i de la ecuación:

$$(1 + i/6)^6 = (1 + 0.0909/12)^{12}$$

de donde al obtener la raíz sexta, queda

$$1 + i/6 = (1.007575)^2$$
$$1 + i/6 = 1.015207381 \quad \text{o} \quad i = 0.091244286$$

El monto de los $8,000 bimestrales, al final de los 7 años, es

$$M_1 = 8{,}000(1.015207381)\left[\frac{(1.015207381)^{42} - 1}{0.015207381}\right]$$

$$M_1 = 8{,}000(1.015207381)(58.19224066)$$

o $$M_1 = \$472{,}617.5378$$

entonces, las utilidades, es decir, los intereses en este caso son

$$I = 472{,}617.54 - 8{,}000(7)(6)$$
$$I = \$136{,}617.54$$

Ahorro para estudios profesionales

Ejemplo 6

Para disponer de $60,000 al inicio de cada semestre de los 9 que dura la carrera profesional de su hijo, un padre de familia deposita $7,000 mensuales en una cuenta que le bonifica intereses del 9.6% nominal mensual. ¿Cuándo debe comenzar si el último lo efectúa un mes antes de que el hijo comience sus estudios profesionales?

solución

Se obtiene primero el capital al inicio de las 9 disposiciones semestrales. Para ello, se obtiene la tasa de interés nominal semestral que equivale al 9.6% capitalizable por mes:

$$(1 + i/2)^2 = (1 + 0.096/12)^{12}$$
$$1 + i/2 = (1.008)^6 \qquad \text{Se saca raíz cuadrada}$$
$$1 + i/2 = 1.048970302, \text{ de donde } i = 0.097940604$$

Entonces,

$$C = 60,000\left[\frac{1-(1.048970302)^{-9}}{0.048970302}\right] \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$C = 60,000(7.140527322) \quad \text{o} \quad C = 428,431.64$$

que es el capital que se necesita al inicio de la carrera y debe ser igual al monto acumulado de las x rentas mensuales anticipadas de \$7,000, por lo tanto,

$$428,431.64 = 7,000(1+0.096/12)\left[\frac{(1.008)^{x}-1}{0.008}\right] \qquad M = R(1+i/p)\left[\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right]$$

$$428,431.64 = 7,000(1.008)\left[\frac{(1.008)^{x}-1}{0.008}\right]$$

de donde para despejar x se efectúan algunos pasos algebraicos y después se considera logaritmos a los dos lados de la ecuación.

$$\frac{428,431.64(0.008)}{7,000(1.008)} + 1 = (1.008)^{x}$$

$$(1.008)^{x} = 1.485750159$$

$$Ln(1.008)^{x} = Ln(1.485750159)$$

$$(x)Ln(1.008) = Ln(1.485750159), \quad \text{porque } Ln(M^{n}) = (n)Ln(M)$$

$$x = Ln(1.485750159)/Ln(1.008) \quad \text{o} \quad x = 49.68767229$$

Si se redondea a 50 rentas, entonces cada una se reduce un poco, ya que

$$428,431.64 = (1.008)\frac{(1.008)^{50}-1}{0.008}$$

$$428,431.64 = R(61.67099245)$$

$$R = 428,431.64/61.67099245 \quad \text{o} \quad R = \$6,947.05$$

Entonces, debe comenzar sus depósitos mensuales 4 años y dos meses antes del inicio de la carrera.

Deuda externa del país

Ejemplo 7

Pago mínimo para que no crezca la deuda externa

Si la deuda externa de un país es de 13,750 millones de dólares, ¿de cuánto debe ser el pago mínimo trimestral para que no se incremente, considerando intereses del 4.5% efectivo?

solución

Para evitar que la deuda se incremente cada pago trimestral debe cubrir por lo menos los intereses del periodo. Para hallarlos se obtiene primero la tasa de interés anual *i*, compuesta por trimestre equivalente al 4.5% efectivo.

$$0.045 = (1 + i/4)^4 - 1 \qquad e = (1 + i/p)^p - 1$$

$$(1 + i/4)^4 = 1.045$$

$$1 + i/4 = \sqrt[4]{1.045}$$

$$1 + i/4 = 1.01106499, \quad \text{de donde} \quad i = 0.04425996$$

Los intereses generados por la deuda en un trimestre son, entonces,

$$I = 13{,}750(0.04425996)(1/4) \qquad I = Cin$$

$$I = 152.1436125$$

o $152,143,612.50 trimestrales

Note que en todos los casos la tasa de interés y el plazo están en las mismas unidades de tiempo.

Alquiler de viviendas

La cantidad que el propietario recibe por el alquiler de sus bienes inmuebles constituye un ejemplo de anualidad perpetua, tomando en cuenta que por renovación del contrato, la oferta y la demanda de los bienes en renta y la propia variación de las tasas de interés, el tamaño de la renta puede variar pero es permanente por lo menos durante la vida útil del inmueble.

En virtud de que casi todos los inmuebles aumentan su valor con el tiempo, las tasas de interés son relativamente bajas en esta clase de operaciones.

Ejemplo 8

¿En cuánto deberá rentar su casa el licenciado López, si está valuada en $1’750,000 dólares y pretende ganar con el 6.3% de interés anual compuesto por mes?

solución

La renta mensual es igual a los intereses que se generan en el mes, esto es:

$$I = 1'750{,}000(0.063)(1/12)$$

$$I = 9{,}187.50$$

Es práctica común que la renta de la vivienda se pague al comenzar el mes, pero esto no afecta el resultado.

Ejemplo 9

Tasa de interés en la renta mensual de un departamento

Un departamento se renta en \$4,200 mensuales. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por mes, si el propietario lo tiene valuado en \$750,000?

En la fórmula de los intereses $I = Cin$ se reemplazan C por 750,000, la I por 4,200, la renta mensual y n por 1/12, el plazo en años.

$$4{,}200 = 750{,}000(i)(1/12)$$

de donde

$$i = 4{,}200(12)/750{,}000$$

$$i = 0.0672, \quad \text{es decir,} \quad 6.72\%$$

Inversión a plazo fijo en el Banco del Ahorro Nacional

Uno de los instrumentos de ahorro que ofrece el Banco de Ahorro Nacional y Servicios Financieros, el *Tandahorro*, que se ofrece a plazo fijo de uno, dos o tres años con depósitos mensuales y apertura mínima con \$50. La tasa de interés con que se ofrecen es variable, dependiendo de la tasa que tienen los certificados del Tesoro y, por esta razón, se protege hasta cierto punto a los ahorradores contra los efectos inflacionarios.

Ejemplo 10

¿Qué monto logra acumular una persona que deposita \$600 cada mes en Tandahorro, con plazo de 36 meses, considerando que le bonifican una tasa nominal mensual equivalente al 45% de la que ofrecen los certificados del Tesoro , que se ha mantenido en un 8.62% en promedio anual? Suponga que abre su cuenta con \$1,500.

solución

En la fórmula para el monto de las anualidades anticipadas se instituyen:

R por \$600, la renta mensual

i por 0.45(0.0862) = 0.03879, la tasa de interés anual

n por 3, el plazo en años

p por 12, porque son depósitos mensuales, y

np por 36, el número de rentas

Así,

$$M_1 = 600(1 + 0.03879/12)\left[\frac{(1.0032325)^{36} - 1}{0.0032325}\right] \qquad M = R(1 + i/p)\left[\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right]$$

$$M_1 = 600(1.0032325)(38.11311276) \qquad \text{o} \qquad M_1 = \$22{,}941.78804$$

Note usted que este resultado incluye \$600 de la apertura. ¿Por qué? y, por lo tanto, se le debe sumar el valor futuro de los 900 restantes, con la fórmula del interés compuesto.

$$M_2 = 900(1.0032325)^{36}$$
$$M_2 = \$1,010.880573$$

La suma de los dos montos es el total acumulado:

$$M = M_1 + M_2 \quad \text{o} \quad M = \$23,952.67, \text{ redondeando}$$

Préstamos con periodo de gracia

Es práctica común que cuando se otorga un crédito a largo plazo y de magnitud considerable, se conceda un *periodo de gracia* en el que el deudor no tiene obligación de dar pago alguno, provocando que el monto prestado se incremente durante ese periodo, con una tasa de interés que podría ser diferente de la que se estipula en la anualidad que, por esta condición, cae en la categoría de las diferidas.

Ejemplo 11

Para apoyar a la industria textil el BID, Banco Interamericano de Desarrollo, concede al país un préstamo por 425 millones de dólares, con un plazo de 18 años que incluyen 4 de gracia al principio. Obtenga el tamaño de cada renta mensual, si en el periodo de gracia la tasa de interés es del 7.2% anual al capitalizable por mes, y en el resto de los años es del 10.3% efectivo.

solución

El monto al final de los cuatro años de gracia, en millones de dólares, es

$$M = 425(1 + 0.072/12)^{48}$$

$$M = 425(1.33261002) \quad \text{o} \quad M = 566.3592585$$

y éste es igual al valor presente de la anualidad, con pagos mensuales e intereses del 9.843528% nominal mensual que corresponde al 10.3% efectivo, ya que

$$0.103 = (1 + i/12)^{12} - 1 \qquad e = (1 + i/12)^{12} - 1$$

de donde

$$(1 + i/12)^{12} = 1.103$$
$$1 + i/12 = \sqrt[12]{1.103}$$
$$1 + i/12 = 1.00820294 \quad \text{o} \quad i = 0.09843528$$

entonces, considerando que la anualidad es anticipada, se cumple que:

$$566.3592585 = R\left[\frac{1-(1.00820294)^{-168}}{0.00820294}\right]$$

$$566.3592585 = R(91.0064594)$$

$$R = 566.3592585/91.75297993$$

$$R = 6{,}172652475 \text{ millones de dólares}$$

o

$$R = \text{US\$}6'172{,}652.48$$

Crédito hipotecario con renta variable

Ejemplo 12

Plazo en crédito hipotecario con renta variable, intereses

Una promotora inmobiliaria ofrece casas con un crédito hipotecario constituido de 48 mensualidades vencidas de $6,500 y una tasa de interés del 21.6% anual compuesto por mes. El matemático Campos adquiere una casa y decide incrementar el pago de cada semestre a $15,500, aprovechando su aguinaldo y su prima vacacional.

a) ¿En cuánto tiempo terminará de pagar su casa, si se considera que el primero de los pagos mayores lo realiza el día de la compra?

b) ¿Cuánto pagará por concepto de interés?

solución

a) Primero es necesario hallar el valor presente de la hipoteca en las condiciones originales, tratando el problema como una anualidad ordinaria con:

$R = 6{,}500$, $np = 48$ e $i/p = 0.216/12 = 0.018$; por lo tanto,

$$C_1 = 6{,}500\left(\frac{1-(1.018)^{-48}}{0.018}\right) \qquad C = R\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$C_1 = 6{,}500(31.95978574) \quad \text{o} \quad C_1 = \$207{,}738.61$$

Se resta el primer abono de $15,500 porque se hace el día de la compra.

$$C = 207{,}738.61 - 15{,}500.00$$

$$C = \$192{,}238.61$$

La gráfica de la figura 5.16 ayuda a entender mejor el procedimiento.

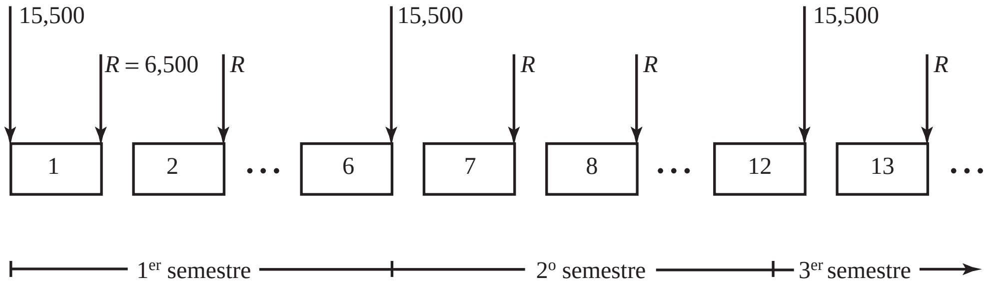


FIGURA 5.16

Es conveniente hallar la renta mensual R_1 equivalente a los \$9,000 adicionales por semestre. Para esto se utiliza la ecuación 5.4 para el valor futuro de una anualidad vencida, notando que los \$9,000 resultan de restar \$6,500 de los \$15,500.

$$9,000 = R_1\left(\frac{(1.018)^6 - 1}{0.018}\right) \qquad M = R\left(\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)$$

$$9,000 = R_1(6.276568111)$$

donde $R_1 = 9,000/6.276568111$ o $R_1 = \$1,433.90$

Esto significa que abonar \$9,000 semestral es lo mismo que abonar \$1,433.90 cada mes; por lo tanto, la renta mensual en total es

$$R = 6,500 + 1,433.90$$
$$R = \$7,933.90$$

Para obtener el número aproximado de rentas, $np = x$, se reemplazan esta renta y el valor presente del crédito en la ecuación 5.2:

$$192,238.61 = 7,933.90\left(\frac{1-(1.018)^{-x}}{0.018}\right)$$

de donde, con algunos pasos algebraicos, se llega a:

$$\frac{192,238.61}{7,933.90}(0.018) - 1 = -(1.018)^{-x}$$

o $$(1.018)^{-x} = 0.563859517$$

que se resuelve tomando el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación, es decir,

$$Ln(1.018)^{-x} = Ln(0.563859517)$$

$$(-x)Ln(1.018) = Ln(0.563859517), \text{ ya que } Ln(M^n) = nLn(M)$$

$$-x = Ln(0.563859517)/Ln(1.018)$$

$$-x = -0.572950142/0.017839918$$

$$x = 32.11618676 \quad \text{o } 32 \text{ meses, aproximadamente}$$

Es decir, que el plazo será de 5 semestres y 2 meses adicionales; por lo tanto, serán necesarios 5 pagos semestrales de $15,500, 25 mensuales intercalados y dos más al final de $6,500, cada uno, aproximadamente.

Para obtener con precisión el valor de las rentas mensuales, se encuentra el capital que reduce la deuda con los 5 pagos semestrales. La tasa semestral equivalente i se despeja a partir de la siguiente ecuación:

$$(1 + i/2)^2 = (1 + 0.216/12)^{12}$$

$$1 + i/2 = \sqrt{1.238720532}$$

$$1 + i/2 = 1.112978226$$

El valor presente de los 5 pagos de $9,000 es, entonces,

$$C = 9,000\left(\frac{1-(1.112978226)^{-5}}{0.112978226}\right)$$

$$C = 9,000(3.668374062)$$

$$C = \$33,015.37$$

ya que se trata de 5 rentas vencidas.

El valor presente de los restantes, puesto que la hipoteca se reduce en esta cantidad, debe ser igual a:

$$192,238.61 - 33,015.37 = 159,223.24$$

por lo tanto, la renta mensual será

$$159,223.24 = R\left(\frac{1-(1.018)^{-32}}{0.018}\right)$$

$$159,223.24 = R(24.16502914)$$

donde $R = 159,223.24/24.16502914$

o $R = \$6,588.99$

b) Quiere decir que el crédito hipotecario, a final de cuentas, se cancela con un pago de $15,500 el día de la compra, 27 rentas mensuales de $6,588.99 y 5 semestrales de $15,588.99, porque

$$9,000 + 6,588.99 = \$15,588.99$$

Los intereses son, por lo tanto, la diferencia entre el monto y el capital, donde el monto es el total de lo que se pagó.

$$M = 15,500 + 27(6,588.99) + 5(15,588.99)$$
$$M = 271,347.68$$

El capital es el valor del crédito.

$$C = \$207,738.61$$

Y los intereses son:

$$I = 271,347.68 - 207,738.61$$

$$I = \$63,609.07$$

Ejercicios 5.7

1. Al comenzar el año, a un usuario de los servicios de agua del municipio se le entregó un recibo por $7,300 por su consumo de agua de todo el año. ¿De cuánto será el gasto bimestral, suponiendo que la tasa de interés es del 12.4% anual compuesto por bimestre? Suponga que el cargo se realiza al final de cada bimestre.
2. ¿Cuánto deberá pagar un inquilino al comenzar el año por las 12 mensualidades anticipadas de $8,000 que paga por su vivienda, suponiendo que la tasa de interés es del 11.7% efectiva?
3. Se paga un departamento con el 35% de su precio de contado y el 65% restante en mensualidades vencidas de $6,400 durante 6 años. ¿Cuál era su precio si se pagó una tasa de interés del 14.4% anual capitalizable por mes?
4. Un crédito automotriz se cancela con 20 pagos mensuales de $3,750, seguidos de 30 pagos quincenales de $2,000, a una tasa de interés del 12.96% capitalizable por mes. ¿Cuál fue el precio del automóvil, si además se pagó un anticipo del 30%? ¿Cuánto se cobra por concepto de intereses?
5. Los 65 miembros de una sociedad mutualista participan con $500 quincenales cada uno durante 3 años, ganando una tasa de interés del 15% nominal quincenal. ¿Cuánto podrán disponer al final de cada trimestre por tiempo ilimitado, a partir de los 6 años después de haber comenzado?
6. ¿Qué monto puede disponer un empleado en su jubilación, si desde hace 15 años estuvo ahorrando $3,250 anuales en un fondo para el retiro que le pagó una tasa de intereses del 8.78% efectivo en los primeros 4 años, porcentaje que se incrementó en 1.02 puntos porcentuales anuales cada seis años?
7. El Hospital Santa María adquiere un equipo de resonancia magnética, cuyo precio liquida con un anticipo y un crédito de $950,000 a pagar en un año y medio a una tasa de interés del 13.50% efectivo. Realiza 5 abonos bimestrales de $90,000 cada uno y liquida el resto con pagos mensuales. ¿A cuánto asciende el monto de cada uno?
8. La señora de Chávez recibe $270,000 por un seguro de vida. Invierte dicha cantidad en un banco que paga una tasa de interés del 11.04% nominal mensual. A los 2 años retira $145,000 y a partir del tercero $8,100 mensuales. ¿Durante cuánto tiempo podrá hacerlo? Haga un ajuste a la renta
9. Un importante club de fútbol profesional contrata los derechos de transmisión directa de sus partidos con una empresa de televisión por cable. Recibe un anticipo y $350,000 al final de cada mes durante medio año. ¿Cuál es el valor presente de las 6 rentas al inicio del plazo, si el dinero reditúa un interés del 18.4% anual capitalizable por mes?
10. En el problema 9, otra cadena de televisión le ofrece el mismo anticipo y pagos de $690,000 al término de cada bimestre en el mismo plazo. ¿Cuál le conviene más?

11. Con la promoción de *compre ahora y pague después*, un profesor adquiere un televisor cuyo precio de contado es de $4,250. ¿De cuánto serán cada uno de los 35 pagos semanales, si el primero se realiza 3 meses después de la compra y se cobra un interés del 12.48% capitalizable por semana?

12. El doctor Martínez compra un automóvil con un anticipo y 8 pagos semestrales vencidos de $12,000 cada uno. ¿Cuál fue el crédito, si además paga $5,300 mensuales en los meses intermedios y le cargan un interés del 14.28% anual compuesto por mes? Determine los intereses.

13. El ingeniero Barajas compra una trilladora con un anticipo del 25% y abonos bimestrales vencidos de $130,000 durante 2 años. Suponiendo que el interés es del 14.4% anual capitalizable por bimestre, determine:

a) ¿Cuál es el precio de contado de la máquina?

b) ¿Cuánto paga por concepto de intereses?

c) ¿De cuánto sería cada abono mensual, si da el 40% de anticipo, el primero a los 5 meses de la compra y no varía el plazo?

14. El testamento de un reconocido filántropo estipula que el 49% de sus inversiones valuadas en $1.5 millones de dólares se otorgue al Centro de Readaptación Juvenil de la ciudad. ¿Cuál será la renta mensual con que contará el Centro, dos años después del deceso y por tiempo ilimitado, si se devenga un interés del 24.96% anual capitalizable por mes?

15. El señor Quevedo compra un terreno con un anticipo de $40,000, 48 abonos mensuales vencidos de $4,200 y un interés del 10% efectivo.

a) ¿Cuál es el precio del terreno?

b) ¿Cuánto paga por concepto de intereses?

c) ¿De cuánto será cada pago, si éstos fueran trimestrales?

16. Durante 8 años se invierten $450,000 semestralmente en un predio que se estima producirá $3’635,000 por año a partir del noveno. ¿En cuánto tiempo se recuperará la inversión, si el dinero reditúa el 18% de interés efectivo?

17. ¿De cuánto será la beca mensual instituida por la Lotería Nacional con un capital de $1.3 millones de dólares, si se invierten a una tasa de interés del 8.4% anual capitalizable por mes?

18. El presupuesto para la construcción de la línea 3 del tren ligero de la ciudad es de 3,520 millones de dólares, de los cuales el 30% se hará con la participación del gobierno central, el 35% con la provincia, el 10% con la del municipio, y el 25% restante con un crédito que cobra un interés del 12.48% anual capitalizable por bimestre.

a) ¿Con cuántos abonos bimestrales vencidos de $54’235,000 dólares se amortiza el crédito?

b) ¿De qué tamaño deberá ser el ahorro mensual anticipado del municipio durante los 4 años anteriores a la construcción de la línea?

c) ¿De cuánto deberá ser la renta mensual vencida durante los 23 meses que dura la construcción, en lo que se refiere a la aportación del gobierno?

Suponga que los 3,520 millones se necesitan al comenzar las obras.

19. Una tienda de electrodomésticos vende un televisor de contado en $5,750 o con 40 abonos semanales, el primero 3 meses después de la compra a una tasa del 11.96% de interés compuesto por semana. ¿De cuánto es cada abono?

20. Al vender una máquina de construcción pesada la Urbanizadora del Centro tiene las siguientes opciones:

a) El ingeniero Peña le ofrece dos pagos de $645,000 cada uno, el primero en la compraventa y el otro a los 3 meses.

b) Otro le da $1’250,000 de contado, y

c) Un tercero le da $450,000 el día de la compra, y después 10 abonos mensuales de 90,000 cada uno.

¿Cuál le conviene más si se sabe que los bancos pagan el 11.4% de interés compuesto por mes?

21. ¿Cuántos depósitos quincenales anticipados de $4,590 deben hacerse en la primera parte del año para tener $35,000 al final, si el interés es del 9.84% compuesto por quincena? Haga un ajuste en los depósitos.

22. Hace 2 años con pagos bimestrales vencidos de $14,250, el arquitecto Pérez comenzó a pagar la hipoteca de un departamento en condominio que compró a 7 años de plazo. Sin embargo, decide que a partir del mes próximo sus abonos sean mensuales sin variar el plazo. ¿De cuánto será cada uno si le cobran un interés del 13.8% anual capitalizable por mes? Obtenga los intereses.

23. Para crear su propio negocio, un estudiante de posgrado invierte $5,000 cada quincena en una institución financiera que le da a ganar el 0.58% de interés quincenal, compuesto por quincena, durante los 2 años que permanece en la universidad. ¿Cuánto logrará acumular?

En los problemas 24 al 44 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

24. ¿Cuánto deberá pagar el inquilino de una vivienda al comenzar un periodo de 12 mensualidades de $7,250 cada una, si se consideran intereses del 9.63% nominal mensual?

a) $82,626.83 *b*) $78,921.43 *c*) $84,093.42 *d*) $79,921.43 *e*) Otra

25. En el problema 24, ¿cuánto se ahorro el inquilino por pagar al inicio del año sus mensualidades?

a) $4,921.40 *b*) $4,373.17 *c*) $3,986.93 *d*) $4,528.36 *e*) Otra

26. ¿Cuál es el precio de un automóvil que se paga con un 20% de anticipo, 12 mensualidades de $5,850, seguidas de 24 de $4,500 cada una? Considere intereses del 12% efectivo.

a) $145,873.20 *b*) $203,193.40 *c*) $151,929.94 *d*) $175,828.91 *e*) Otra

27. Un jubilado tiene derecho a una renta mensual de $4,750 durante los 19 años después de un retiro, ¿cuánto deberían darle si prefiere el equivalente al jubilarse, suponiendo que el dinero en un banco genera intereses del 10.8% anual capitalizable por mes?

a) $543,025.32 *b*) $487,802.16 *c*) $602,309.75 *d*) $450,993.85 *e*) Otra

28. La señora de Pérez recibe $320,000 por un seguro de vida. Los invierte en un banco que paga intereses del 9.36% nominal mensual. A los 3 años retira $200,000 y a partir del tercero $7,500 mensuales. ¿Durante cuanto tiempo puede hacerlo?

a) 3 años *b*) 28 meses *c*) 32 meses *d*) 34 meses *e*) Otra

29. El arquitecto Mendoza deposita $8,600 mensuales en un banco que le bonifica el 10% efectivo. A los 2 años de haber comenzado, retira el 35% de lo que tiene en su cuenta y continúa con sus pagos mensuales. ¿De cuánto dinero dispone en su cuenta 3 años y 5 meses después del retiro anterior?

a) $619,081.33 *b*) $520,201.45 *c*) $665,309.43 *d*) $490,783.09 *e*) Otra

30. Un centro de rehabilitación para niños con capacidades diferentes recibe un donativo de $10.25 millones de dólares, de los cuales invierte el 60% en una cuenta bancaria que le bonifica intereses del 10.12% nominal mensual, y el resto lo destina a la renovación de su mobiliario e instalaciones. ¿Cuánto puede retirar de la cuenta cada mes?

a) $48,953.42 *b*) $50,023.32 *c*) $49,693.08 *d*) $51,865.00 *e*) Otra

31. En el problema 30, ¿de cuánto será cada renta, si el centro la recibe cada semana?

a) $10,860.00 *b*) $12,031.42 *c*) $11,930.21 *d*) $10,495.08 *e*) Otra

32. Para ampliar un tramo de carretera a 4 carriles, se tiene un presupuesto de $65 millones de dólares. El 35% será participación del gobierno central, el 40% de la provincia y el municipio participa con el resto. Trece meses antes del inicio de obra, el estado abrió una cuenta con $7'000,000 y depósitos mensuales de $1.5 millones de dólares. ¿Cuánto dinero le faltará para completar su compromiso al iniciar la ampliación? Suponga intereses del 13.65% efectivo.

a) $3'158,821.41 *b*) $5'207,423.63 *c*) $3'428,409.62 *d*) $4'003.028.47 *e*) Otra

33. En el problema 32, el municipio participa con $8.32 millones de dólares y el resto lo liquida con abonos quincenales de $1'142,696.31. ¿Cuántos pagos realiza si le cargan el 5.2% nominal quincenal?

a) 9 *b*) 7 *c*) 10 *d*) 8 *e*) Otra

34. Durante 5 años se gastan $80,000 semestrales en un predio con agave. Si se estima que producirá 1.23 millones por año a partir del sexto, ¿en cuánto tiempo se recuperará la inversión, considerando que el dinero reditúa el 11.4% de interés efectivo?

a) No se recupera *b*) 4 años *c*) 4 años y 8 meses *d*) 5 años *e*) Otra

35. ¿En cuánto tiempo se recupera la inversión en el problema 34, si la utilidad que se espera es de $58,000 anuales?

a) 7 años *b*) 5 años *c*) 4 años *d*) No se recupera *e*) Otra

36. Los socios del club hípico compran un terreno y lo pagan con un anticipo del 35% y abonos mensuales de $15,000 durante 4 años. ¿Cuál fue su precio si los cargan al 10.5% de intereses anual capitalizable por mes?

a) $901,323.31 *b*) $585,860.15 *c*) $798,087.73 *d*) $1'096,930.82 *e*) Otra

37. Luego de efectuar el pago número 32 los socios del club del problema 36 se retrasan con 7 pagos y se ponen al corriente en el 44. ¿Con cuánto lo hacen si les cargan adicionalmente un 0.8% mensual capitalizable por mes?

a) $105,915.83 *b*) $107,987.42 *c*) $105,915.83 *d*) $110,426.04 *e*) Otra

38. ¿En cuánto deberá rentar su casa el licenciado Santillán, si está valuada en $2’725,400 y pretende ganar el 5.6% efectivo?

a) $12,403.31 *b*) $10,895.42 *c*) $12,960.00 *d*) $11,695.40 *e*) Otra

39. ¿De cuánto es el pago mínimo semestral, en millones, que debe de hacer el gobierno para que no se incremente la deuda externa, sabiendo que es de 1,735 millones de dólares y le cargan intereses del 3.8% anual compuesto por semestre?

a) $26.423 *b*) $29.095 *c*) $32.965 *d*) $35.087 *e*) Otra

40. El Banco Mundial concede a un país en desastre un préstamo por $16 millones de dólares, con intereses del 1.5% anual en el periodo de gracia de 7 años y del 2.8% en el resto del plazo, es decir, durante 10 años. ¿Cuánto debe abonar cada año?

a) $1’980,773.00 *b*) $2’120,973.41 *c*) $2’203,405.33 *d*) $2’060,530.84 *e*) Otra

41. ¿Cuánto acumula Rosa Margarita en *Tandahorro*, si deposita $850 cada mes durante 2 años, y gana intereses del 40% de la tasa que ofrecen los CI a 28 días, 8.95% en promedio anual capitalizable por mes?

a) $22,302.43 *b*) $20,962.13 *c*) $21,178.44 *d*) $23,005.92 *e*) Otra

42. ¿Cuánto acumulará Rosa Margarita, del problema 41, si tiene la fortuna de lograr uno de los premios de $300,000 al final del quinto mes de su inversión, si además desde ese momento le bonifican con una tasa de interés un 20% mayor que la anterior?

a) $342,407.26 *b*) $351,232.53 *c*) $340,127.04 *d*) $345,123.52 *e*) Otra

43. Para apoyar el Centro de Rehabilitación de la Mujer, una importante cadena de supermercados dona $7.25 millones de dólares, que se invierten devengando intereses del 8.4% nominal trimestral. ¿De qué monto es el ingreso por trimestre para dicho centro?

a) $78,429.03 *b*) $120,282.43 *c*) $109,656.25 *d*) $98,850.41 *e*) Otra

44. Tres amigos se asocian para crear la cadena de tiendas El Jitomate. El primero participa con 3 millones, el segundo con 2 y el tercero con 1.5. Estiman lograr utilidades de $450,000 por trimestre. ¿En cuántos trimestres recuperarán su inversión, suponiendo que el dinero reditúa con el 6.05% anual capitalizable por trimestre?

a) 10.54 *b*) 12.63 *c*) 18.10 *d*) 16.42 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Diferenciar los tipos de anualidades más comunes y explicar sus características.
- Calcular el *valor presente,* la *renta,* el *plazo* y la *tasa de interés* de las anualidades *ordinarias,* utilizando la fórmula:

$$C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

- Obtener el *monto,* la *renta,* la *tasa de interés* y el *plazo* de las anualidades *anticipadas* con la fórmula:

$$M = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

- Ajustar la renta, el monto o el valor presente de las anualidades, donde la incógnita es el plazo.
- Reemplazar un conjunto de rentas por otro conjunto equivalente.
- Resolver las anualidades mediante rentas equivalentes.
- Convertir anualidades *generales* en *simples* para evaluar sus elementos.
- Plantear y resolver problemas financieros y comerciales reales, aplicando los conceptos, las definiciones y las características de las anualidades.
- Calcular el monto de las anualidades *ordinarias* y el valor presente de las *anticipadas* utilizando, respectivamente, las fórmulas:

$$M = R\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right) \quad \text{y} \quad C = R(1+i/p)\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

- Obtener la renta, el capital o la tasa de interés en las anualidades *perpetuas* con la fórmula:

$$I = Cin, \text{ con } n = 1.$$

- Plantear y resolver problemas con anualidades *diferidas.*

Conceptos importantes

Anualidad
Anualidad anticipada
Anualidad general y anualidad simple
Anualidad ordinaria o vencida
Anualidades ciertas y contingentes
Anualidades inmediatas y anualidades diferidas
Frecuencia de capitalización de intereses e intervalo de pago en las anualidades
Perpetuidad
Renta, valor presente, monto, tasa de interés, plazo e intereses de las anualidades
Rentas equivalentes

Problemas propuestos para exámenes

En los problemas 1 a 10 conteste si el argumento planteado es verdadero o falso. Justifique su respuesta.

1. Una serie de pagos con interés compuesto se llama anualidad. ___________

2. El valor presente de las anualidades se localiza al finalizar el plazo. ___________

3. En las anualidades *ordinarias* los pagos se hacen generalmente al final de cada periodo. ___________

4. Genéricamente el valor futuro se asocia con las anualidades anticipadas. ___________

5. El tiempo que hay entre dos rentas sucesivas se llama plazo de la anualidad. ___________

6. Anualidad *ordinaria* y anualidad *vencida* son sinónimos. ___________

7. Genéricamente en las anualidades *perpetuas* la renta es menor o igual a los intereses que se devengan en el periodo. ___________

8. Una renta trimestral anticipada de $6,000 es equivalente a 3 mensuales anticipadas de $2,000 cada una. ___________

9. Para acumular $20,000 se necesitan 10 rentas mensuales anticipadas de poco más de $2,000. ___________

10. El valor presente de 15 rentas quincenales de $2,500 es poco más de $37,500. ___________

En los problemas 11 a 20 complete la frase que se presenta.

11. Para disponer de $3,200 mensuales por tiempo ilimitado se requiere una inversión inicial de por lo menos $________ a un interés del 12% anual capitalizable por mes.

12. La serie de rentas al final de cada periodo se llama anualidad __________.

13. Cuando los pagos coinciden con la capitalización de intereses en una anualidad, se llama __________ .

14. Una renta vencida de $4,250 trimestrales es equivalente a la renta ordinaria de $__________ quincenales a un interés del 20% efectivo.

15. Para acumular $25,000, se requieren 30 depósitos mensuales anticipados de $__________ devengando un interés del 12.6% compuesto por mes.

16. Para acumular $35,000 se necesitan aproximadamente __________ rentas bimestrales anticipados de $1,915 a un interés del 17.4% anual compuesto por bimestre.

17. Una renta semestral anticipada de $__________ es equivalente a 12 quincenales anticipadas de $2,300 con un interés del 11.76% compuesto por quincena.

18. Una sucesión de rentas al principio de cada periodo se denomina anualidad __________ .

19. Si el primer pago semanal para liquidar un crédito de $35,000 se realiza 2 meses después, entonces se trata de una anualidad__________ .

20. Cuando la renta es menor o igual a los intereses que genera un capital por periodo, la anualidad se conoce como __________ .

21. Un crédito hipotecario se cancela con 36 rentas mensuales de $4,800. ¿Cuál fue el capital si se devenga un interés del 0.8% mensual capitalizable por mes?

22. Un estudiante estima que necesitará $25,000 para los gastos de graduación. Si ahorra $925 cada semana ganando un interés del 9.10% anual capitalizable por semana, ¿cuándo debería empezar?

23. ¿Con cuántos pagos quincenales de $525 se amortiza un adeudo de $8,700, si el primero se hace a los 3 meses y se paga un interés del 18.96% compuesto por mes? Haga un ajuste con un pago menor al final.

24. ¿Cuál es el precio de contado de una computadora que se paga con un anticipo del 30% y 10 mensualidades de $950? Considere que la primera mensualidad se hace 4 meses después de la compra y el interés es del 0.92 % mensual capitalizable por mes.

25. El profesor Muñoz adquiere un automóvil con un apartado de $30,000, 3 meses antes de la compra, $25,000 en la compra y después 15 mensualidades de $7,200 cada una. ¿Cuál es el precio de contado del automóvil, si la agencia maneja un interés del 15.2% anual capitalizable por mes? Obtenga los intereses.

26. ¿De cuánto será cada uno de los 15 pagos mensuales para disponer de $16,250 al final de cada bimestre, durante los siguientes 2 años, considerando un interés del 15.84% compuesto por bimestre?

27. Un agricultor compra un tractor con $150,000 de anticipo y 6 pagos bimestrales de $25,000 con un cargo del 2.3% de interés bimestral capitalizable por bimestre. ¿De cuánto será el pago residual a los 13 meses de la compra para liquidar el resto, si el precio de contado del tractor es de $325,000?

En los problemas 28 a 43 seleccione la opción correcta, justificándola.

28. Tres años antes de comenzar los estudios universitarios que duran 9 semestres, el padre de un estudiante invierte $45,000 en una cuenta bancaria que reditúa el 1.02% de interés mensual, capitalizable por mes, y adicionalmente realiza 35 depósitos mensuales de $3,000. ¿De qué capital podrá disponer al inicio de cada semestre de la carrera profesional?

a) $20,295.43 *b*) $22,157.71 *c*) $20,924.08 *d*) $21,863.43 *e*) Otra

29. Un crédito automotriz se amortiza con 7 pagos semestrales de $15,000 cada uno, haciendo el primero el día de la compra y 30 mensuales intercalados de $5,200 cada uno. ¿Cuál es el precio de contado del automóvil, si el interés es del 13.44% anual capitalizable por mes?

a) $212,204.67 *b*) $197,874.03 *c*) $205,402.62 *d*) $209,429.35 *e*) Otra

30. Al vender su yate el empresario Gudiño tiene cuatro opciones. Determine cuál le conviene más, considerando que el interés bancario reditúa el 21.6% anual capitalizable por mes.

a) El señor Mendoza le da $318,000 de contado.

b) Un amigo le ofrece $115,000 de contado y 5 pagos bimestrales de $45,000 cada uno.

c) Otro le da $50,000 de contado y $25,000 mensuales durante un año.

d) Juan le ofrece 3 pagos de 110,000 de dólares, cada uno a uno, dos y cuatro meses de la compraventa.

e) Otra, no mayor que las anteriores.

31. Un famoso beisbolista firma un contrato de 5 años por un monto de 8 millones de dólares, que recibirá en partidas trimestrales anticipadas iguales durante la vigencia del contrato. Si le pagaran el equivalente al comenzar el plazo, ¿cuánto le darían considerando que la tasa de interés es del 11% efectiva?

a) $6’758,429.62 *b*) $6’598,143.02 *c*) $7’029,305.42 *d*) $6’314,681.51 *e*) Otra

32. Una institución filantrópica hace un donativo por $1 millón de dólares para ayudar a estudiantes de escasos recursos. ¿Qué renta mensual se podrá contar a partir de los 3 años y por tiempo ilimitado, si el interés es del 21% anual convertible mensualmente?

a) $29,864.06 *b*) $32,845.91 *c*) $32,117.57 *d*) $31,961.93 *e*) Otra

33. El sistema de agua potable del estado adquiere un crédito por $135 millones de dólares, que pagará con rentas mensuales de $1.7 millones de dólares en los primeros 2 años, rentas bimestrales de $3 millones de dólares durante los siguientes 3 años, y rentas cuatrimestrales en los últimos 5 años de plazo. ¿Cuál es el monto de éstas si el interés es del 12% efectivo?

a) $9’302,521.63 *b*) $9’805,357.35 *c*) $10’098,429.32 *d*) $9’598,729.43 *e*) Otra

34. En el problema 33, ¿cuánto dinero se paga por concepto de interés?

a) $106’880,360.30 *b*) $98’963,429.35 *c*) $110’090,425.42 *d*) $102’975,086.92 *e*) Otra

35. El propietario de un departamento ofrece al inquilino un descuento del 6%, si paga al comenzar el año las 12 mensualidades de $6,900 cada una. ¿Deberá aprovechar la oferta si sabe que el dinero en el banco reditúa un 8.2% nominal mensual?

a) Sí *b*) No *c*) No puede saber *d*) Otra

36. ¿Por qué cantidad fue el crédito hipotecario que se amortiza con 60 mensualidades de $6,250, si se cargan intereses del 9.8% nominal mensual?

a) $360,095.32 *b*) $295,525.46 *c*) $356,412.03 *d*) $322,482.62 *e*) Otra

37. ¿Cuánto recibe mensualmente, y por tiempo ilimitado, una institución de beneficencia si le depositaran $2.75 millones de dólares, devengando intereses del 9.63% nominal semanal?

a) $25,291.73 *b*) $20,896.41 *c*) $22,068.75 *d*) $21,936.58 *e*) Otra

38. ¿Cuánto debe invertir un estudiante cada mes en una cuenta que bonifica intereses del 11% efectivo, para acumular $45,000 para sus gastos de graduación, si comienza 2 años antes del evento?

a) $1,510.93 *b*) $1,610.08 *c*) $1,921.32 *d*) $1,678.82 *e*) Otra

39. Liliana compra un automóvil con un anticipo de $35,000 y 36 mensualidades con cargos o intereses del 15% nominal mensual. ¿Cuánto paga cada mes si el precio de contado es de $243,850?

a) $7,239.85 *b*) $6,596.03 *c*) $7,429.31 *d*) $6,961.38 *e*) Otra

40. Si la producción de agave requiere de un desembolso inicial de $65,000, y después $50,000 cada semestre durante 6 años, ¿de cuánto serán las utilidades para un agricultor, si al final obtiene $1’258,000 por su cosecha? Suponga que el dinero reditúa el 8.64% nominal semestral.

a) $713.000 *b*) $685,750 *c*) $729,310 *d*) $698,331 *e*) Otra

41. En el problema 38, ¿cuánto se hubiera acumulado si el dinero se invierte en el banco?

a) $896,429.32 *b*) $960,632.42 *c*) $906,262.33 *d*) $1’023,196.35 *e*) Otra

42. Para disponer de $60,000 bimestrales durante seis años, el gobierno central deposita previamente $123,000 cada mes con intereses del 9.6% nominal bimestral. ¿Cuántos meses antes debe comenzar?

a) 12 *b*) 16 *c*) 14 *d*) 18 *e*) Otra

43. ¿Cuántos depósitos quincenales de $10,500 al comenzar el año se necesitan para acumular $77,137.41 al final del año? Suponga intereses del 12.9% capitalizable por quincena.

a) 7 *b*) 6 *c*) 5 *d*) No es posible *e*) Otra

Capítulo 6

Amortización de créditos

Contenido de la unidad

En la sección 6 del capítulo 3, se estudiaron las amortizaciones con interés simple, tanto de renta variable como de renta fija con intereses sobre saldos insolutos. Ahora, trataremos las amortizaciones pero con interés compuesto, que también pueden ser de renta fija o variable; pero antes es necesario recordar conceptos que se vieron en aquella sección.

6.1 Definiciones y sistemas de amortización

Amortizar una deuda es liquidarla mediante pagos periódicos que incluyen intereses, es decir, es darle muerte.

El capital que se debe al hacer un pago cualquiera se conoce como *capital vivo de la deuda*, *deuda viva* o más comúnmente como *saldo insoluto*. Se trata digamos, de un saldo no saldado.

La diferencia entre la deuda original y el saldo insoluto corresponde a los *derechos adquiridos* por el deudor; es la parte o porción del bien que se está amortizando, y que ya es propiedad del deudor.

También es cierto que cada abono que se hace para cancelar la deuda, se separa o se divide en dos partes: la primera para cubrir los intereses que se generan en el periodo; y la segunda, llamada *amortización* es la que se abona al capital que se adeuda, haciendo que diminuya con cada pago:

$$\text{Abono} = \text{Amortización} + \text{Intereses}$$

Cabe señalar que para crear sistemas o formas para amortizar una deuda, no hay más límite que la propia creatividad de quienes a esto se dedican, a prestar su dinero; sin embargo, aquí abordaremos las más comunes, con algunas de sus ventajas o desventajas, y sus características.

Amortización gradual

Los pagos en este sistema son todos iguales y puesto que el saldo insoluto se reduce con cada abono, los intereses se reducen y la amortización se incrementa, es decir, es mayor que la del pago anterior. Constituye una interesante aplicación de las anualidades ordinarias y por ello se simplifican los cálculos; pero tiene la desventaja de que los pagos deben ser mayores que los intereses del primer periodo, porque de otra manera nunca se cancelaría totalmente la deuda.

Amortización constante

A diferencia del sistema anterior, aquí la porción que se abona al capital, es decir, la amortización, es siempre la misma, lo cual da lugar a que cada pago sea menor que el anterior, y esto puede ser un atractivo para el deudor. Además, es muy fácil calcular el saldo insoluto en cualquier momento, lo cual, como se dijo antes, se necesita para cancelar o refinanciar el capital que se debe.

Amortización con renta variable

Aquí cada abono y su correspondiente porción amortizadora crecen con el tiempo, y esto lo hace atractivo para el deudor, ya que los primeros pagos pueden ser tan pequeños que ni siquiera cubran los interese del periodo, dando lugar a que la deuda crezca en vez de reducirse. Tiene la desventaja de generar más intereses que otros sistemas, además de que las fórmulas son un tanto más complicadas. No obstante, como se verá en los ejemplos esta dificultad es sólo aparente. Puede suceder que las rentas se reduzcan sucesivamente.

Los pagos pueden variar uno por uno o en grupos, y hacerlo en forma aritmética o geométrica.

6.2 Amortización gradual

Como ya se mencionó este sistema es una aplicación de las anualidades ordinarias y, por lo tanto, se emplea la ecuación del teorema 5.2

$$C = R\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

donde C es la deuda original, R es el abono periódico, i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año, y np es el número de rentas.

Ejemplo 1

Para completar la colegiatura semestral de su hijo, el señor Gutiérrez consigue un préstamo de $35,000 con intereses del 13.92% anual capitalizable por quincena. ¿Cuántos pagos quincenales de $3,295 debe hacer para amortizar su adeudo?

solución

La incógnita es el número de abonos, $np = x$.

El capital, es decir, el préstamo es $C = 35{,}000$.

La renta quincenal es $R = 3{,}295.00$

La frecuencia de conversión y de pagos es $p = 24$, éstos son quincenales y la tasa de interés quincenal, compuesta por quincena, es:

$$i/p = 0.1392/24 \quad \text{o} \quad i/p = 0.0058$$

Por lo tanto, al reemplazar estos valores en la ecuación 5.2 quedará:

$$35{,}000 = 3{,}295\left(\frac{1-(1+0.0058)^{-x}}{0.0058}\right)$$

de donde

$$\frac{35{,}000(0.0058)}{3{,}295} - 1 = -(1.0058) - x$$

o

$$(1.0058)^{-x} = 0.938391502$$

Se toma logaritmo natural, o común, a ambos lados:

$$Ln(1.0058)^{-x} = Ln(0.938391502)$$

$$(-x)Ln(1.0058) = Ln(0.938391502) \quad Ln(M^x) = (x)Ln(M)$$

$$-x = Ln(0.938391502)/Ln(1.0058)$$

$$-x = -10.99521806$$

o

$$x = 11\text{, porque debe ser entero}$$

Al redondear, la renta se reduce un poco quedando 11 pagos de $3,293.61 cada uno. ¿Por qué?

Renta mínima

Ejemplo 2

¿Cuántos pagos de \$200 se necesitarán para amortizar el préstamo del ejemplo 1?

solución

Al sustituir en la misma fórmula 5.2 resulta:

$$35,000 = 200 \frac{1-(1.0058)^{-x}}{0.0058}$$

de donde, con pasos semejantes a los del ejemplo 1, se obtiene:

$$(1.0058)^{-x} = \frac{35,000(0.0058)}{200} - 1$$

o $$(1.0058)^{-x} = -0.015$$

Pero esta ecuación no tiene solución, porque el miembro izquierdo tiene signo contrario al derecho. ¿Qué significa dicho resultado?

Al efectuar el primer abono mensual, los intereses del periodo son $I = 35,000(0.0058)$ o $I = \$203$, lo cual quiere decir que con \$200 del supuesto pago no se cubren ni los intereses y tales pagos deberán ser mayores a los \$203, teniendo presente, claro, que cuanto más grandes sean, más pronto se amortizará el adeudo. Esto quiere decir que con \$200 nunca se amortiza la deuda.

Ejemplo 3

¿Cuál es el precio de un terreno que se amortiza con 60 rentas mensuales de \$9,750 cada uno, con cargos del 14.5% efectivo, suponiendo que se adquirió con un 25% de anticipo?

solución

En este caso C es la incógnita; $np = 60$, el número de rentas; $p = 12$; los pagos son mensuales; el año tiene 12 meses; la renta es $R = \$9,750$; y la tasa nominal mensual equivalente al 14.5% efectivo es i de la igualdad siguiente:

$$(1 + i/12)^{12} = 1.145$$

de donde

$$1 + i/12 = \sqrt[12]{1.145}$$

o $$1 + i/12 = 1.011347621$$

Por lo tanto,

$$C = 9{,}750\left(\frac{1-(1.011347621)^{-60}}{0.011347621}\right)$$

$$C = 9{,}750(43.3458832)$$

o $$C = \$422{,}622.3612$$

El crédito es el 75% del precio, es decir:

$$(0.75)\text{precio} = 422{,}622.3612$$

de donde

$$\text{precio} = 422{,}622.3612/0.75 \text{ o } \$563{,}496.48$$

Ejemplo 4

Por el Tratado de Libre Comercio de América del Norte, un empresario tiene las siguientes opciones para comprar maquinaria para su fábrica textil. Despreciando los costos por transporte y otros, decida cuál le conviene más, suponiendo que las tres le ofrecen la misma calidad e igual factibilidad.

a) En Canadá puede conseguir la maquinaria sin anticipo, con 15 pagos mensuales vencidos de 14,500 dólares canadienses y una tasa de interés del 13.2% capitalizable por mes.

b) En Estados Unidos le ofrecen la maquinaria con un anticipo de $18,000 y 10 abonos bimestrales vencidos iguales al anticipo y cargos del 15% de interés anual compuesto por bimestre.

c) En México puede adquirir la maquinaria al contado a un precio de $1’950,000.

Evalúe considerando las siguientes condiciones.

i. La paridad con el dólar estadounidense es de 10.9508 pesos mexicanos por cada dólar y con el canadiense es de 9.7113 pesos mexicanos por dólar.

ii. La compra se hace cinco meses después de que el tipo de cambio estuvo como en el caso **i.**, la unidad monetaria canadiense aumenta su valor en 0.4% cada mes, mientras que la estadounidense crece 0.18 centavos mexicanos por día. En México el precio se incrementa 0.7% en los cinco meses.

iii. La paridad es la actual, la del momento en el que se resuelve este ejercicio, investíguela, por favor.

solución

Es necesario obtener el valor presente del precio de la maquinaria en las tres opciones.

a) El valor actual en este primer caso, se encuentra al reemplazar en la ecuación 5.2 los números siguientes:

$R = 14{,}500$, el abono mensual
$i = 0.132$, la tasa de interés anual capitalizable por mes
$p = 12$, los pagos son mensuales, y
$np = 15$, el número de pagos

$$C = 14{,}500\left(\frac{1-(1+0.132/12)^{-15}}{0.132/12}\right)$$

$$C = 14{,}500(13.75837135) \text{ o}$$

$$C = \$199{,}496.3846 \text{ dólares canadienses}$$

b) Al comprar las máquinas en Estados Unidos, el precio actualizado es igual a la suma del anticipo y el valor presente de los 10 pagos bimestrales, que se obtiene sustituyendo también en la ecuación 5.2 los valores de:

$R = 18{,}000$, la renta por bimestre
$p = 6$, el número de bimestres por año
$i = 0.15$, la tasa de interés anual capitalizable por bimestre
$np = 10$, el número de rentas, e
$i/p = 0.15/6 = 0.025$, la tasa de interés por bimestre

Por lo tanto:

$$C_1 = 18{,}000\left(\frac{1-(1+0.025)^{-10}}{0.025}\right)$$

$$C_1 = 18{,}000(8.752063932)$$

$$C_1 = 157{,}537.1508$$

El precio actualizado al día de la compra es, entonces:

$$C = 18{,}000 + 157{,}537.1508$$

$$C = \$175{,}537.1508$$

ya que el anticipo fue de $18,000.

i. En moneda mexicana, con las paridades dadas, quedará:

$$C = 199{,}496.3846(9.7113)$$

$$C = \$1'937{,}369.24$$

$$C = 175{,}537.1508(10.9508)$$

$$C = \$1'922{,}272.23 \text{ pesos}$$

De contado se compra en $1'950,000. Por ello la opción más conveniente es la menor, que en este caso es la segunda, por lo que la maquinaria se tendría que comprar en Estados Unidos.

ii. Si la compra se realiza 5 meses después, el tipo de cambio de la moneda y el precio actualizado en cada opción será:

Con la moneda canadiense, el tipo de cambio es:

$$p = 9.7113(1.004)^5$$

$$p = 9.907086033$$

y el precio es

$$199{,}496.3846(9.907086033) = \$1'976{,}427.85$$

Puesto que la divisa estadounidense aumenta 0.18 centavos por día, en un mes aumenta 0.18(30) o 5.4 centavos, o 0.054 pesos, y en 5 meses la paridad es:

$$p = 10.9508 + 5(0.054)$$
$$p = 10.9508 + 0.27$$
$$p = 11.2208$$

El precio, en este caso, es:

$$175{,}537.1508(11.2208) = \$1'969{,}667.26$$

El precio en México creció un 0.7%; esto es,

$$1'950{,}000 + 1'950{,}000(0.007) = \$1'963{,}650$$

Por tanto, la opción más conveniente para el empresario es comprar la maquinaria en México, por ser la del menor precio actualizado.

iii. Evalúe el mismo ejercicio con el tipo de cambio al día en que resuelve el problema.

Ejercicios 6.2

Se recomienda repasar la sección 5.3.

1. ¿Qué es amortizar una deuda?

2. ¿Cuál es la característica de la amortización *gradual?*

3. ¿En qué consiste la amortización *constante?*

4. Explique brevemente la amortización de *renta variable.*

5. ¿Existe alguna diferencia entre *abono* y *amortización?* ¿Cuál?

6. ¿Cuántos pagos mensuales de $3,000 amortizan un préstamo de $35,000 a una tasa de interés del 12.72% compuesto por mes? Haga un ajuste a la renta redondeando al entero más cercano.

7. ¿Cuál es el precio de contado de una lavadora de ropa que se amortiza con un anticipo del 25% y 10 mensualidades de $450, considerando una tasa de interés del 19.2% nominal mensual?

8. Se compra mercancía con valor de $35,750, que se amortiza con 6 rentas quincenales y una tasa de interés del 12.96% anual convertible quincenalmente. ¿De cuánto es cada una?

9. ¿En cuánto tiempo se amortiza un crédito de $7,145 con abonos semanales de $350, si la tasa es del 13.52% de interés nominal semanal?

10. ¿De cuánto debe ser el pago mínimo bimestral, para amortizar gradualmente una deuda de $15,000, a una tasa del 13.26% convertible bimestralmente?

11. Una mueblería ofrece televisores sin anticipo y 15 mensualidades de $325. Liliana compra uno y lo liquida con dos pagos iguales, uno en la compra y otro a los 3 meses. ¿De cuánto es cada pago si el interés es del 10% efectivo?

12. Con una tasa de interés del 17.16% nominal semanal y 13 abonos semanales de $125 se amortiza el precio de una radiograbadora. ¿Cuánto se pagará al comprarla de contado?

13. ¿Qué valor tiene la renta mensual mínima para amortizar un crédito automotriz de $225,000, si se cobra una tasa de interés del 14% efectivo?

14. ¿De cuánto es cada uno de los 25 abonos trimestrales con los que se amortiza una deuda de $165,000, si se cobra un interés del 20.8% capitalizable trimestralmente?

15. ¿Cuál es el precio de los boletos de avión que la agencia Turiservicios del Norte, en su promoción para viajar ahora y pagar después, ofrece con 8 pagos quincenales de $875.00, suponiendo que la tasa es del 12.24% de interés anual compuesto por quincena, y el primero se hace 2 meses después de viajar?

16. El licenciado Rodríguez compra un automóvil de $196,000, que amortiza con 10 rentas mensuales de $8,500, haciendo la primera el día de la compra, seguidas de 20 quincenales, a una tasa del 12.36% de interés anual compuesto por quincena. ¿De cuánto será cada una? ¿Cuánto pagará por intereses? *Sugerencia:* Elabore un diagrama de tiempo.

17. ¿Cuántas rentas mensuales de $1,750 son necesarias para amortizar el precio, de $22,620.00, de una motocicleta, si la tasa de interés que se carga es del 13% nominal mensual?

18. Una tienda de electrodomésticos vende refrigeradores con un anticipo del 30%, dos pagos de $2,600 cada uno a 30 y 60 días, y una tasa del 13.65% efectivo. Carmen compra uno y lo paga con 10 rentas quincenales y sin anticipo. ¿De cuánto es cada una?

19. La Secretaría de Comunicaciones y Transportes financia parte de los gastos de construcción de un puente, participando con 8.5 millones de dólares, recuperables en 5 años con abonos trimestrales a una tasa de interés del 16.8% capitalizable por trimestre. ¿De cuánto es cada uno? ¿A cuánto ascienden los intereses que se devengan?

20. En el problema 19, ¿en cuánto tiempo se recupera la inversión con rentas trimestrales de $200,000? ¿Y con rentas bimestrales de $452,000?

21. El 40% de una hipoteca se amortiza con 20 rentas quincenales de $3,750, y el 60% restante con 30 mensualidades, después de las primeras. ¿Por cuánto fue la hipoteca si la tasa de interés es del 18.9% nominal mensual? ¿De cuánto son las 30 mensualidades? Y ¿cuánto se pagó por intereses?

22. ¿Qué le conviene más al vender su avioneta al licenciado Mendoza, si se supone que el dinero reditúa el 23.4% de interés anual convertible por mes:

a) Un cliente que le da 4.5 millones de dólares al contado?

b) Otro que le ofrece $1’575,000 de contado y 10 abonos mensuales de $330,000 cada uno?

c) Un tercero que le da 9 bimestralidades de $590,000, el primero el día de la compraventa?

En los problemas del 23 al 36 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

23. ¿De cuánto debe ser el pago bimestral mínimo para amortizar un préstamo de $720,000, con intereses del 13% efectivo?

a) $15,600.00 *b*) $14,816.51 *c*) $14,680.21 *d*) $14,398.43 *e*) Otra

24. ¿Cuántos abonos mensuales de $6,750 se necesitan para amortizar un crédito de $124,500, con cargos o intereses del 14.52% nominal mensual?

a) 21 *b*) 18 *c*) 19 *d*) Otra

25. Para ampliar su negocio de tortillas, el señor Hernández obtiene un préstamo por $85,00 que amortiza con 25 abonos quincenales, e intereses del 11.28% anual capitalizable por quincena. ¿De cuánto es cada uno?

a) $3,611.64 *b*) $3,908.03 *c*) $4,093.51 *d*) $3,568.41 *e*) Otra

26. ¿Cuánto dinero pagó el señor Hernández del problema 25 por concepto de intereses?

a) $6,982.48 *b*) $6,341.05 *c*) $5,483.02 *d*) $5,291.00 *e*) Otra

27. Una mueblería ofrece un refrigerador Duplex con un anticipo de $100 y 40 abonos semanales de $425, con cargos del 13.52% anual capitalizable por semana. Haciendo el primero tres meses después de la compra, ¿cuál es el precio?

a) $15,635.03 *b*) $16,225.98 *c*) $16,429.62 *d*) $14,961.04 *e*) Otra

28. El 45% de una hipoteca se amortiza con 25 rentas mensuales de $7,200, y el 55% restante, con 20 bimestrales, después de las primeras, con intereses del 15.12% nominal mensual. ¿Por qué cantidad fue la hipoteca?

a) $265,353.05 *b*) $153,584.86 *c*) $328,495.32 *d*) $341,299.68 *e*) Otra

29. En el problema 27, ¿de cuánto es cada abono de los 20 bimestrales?

a) $15,261.43 *b*) $16,093.81 *c*) $17,301.41 *d*) $16,523.21 *e*) Otra

30. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 27?

a) $148,932.03 *b*) $153,921.08 *c*) $170,968.32 *d*) $169,164.52 *e*) Otra

31. Una conocida cadena de tiendas de abarrotes y perecederos ofrece un crédito para quienes quieran asociarse y administrar una nueva sucursal, con el compromiso de pagar $75,000 mensuales por la concesión, haciendo el primer abono 4 meses después. ¿De qué cantidad es el crédito, si se cargan intereses del 10.5% nominal mensual y son 48 mensualidades?

a) $3’234,230.62 *b*) $2’992,742.38 *c*) $2’743,201.35 *d*) $3’298,429.31 *e*) Otra

32. Cuatro hermanos disponen de 1.5 millones de dólares para participar con otra sucursal de la cadena del problema 30. ¿De cuánto será la renta bimestral, si son 25, para amortizar la diferencia. ¿Suponga que la primera la efectúan en el primer bimestre.

a) $80,235.43 *b*) $83,245.90 *c*) $86,321.00 *d*) $87,642.00 *e*) Otra

33. ¿Cuál es el precio de un televisor que se ofrece con 40 pagos semanales de $135, e interés del 15% nominal mensual? Suponga que el primero se efectúa 4 meses después de la compra.

a) $4,860.23 *b*) $5,094.59 *c*) $4,965.31 *d*) $5,258.92 *e*) Otra

34. Para ampliar sus instalaciones, el propietario de un gimnasio consigue un préstamo por $125,000 con intereses del 11.4% capitalizable por mes en el primer semestre, y del 13.8% nominal mensual después. ¿De cuánto es cada abono mensual con que amortiza el adeudo suponiendo que son 15?

a) $10,035.45 *b*) $9,031.76 *c*) $9,628.43 *d*) $10,243.05 *e*) Otra

35. ¿Cuánto pagó por intereses el propietario del gimnasio del problema 34?

a) $9,675.42 *b*) $9,048.25 *c*) $10,476.40 *d*) $10,098.35 *e*) Otra

36. En el problema 34, ¿de cuánto es el pago mínimo mensual para que la deuda se amortice?

a) $1,437.50 *b*) $1,728.48 *c*) $1,640.31 *d*) $1,573.29 *e*) Otra

6.3 Saldo insoluto, derechos transferidos y cuadros de amortización

Cuando una persona compra un terreno, por ejemplo, y lo amortiza con un plan determinado, cada vez que realiza un pago, al mismo tiempo que el propietario está cediendo los derechos de su propiedad, el comprador los está adquiriendo, hasta que logra ser el dueño del valor total. Así, en cualquier momento, el terreno o su valor se distribuyen en dos partes: el saldo insoluto, lo que todavía pertenece al vendedor; y los *derechos adquiridos* por el comprador, es decir que:

VALOR DEL BIEN = SALDO INSOLUTO + DERECHOS ADQUIRIDOS

Para apreciar mejor este proceso de cesión de derechos, se elabora un *cuadro de amortización*, como se aprecia en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Cuadro de amortización de un crédito vacacional

Para vacacionar con su familia, el señor Velasco consigue un crédito por $35,000 a pagar en 8 mensualidades con una tasa de interés del 12.60% anual capitalizable por mes. Elabore un cuadro de amortización.

solución

Es necesario hallar primero la renta mensual con la ecuación 5.2:

$$35{,}000 = R\left(\frac{1-(1+0.126/12)^{-8}}{0.0105}\right)$$

$$35{,}000 = R(7.6348574)$$

de donde

$$R = 35{,}000/7.6348574$$

o $$R = \$4{,}584.23755$$

Al final del primer mes, puesto que el saldo insoluto es el valor de la deuda, los intereses son:

$$I = 35{,}000(0.0105)$$

o $$I = \$367.50$$

La diferencia con la renta mensual es lo que se abona a la deuda, que es la amortización primera.

$$A_1 = 4{,}584.23755 - 367.50$$

o $$A_1 = 4{,}216.73755$$

es decir,

ABONO	=	INTERESES	+	AMORTIZACIÓN
↑		↑		↑
4,584.23755	=	367.50	+	4,216.73755

El saldo insoluto luego del primer abono es, entonces:

$$S_1 = 35{,}000 - 4{,}216.73755$$

o $$S_1 = 30{,}783.26245$$

Y los intereses para el segundo pago se evalúan con bases a este saldo:

$$I_2 = 30{,}783.26245(0.0105)$$

o $$I_2 = \$323.22426$$

Entonces, la segunda amortización es:

$$A_2 = 4{,}584.23755 - 323.22426$$

o $$A_2 = 4{,}261.01329$$

y el saldo insoluto, luego del segundo abono es, por lo tanto:

$$S_2 = 30{,}783.26245 - 4{,}261.01329$$

o $$S_2 = 26{,}522.24916$$

Se continúa con este proceso hasta el último periodo mensual, y con estos valores y los que se obtengan se construye el siguiente cuadro. Se han mantenido 5 cifras decimales sólo para mayor precisión en el saldo final.

Cuadro de amortización

Periodo	Renta (R)	Intereses (I)	Amortización (A)	Saldo insoluto (S)
0	–	–	–	35,000.00000
1	4,584.23755	367.50000	4,216.73755	30,783.26245
2	4,584.23755	323.22426	4,261.01329	26,522.24916
3	4,584.23755	278.48362	4,305.75393	22,216.49523
4	4,584.23755	233.27320	4,350.96435	17,865.53088
5	4,584.23755	187.58807	4,396.64948	13,468.88140
6	4,584.23755	141.42325	4,442.81429	9,026.06711
7	4,584.23755	94.77370	4,489.46385	4,536.60326
8	4,584.23755	47.63433	4,536.60321	0.000044*

*La diferencia con 0 se debe al redondeo y es insignificante.

Ejemplo 2

Cuadro de amortización, derechos transferidos, saldo insoluto

Haga el cuadro de amortización en sus primeros tres renglones y el último, de un crédito automotriz que se cancela con 36 mensualidades de \$5,750, a una tasa de interés del 25.20% anual capitalizable por mes. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago número 15? ¿Cuál es el porcentaje de los derechos transferidos al deudor en ese momento?

solución

Con la ecuación 5.2 se obtiene el valor presente del crédito:

$$C = 5{,}750\left(\frac{1 - (1 + 0.252/12)^{-36}}{0.252/12}\right)$$

$$C = 5{,}750(25.08423298)$$

$$C = \$144{,}234.3396$$

a) Con este resultado como primer saldo insoluto y la renta mensual, se comienza el cuadro de amortización.

Periodo	Renta (R)	Intereses (I)	Amortización (A)	Saldo insoluto (S)
0	—	—	—	\$144,234.3396
1	\$5,750.00	\$3,028.9211	\$2,721.0789	\$141,513.2607
2	\$5,750.00	\$2,971.7785	\$2,778.2215	\$138,735.0392
3	\$5,750.00	\$2,913.4358	\$2,836.5642	\$135,898.4750
...				
35				\$5,631.7336(*X*)
36	\$5,750.00	\$118.2664	\$5,631.7336	0

Para el último renglón de esta tabla, se procede de manera inversa a como se ha iniciado, anotando la renta fija en la segunda columna y un cero en la última, dado que el último saldo es nulo. El penúltimo saldo insoluto debe ser igual a la última amortización y se denota por x. En la tercera columna están los intereses del periodo que deben ser igual a

$$(0.252/12)x = (0.021)x$$

La suma de los intereses y la amortización en cualquier periodo debe ser igual a la renta, esto es:

$$(0.021)x + x = \$5,750$$

de donde, al sumar los términos semejantes y despejar, queda que la amortización última x es:

$$(1.021)x = 5,750$$

$$x = 5,750/1.021 \text{ o } x = 5,631.733594$$

y los intereses del último saldo son:

$$I_{36} = 5,631.733594(0.021)$$
$$I_{36} = \$118.2664$$

Con esto se completa el último renglón de la tabla.

Se recomienda que el estudiante concluya la tabla para corroborar estos valores.

b) Para el saldo insoluto, luego de hacer el abono 15 se obtiene el valor actual de los 21 restantes.

$$C = 5,750\left(\frac{1 - (1 + 0.252/12)^{-21}}{0.252/12}\right)$$

$$C = 5,750(16.84106703)$$

$$C = \$96,836.14$$

c) Los derechos transferidos al deudor son iguales a la diferencia entre este saldo y la deuda original.

$$144,234.34 - 96,836.14 = \$47,398.20$$

Y el porcentaje sobre la deuda es

$$47,398.20/144,234.34 = 0.32861938$$

o 32.86% aproximadamente

Ejemplo 3

En el problema 2, ¿cuál es el saldo insoluto luego de efectuar el pago número 23? ¿Y con cuánto se cancela el crédito automotriz al hacer el pago número 23?

solución

a) Luego de efectuar el 23º abono restan 13, y el saldo insoluto es igual al valor presente de estas 13 rentas:

$$C = 5{,}750\left(\frac{1-(1+0.252/12)^{-13}}{0.021}\right) \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$C = 5{,}750(11.27393171)$$

o $C = \$64{,}825.11$

b) Al efectuar el pago 23º la deuda se cancelará con la suma del saldo insoluto anterior y el propio pago. ¿Por qué? Es decir:

$$64{,}825.11 + 5{,}750.00 = \$70{,}575.11$$

Ejercicios 6.3

1. Defina y explique brevemente el concepto de *saldo insoluto.*

2. Explique la diferencia entre saldo insoluto y los derechos adquiridos por el deudor.

3. ¿Para qué son útiles el saldo insoluto y los derechos transferidos al deudor?

4. ¿Qué ventajas tienen y para qué se utilizan los cuadros de amortización?

5. ¿Cómo se calcula el saldo insoluto en la amortización gradual?

6. ¿Con cuántos pagos quincenales de $4,750 se amortiza un crédito de $40,000 a una tasa de interés del 12.24% compuesto por quincena? Haga un ajuste con un pago menor al final y el cuadro de amortización.

7. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago número 7 en el problema 6?

8. A una tasa del 13% anual con capitalización semanal se amortiza una deuda de $20,000 en 9 meses. Determine:

a) ¿De cuánto es cada renta semanal?

b) ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el 28º pago?

c) ¿En qué pago se habrá amortizado aproximadamente el 63% de la deuda original?

d) ¿Qué porcentaje de la deuda se ha transferido al deudor luego de hacer un tercio de los pagos?

9. Obtenga los primeros cuatro renglones del cuadro de amortización de un crédito bancario por $800,000 con abonos mensuales, plazo de 5 años y una tasa de interés del 13.8% nominal mensual. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el 26º pago? ¿En qué pago se habrá transferido aproximadamente el 68.25% de la deuda?

10. ¿De cuánto es el capital que se amortiza con 16 abonos quincenales de $750 y tasa de interés del 18% anual compuesto por quincena? Haga el cuadro de amortización y encuentre los derechos adquiridos por el deudor luego de hacer el décimo pago.

11. Si una deuda de $35,000 se amortiza con 25 rentas semanales a una tasa del 13.39% de interés compuesto por semana, ¿en qué pago se habrá transferido aproximadamente el 31% de la deuda original?

12. Un crédito hipotecario de $250,000 se amortiza en 3 años con rentas bimestrales de $17,050. ¿Cuál es la tasa de interés anual capitalizable por bimestre? ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el 15º abono?

13. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de efectuar el decimosexto pago de una deuda que se amortiza con 24 mensualidades de $7,500 con intereses del 14% efectivo?

14. En el problema 13, haga el cuadro de amortización en sus primeros tres renglones y el último.

15. Marisela del Pilar compra mobiliario y equipo para su clínica de belleza y firma 15 documentos mensuales con valor nominal de $6,500 cada uno.

a) ¿Cuál es el precio del mobiliario si le cobran una tasa de interés del 13.7% compuesto por mes?

b) ¿Con cuánto liquida el total de su adeudo al efectuar el noveno pago?

c) Haga el cuadro de amortización.

16. La Mueblería del Centro ofrece un modular estereofónico con reproductor de discos compactos en $8,760 de contado, o con 6 abonos mensuales y una tasa de interés del 10.5% convertible mensualmente. ¿De cuánto es cada pago? Haga un cuadro de amortización y obtenga los intereses.

17. Haga el cuadro para la amortización de un crédito que Compumayoreo, S.A. adquirió por $1'250,000 y que pagará con 10 abonos bimestrales con cargos del 14.4% capitalizable por bimestre. ¿Cuánto se carga por intereses? ¿Con cuánto liquida el total de su deuda al hacer el quinto pago?

18. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de efectuar el 20º pago, si un crédito bancario se amortiza con 28 rentas quincenales de $6,350? Suponga que la tasa de interés es del 13.2% compuesto por quincena, obtenga los primeros cuatro renglones del cuadro de amortización y calcule los intereses.

En los problemas del 19 al 39 seleccione la opción correcta, justificando la elección.

19. El saldo insoluto, luego de hacer el pago de un crédito que se amortiza con 18 mensualidades de $4,750 con cargos del 13.8% efectivo, es:

a) $36,212.84 *b*) $35,421.73 *c*) $38,429.05 *d*) $36,961.81 *e*) Otra

20. ¿Con cuánto se cancela una deuda al hacer el pago 25, si ésta fue de $145,000 con cargos del 11.52% nominal mensual y faltan 18 mensualidades?

a) $72,134.20 *b*) $73,862.45 *c*) $71,893.58 *d*) $74,095.65 *e*) Otra

21. Los derechos adquiridos por el deudor del problema 20, luego de efectuar el pago 20, son:

a) $65,321.51 *b*) $63,250.45 *c*) $60,092.76 *d*) $61,409.36 *e*) Otra

22. La amortización en el quinto periodo del cuadro correspondiente a un crédito de $80,000, con 15 rentas bimestrales e intereses del 13.8% anual capitalizable por bimestre, es:

a) $4,503.29 *b*) $5,120.48 *c*) $4,957.67 *d*) $4,701.04 *e*) Otra

23. La amortización en el pago número 40 de un crédito de $150,000, que se amortiza con 60 rentas quincenales e intereses del 15% efectivo, es:

a) menor que $2,970 *b*) entre $2,970 y $3,150 *c*) entre $3,150 y $3,625

d) mayor que $3,625 *e*) Otra

24. Luego de hacer el pago mensual número 15 de un total de 36 de $4,800 cada uno, que amortizan un crédito con intereses del 11.9% anual convertible por mes, el saldo insoluto es:

a) $90,593.00 *b*) $95,063.21 *c*) $93,048.36 *d*) $91,983.67 *e*) Otra

25. Los derechos transferidos al deudor luego del 15º pago en el problema 24 son:

a) $61,429.35 *b*) $54,131.05 *c*) $60,095.08 *d*) $58,495.35 *e*) Otra

26. ¿De cuánto es la amortización al efectuar el 22º abono quincenal de un crédito de $80,000, que se cancela con 45 pagos con intereses del 9.63% nominal quincenal?

a) $1,861.21 *b*) $1,768.28 *c*) $1,593.03 *d*) $2,073.41 *e*) Otra

27. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 26?

a) $9,203.48 *b*) $8,693.65 *c*) $7,161.03 *d*) $7,599.70 *e*) Otra

28. ¿De cuánto son los intereses en el abono semanal número 14 que amortiza un crédito de $46,750 en un plazo de 9 meses, suponiendo que se carga el 15.6% anual compuesto por semana?

a) $121.42 *b*) $110.48 *c*) $196.31 *d*) $95.31 *e*) Otra

29. ¿Con cuánto se liquida el adeudo al hacer el pago 29 en el problema 28?

a) $13,784.72 *b*) $15,036.41 *c*) $14,985.81 *d*) $13,069.32 *e*) Otra

30. ¿De cuánto es el saldo insoluto luego de hacer el pago número 10, de un total de 27 de $7,450 mensuales, que amortizan un crédito con intereses del 14.8% mensual compuesto por mes?

a) $110,429.50 *b*) $113,625.58 *c*) $120,435.03 *d*) $112,063.71 *e*) Otra

31. ¿Cuánto se paga por concepto de intereses en el crédito del problema 30?

a) $31,204.73 *b*) $30,946.65 *c*) $29,961.08 *d*) $30,196.41 *e*) Otra

32. ¿A cuánto ascienden los derechos adquiridos por el deudor, luego de efectuar la mitad de los abonos semanales de $750, que amortizan un crédito de $30,956 con cargos del 16.8% anual capitalizable por mes?

a) $15,478.00 *b*) $14,907.16 *c*) $15,961.73 *d*) $16,048.84 *e*) Otra

33. ¿De cuánto es la amortización en el decimotercer abono quincenal que amortiza un crédito de $78,000 con intereses del 12.72% nominal quincenal, en un plazo de 2 años?

a) $1,525.06 *b*) $2,023.42 *c*) $1,961.42 *d*) $1,803.25 *e*) Otra

34. ¿A cuánto ascienden los derechos adquiridos por el deudor, luego de hacer el pago 35 en un crédito de $756,000 con intereses del 9.36% anual compuesto por mes y un plazo de 4 años? Suponga que los abonos son mensuales.

a) $503,429.35 *b*) $497,941.06 *c*) $528,226.01 *d*) $513,902.61 *e*) Otra

35. Los derechos adquiridos por el deudor, luego de efectuar el décimo pago de un crédito que se amortiza con 25 rentas bimestrales, son de $94,340. ¿De cuánto es cada pago si en ese momento se ha amortizado el 35.60% de la deuda y los intereses son del 9.0% nominal bimestral?

a) $12,789.82 *b*) $11,963.31 *c*) $12,961.43 *d*) $13,056.91 *e*) Otra

36. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 35?

a) $60,325.15 *b*) $54,745.50 *c*) $58,962.04 *d*) $57,843.91 *e*) Otra

37. ¿Qué porcentaje de la deuda de $135,000 se ha transferido al deudor, luego de efectuar el vigésimo primer pago mensual, considerando que son 36 y se cargan intereses del 13.80% nominal mensual?

a) 55.6031% *b*) 59.4532% *c*) 54.6387% *d*) 53.2909% *e*) Otra

38. ¿Con cuánto se cancela la deuda del problema 37, al hacer el pago 24?

a) $57,639.31 *b*) $56,363.23 *c*) $55,329.08 *d*) $55,896.72 *e*) Otra

39. ¿Con cuál pago de los 24 mensuales de $10,350 cada uno, se ha amortizado aproximadamente el 34.19% de una deuda, si los intereses son del 14.4% nominal mensual?

a) 9º *b*) 11º *c*) 12º *d*) 8º *e*) Otra

6.4 Amortización constante

Puesto que la porción que amortiza el capital es igual para todos los pagos, cada uno es menor que el anterior y, como en los casos anteriores, con el primer ejemplo se deducen las fórmulas para este sistema.

Ejemplo 1

Con el sistema de amortización constante, tasa de interés del 13.2% nominal mensual y plazo de 2 años, obtenga los primeros dos pagos mensuales y el último para amortizar un crédito de \$96,000.

solución

La parte que amortiza el capital en cada uno de los 24 pagos es:

$$A = 96{,}000/24$$

o $$A = \$4{,}000$$

Los intereses que genera la deuda en el primer periodo son:

$$I_1 = 96{,}000(0.132/12) \quad i = 0.132$$

$$I_1 = 96{,}000(0.011) \quad \text{o} \quad I_1 = \$1{,}056$$

y el primer abono con interés es:

$$R_1 = 4{,}000 + 1{,}056$$

o $$R_1 = \$5{,}056$$

Los intereses del segundo periodo, puesto que el saldo insoluto es \$4,000 menos que el anterior, son:

$$I_2 = (96{,}000 - 4{,}000)(0.011)$$

o $$I_2 = \$1{,}012$$

y la segunda renta es entonces :

$$R_2 = 4{,}000 + 1{,}012 \quad \text{o} \quad R_2 = \$5{,}012$$

Puede continuarse de esta manera para los 22 pagos restantes, pero como el saldo insoluto al iniciar el último periodo es igual a la amortización. ¿Por qué? entonces la última renta es, en consecuencia:

$$R_{24} = 4{,}000 + 44 \quad R_{24} = A + I_{24}$$

o $$R_{24} = \$4{,}044$$

Ya que los intereses son $I_{24} = 4{,}000(0.011)$

o $$I_{24} = \$44$$

Para generalizar, advierta lo siguiente que se resume en el teorema 6.1:

- La amortización en cada pago es $A = C/np$, donde C es la deuda, y np el número de rentas.
- Los intereses del primer periodo son $I_1 = C(i/p)$, donde i/p es la tasa de interés por periodo. La primera renta es, entonces:

$$R_1 = A + C(i/p) \qquad R_1 = A + I_1$$
$$R_1 = C/np + Cin/\mathrm{np} \qquad C(i/p) = C(in/np)$$
$$R_1 = (C/np)(1 + ni) \qquad \text{se factoriza } C/np$$
$$R_1 = A(1 + ni) \qquad C/np = A$$

- La diferencia entre la primera y la segunda rentas está dada por $A(i/p)$, dado que:

$$I_1 = C(i/p) \text{ e } I_2 = (C - A)(i/p)$$

entonces $$I_2 - I_1 = (C - A)(i/p) - C(i/p)$$
$$C(i/p) - A(i/p) - C(i/p) = -A(i/p) \qquad (a - b)x = ax - bx$$

Esta diferencia es negativa porque las rentas decrecen y es igual a la última renta.

- El segundo abono con intereses es $R_2 = R_1 - d$. El tercero es $R_3 = R_2 - d$ o $R_3 = R_1 - 2d$. Todos forman una progresión aritmética y por eso el enésimo es:

$$R_N = R_1 + (N - 1)(-d) \qquad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Teorema 6.1

En la *amortización constante* de una deuda C, la primera renta es

$$\mathrm{R}_1 = A(1 + ni) \qquad \text{y la enésima es}$$
$$R_N = R_1 - (N - 1)d$$

donde

$A = C/np$ es la amortización constante.

$d = A(i/p)$ es la diferencia entre dos rentas sucesivas, que decrecen aritméticamente, y como antes:

n es el plazo en años

np es el número de rentas

i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año

Ejemplo 2

Valor presente, cancelación anticipada de un crédito y cuadro de amortización

El Hospital Regional del Norte renueva sus aparatos de radiología con un anticipo del 33%, y el resto a pagar en 2 años con amortización constante y pagos trimestrales. El primero de éstos es por \$24,335. Suponiendo que la tasa de interés es del 9.64% anual convertible por trimestre, obtenga:

a) El precio de contado del nuevo equipo.

b) El capital con el que se cancela la deuda al hacer el quinto pago.

c) El cuadro de amortización.

solución

a) Para el precio de contado, en la primera ecuación del teorema 6.1 se reemplazan:

R_1 por 24,335, la primera renta
p por 4, el número de trimestres por año
n por 2, el plazo en años
np por 8, el número de rentas
i por 0.0964, la tasa de interés anual.

Entonces:

$$24{,}335 = (C/8)[1 + 2(0.0964)] \qquad R_1 = A(1 + ni)$$

$$24{,}335 = (C/8)(1.1928)$$

de donde

$$C = 24{,}335/0.1491 \quad \text{o} \quad C = \$163{,}212.609$$

que corresponde al 67% del precio, y por eso:

$$\text{Precio} = 163{,}212.609/0.67$$

o $\$243{,}600.909$

b) El valor presente de los tres pagos que restan es igual al saldo insoluto, la suma de las tres amortizaciones, cada una de las cuales es

$$A = 163{,}212.609/8 \text{ o } A = 20{,}401.58$$

Entonces:

$$\text{saldo} = 3(20{,}401.58) \quad \text{o} \quad \$61{,}204.74$$

El quinto pago, que debe sumarse a este saldo es:

$$R_5 = 24{,}335 - (5 - 1)(491.68) \quad \text{ya que} \quad R_5 = R_1 - (N - 1)\, d$$

o $R_5 = \$22{,}368.28$

ya que la diferencia es $d = 20{,}401.58(0.0964/4) = 491.68$

Entonces, al hacer el quinto pago, la deuda se cancelará con:

$$61{,}204.74 + 22{,}368.28 = \$83{,}573.02$$

Observe que de los últimos 3 pagos no se suman intereses, porque se están anticipando, mientras que el quinto sí los incluye.

c) El cuadro de amortización es el siguiente, que se inicia con el primer saldo insoluto; esto es, la deuda original en la última columna, la primera renta y los primeros intereses en el periodo 0, y la amortización constante en todos los renglones de la penúltima columna.

Periodo	Renta (R)	Intereses (I)	Amortización (A)	Saldo insoluto (S)
0	–	–	–	163,212.609
1	24,335.000	3,933.424	20,401.576	142,811.033
2	23,843.322	3,441.746	20,401.576	122,409.457
3	23,351.644	2,950.068	20,401.576	102,007.881
4	22,859.966	2,458.390	20,401.576	81,606.305
5	22,368.288	1,966.712	20,401.576	61,204.729
6	21,876.610	1,475.034	20,401.576	40,803.153
7	21,384.932	983.356	20,401.576	20,401.577
8	20,893.254	491.678	20,401.576	0.001

Note que para hacer este cuadro:

- El saldo anterior a cualquier periodo K se obtiene restando de la deuda original, $(K - 1)$ veces la amortización constante. Por ejemplo, para el cuarto periodo el saldo anterior es:

$$S_{4-1} = 163{,}212.609 - (4 - 1)(20{,}401.576)$$
$$S_3 = 163{,}212.609 - 61{,}204.728$$

o
$$S_3 = 102{,}007.881$$

- Para los intereses de cualquier periodo, el saldo inmediato anterior se multiplica por la tasa de interés por periodo; por ejemplo, para los del cuarto se tiene:

$$I_4 = 102{,}007.881(0.0964/4)$$
$$I_4 = 102{,}007.881(0.0241)$$

o
$$I_4 = \$2{,}458.39$$

que se anotan en la tercera columna del cuadro y se suman con la amortización constante para obtener la cuarta renta

$$R_4 = 20{,}401.576 + 2{,}458.390$$

o
$$R_4 = \$22{,}859.966$$

- La diferencia entre dos abonos sucesivos es siempre igual a los intereses del último periodo.

Intereses en la amortización constante

En este sistema de amortización, el cargo total por concepto de intereses se obtiene sumando los valores de la tercera columna del cuadro de amortización; pero también con la fórmula 2.2 para la suma de los términos de una progresión aritmética.

El primer término es igual a los intereses del primer periodo:

$$I_1 = C(i/p) \qquad I_1 = a_1$$

El último es:

$$I_{np} = A(i/p) \qquad I_{np} = a_n$$
$$I_{np} = (C/np)(i/p) \qquad A = C/np$$

o

$$I_{np} = Ci/(np)p$$

y la suma es entonces:

$$I = (np/2)[Ci/p + Ci/(np)p] \qquad S_m = (m/2)(a_1 + a_n)$$
$$I = (np/2)[Cinp/pnp + Ci/npp] \qquad a/b = ac/bc$$

Si se factoriza ci/npp dentro de los corchetes y se cancela np, se obtiene la fórmula del siguiente

Teorema 6.2

El cargo total por concepto de intereses en la amortización constante de un crédito está dado por

$$I = (Ci/2p)(np + 1)$$

donde las literales tienen el significado de antes. (Véase el teorema 6.1, por ejemplo).

Ejemplo 3

Halle los intereses que le cargan al hospital del ejemplo 2, con la ecuación del teorema 6.2.

solución

Los valores a sustituir son:

$C = 163{,}212.609 \quad i = 0.0964 \quad p = 4$ y $n = 2$, entonces:

$$I = [163{,}212.609(0.0964)/8](8 + 1)$$
$$I = (1{,}966.711939)(9)$$

o

$$I = \$17{,}700.41$$

Resultado que puede comprobarse sumando los números de la tercera columna del cuadro de amortización.

Ejercicios 6.4

1. ¿Cuál es la característica principal de la amortización constante?
2. ¿Cómo se calculan los intereses en la amortización constante?
3. Obtenga los primeros 3 abonos bimestrales que amortizan constantemente una deuda de \$45,000 en 2 años a una tasa del 22% de interés capitalizable por bimestre.
4. ¿Cuánto se carga por intereses en el problema 3?
5. ¿De cuánto fue un crédito automotriz que se amortiza de manera constante con 30 rentas mensuales a una tasa de interés del 12.36% nominal mensual? Considere que el primer abono es por \$5,000.
6. La diferencia entre 2 abonos mensuales sucesivos, que se hacen para amortizar en forma constante una deuda es de \$50. ¿De cuánto fue la deuda? ¿Por qué cantidad es el primero de los pagos, si la tasa de interés es del 9.6% capitalizable por mes? Suponga 8 meses de plazo y calcule los intereses.
7. ¿Cuántas rentas semanales se necesitan para amortizar en forma constante un crédito de \$21,000, si el primero es por \$1,550 y se cargan intereses a una tasa del 12.48% capitalizable por semana?
8. ¿Con qué tasa de interés capitalizable por semana se amortiza de forma constante, en 20 semanas, un crédito por \$75,000, si el último abono semanal es de \$3,760?
9. Haga el cuadro de amortización constante, si una motocicleta de \$23,200 se paga con 8 mensualidades y se tiene un cargo del 13.2% de interés compuesto por mes.
10. Una exportadora de artesanías realizó una operación crediticia por \$30,000, a una tasa de interés del 12.72% capitalizable por mes y a 10 mensualidades. Suponiendo una amortización constante, determine:

    a) El monto total por intereses.

    b) ¿Con cuánto se cancela la deuda al efectuar el quinto pago?

    c) El cuadro de amortización.
11. ¿Con cuántos pagos quincenales que se reducen \$15 cada quincena se amortiza constantemente el precio de una computadora de \$16,500, si se carga una tasa de interés del 10.56% anual capitalizable por mes? Obtenga los intereses.
12. Un crédito en mercancía por \$47,500 se amortiza constantemente con 16 mensualidades. ¿De cuánto son las tres primeras, si la tasa de interés es del 21.6% capitalizable por mes, y la primera se hace 3 meses después de la compra?
13. El primer abono quincenal para amortizar un préstamo de forma constante es de \$825, la tasa de interés es del 19.2% anual convertible quincenalmente y el plazo es a 9 meses. ¿Por qué cantidad fue el préstamo?

14. Para completar la colegiatura semestral de sus hijos, el licenciado Mendoza consigue un préstamo de $68,000 a una tasa de interés efectivo del 13%. ¿De cuánto son los primeros 3 pagos quincenales de un total de 8? ¿Cuánto paga por concepto de intereses? Considere que la amortización es constante y haga el cuadro de amortización.

15. ¿Cuántos pagos bimestrales serán necesarios para amortizar de forma constante un crédito de $75,000? Suponga que el primero es por $8,600 y que la tasa de interés es del 14.1% capitalizable por bimestre. ¿A cuánto ascienden los intereses?

16. Un crédito automotriz se amortiza mediante 5 mensualidades de $8,000 y 38 rentas quincenales posteriores, con amortización constante a una tasa del 12.03% anual capitalizable por mes. Suponiendo que la primera de estas 38 rentas es por $4,500, ¿por cuánto fue el adeudo? Haga el cuadro de amortización en sus primeros siete renglones y el último. ¿De cuánto es el saldo insoluto luego de hacer el pago 18?

17. Una deuda se amortiza con 25 rentas mensuales de $5,400 a una tasa del 9.12% de interés nominal mensual. ¿De cuánto serán las primeras tres y la última renta mensual, si se amortizara constantemente en el mismo plazo?

18. ¿Por cuánto se contrata un crédito que se amortiza constantemente con 30 rentas quincenales, si la primera es de $4,250 y la tasa de interés es del 13.92% compuesto por quincena? ¿A cuánto ascienden los derechos adquiridos por el deudor luego del pago 20?

19. ¿Cuántos pagos son necesarios para amortizar constantemente un crédito de $60,000? Suponga que son trimestrales, el primero es por $10,200 y la tasa de interés es del 13.3% anual compuesto por trimestre.

En los problemas del 20 al 36 seleccione la opción correcta, justificándola.

20. ¿Cuál es el primer abono semanal que amortiza de forma constante un crédito de $19,600 con intereses del 12.74% anual capitalizable por semana? Suponga que son 25.

a) $864.05 *b*) $921.25 *c*) $832.02 *d*) $796.04 *e*) Otra

21. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 20?

a) $624.26 *b*) $568.24 *c*) $695.32 *d*) $702.48 *e*) Otra

22. ¿Por qué cantidad es un crédito que se amortiza constantemente con 20 rentas mensuales? Suponga intereses del 9.63% nominal mensual y que la última renta es de $3,500.

a) $70,845.23 *b*) $75,421.05 *c*) $69,442.72 *d*) $71,396.45 *e*) Otra

23. La diferencia entre dos pagos sucesivos en la amortización constante de un crédito es de $1,250. ¿De qué cantidad fue tal crédito si son 13 pagos bimestrales con el 14.4% de interés anual compuesto por bimestre?

a) $560,398.05 *b*) $600,369.43 *c*) $705,421.36 *d*) $677,083.33 *e*) Otra

24. ¿Cuánto dinero se paga por concepto de intereses en el problema 23?

a) $125,421.42 *b*) $113,750.00 *c*) $119,409.08 *d*) $121,485.45 *e*) Otra

25. Un crédito de $85,000 se amortiza de manera constante con intereses del 9.06% nominal mensual. ¿De cuánto es la segunda renta si son 15?

a) $6,265.63 *b*) $7,043.21 *c*) $6,009.45 *d*) $6,593.38 *e*) Otra

26. ¿Con cuánto dinero se cancela la deuda del problema 25 al efectuar el décimo pago?

a) \$38,463.95 *b*) \$30,962.75 *c*) \$34,256.70 *d*) \$32,905.78 *e*) Otra

27. El último pago semanal de un total de 50, en la amortización constante de un capital con interés del 9.1% anual convertible por semana, es de \$1,950. ¿De cuánto es el capital?

a) \$97,329.67 *b*) \$103,413.31 *c*) \$98,794.58 *d*) \$110,913.06 *e*) Otra

28. ¿Cuánto dinero se carga por concepto de intereses en el problema 27?

a) \$4,721.41 *b*) \$4,343.34 *c*) \$5,063.28 *d*) \$5,328.01 *e*) Otra

29. ¿De cuánto es la deuda que se amortiza de forma constante con intereses del 11.6% anual capitalizable por mes, considerando que el primero de 8 abonos bimestrales es de \$17,250?

a) \$135,421.03 *b*) \$130,963.08 *c*) \$110,495.01 *d*) \$119,437.68 *e*) Otra

30. En el problema 29, ¿a cuánto ascienden los derechos adquiridos por el deudor luego de hacer el quinto pago?

a) \$74,648.55 *b*) \$44,789.13 *c*) \$62,428.05 *d*) \$70,987.83 *e*) Otra

31. Un crédito automotriz se amortiza con 5 pagos mensuales de \$15,000 y después 36 mensualidades, que decrecen con amortización constante e intereses del 13.44% anual capitalizable por mes. ¿De qué tamaño fue el crédito si la diferencia entre dos pagos sucesivos es de \$45?

a) \$193,285.43 *b*) \$215,910.43 *c*) \$209,352.47 *d*) \$203,641.70 *e*) Otra

32. ¿Cuánto pagó por intereses el comprador del automóvil en el problema 31?

a) \$45,795.33 *b*) \$40,260.39 *c*) \$42,563.31 *d*) \$38,708.48 *e*) Otra

33. ¿Cuántos pagos trimestrales se necesitan para amortizar un crédito de \$75,000, considerando que la tasa de interés es del 12.8% nominal trimestral y que el primero es por \$4,900?

a) 35 *b*) 30 *c*) 32 *d*) 37 *e*) Otra

34. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el vigésimo tercer pago en el problema 33?

a) \$15,600 *b*) \$17,500 *c*) \$18,350 *d*) \$19,260 *e*) Otra

35. ¿A cuánto ascienden los derechos transferidos al deudor, luego de hacer el 12º pago en la amortización de un crédito de \$35,000? Suponga que son 20 abonos semanales con intereses del 9.88% nominal semanal y la amortización es constante.

a) \$19,850 *b*) \$20,700 *c*) \$21,000 *d*) \$18,900 *e*) Otra

36. El último abono mensual que amortiza de forma constante un crédito de \$127,500 con cargos del 10.20% nominal mensual es de \$63.75. ¿Cuántos son necesarios?

a) 18 *b*) 20 *c*) 21 *d*) 17 *e*) Otra

6.5 Amortización de renta variable

A diferencia de los sistemas anteriores, aquí tanto la renta como la amortización son variables, y la variación puede ser aritmética o geométrica y variar pago tras pago o en grupos de pagos.

A la sucesión de rentas que varían de forma aritmética se le llama gradiente uniforme, o *gradiente aritmético*; y a la diferencia entre dos rentas sucesivas, *gradiente*, que se denota con *d*.

Las rentas que varían de forma geométrica se denominan *serie en escalera* o *serie gradiente*, y la razón entre dos rentas sucesivas se llama *gradiente geométrico*.

Variación aritmética

Ejemplo 1

Deducción de fórmula

Obtenga las 5 rentas mensuales vencidas que amortizan un capital de $60,000 con intereses del 10.80% nominal mensual, suponiendo que cada uno es $1,000 mayor que el anterior.

solución

Como se aprecia en la figura 6.1, de cada renta se obtiene su valor actual con la fórmula del interés compuesto. La suma de los 5 debe ser igual a los $60,000.

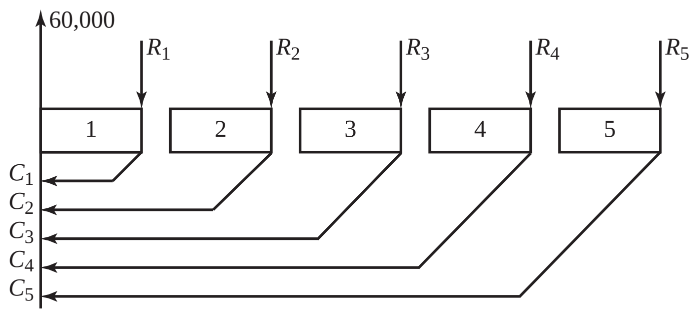


FIGURA 6.1

El plazo para el primero es un mes, para el segundo son dos y para el último son cinco meses:

$$C_1 = R_1(1 + 0.1080/12)^{-1}$$
$$C_2 = R_2(1 + 0.009)^{-2}$$
$$C_3 = R_3(1.009)^{-3}$$
$$C_4 = R_4(1.009)^{-4}$$
$$C_4 = R_4(1.009)^{-5}$$

y puesto que cada uno es $1,000 mayor que el anterior, estos cinco capitales se escriben como:

$$
\begin{array}{llllll}
 & C_1 = R_1(1.009)^{-1} & \text{o} & C_1 = \boxed{R_1(1.009)^{-1}} & & \\
 & C_2 = (R_1 + d)(1.009)^{-2} & \text{o} & C_2 = \boxed{R_1(1.009)^{-2}} & + d(1.009)^{-2} & d = 1{,}000 \\
 & C_3 = (R_1 + 2d)(1.009)^{-3} & \text{o} & C_3 = \boxed{R_1(1.009)^{-3}} & + 2d(1.009)^{-2} & \\
 & C_4 = (R_1 + 3d)(1.009)^{-4} & \text{o} & C_4 = \boxed{R_1(1.009)^{-4}} & + 3d(1.009)^{-3} & \\
\text{y} & C_5 = (R_1 + 4d)(1.009)^{-5} & \text{o} & C_5 = \boxed{R_1(1.009)^{-5}} & + 4d(1.009)^{-4} &
\end{array}
$$

La suma S_1 de los primeros términos, los que están en el recuadro, de estos 5 capitales, factorizando R_1 es:

$$S_1 = R_1[(1.009)^{-1} + (1.009)^{-2} + (1.009)^{-3} + (1.009)^{-4} + (1.009)^{-5}]$$

y la suma entre los paréntesis es una serie geométrica con un primer término $a_1 = (1.009)^{-1}$, la razón común es también $r = (1.009)^{-1}$ y el número de términos es 5; entonces:

$$S_1 = R_1\left[(1.009)^{-1}\frac{1 - [(1.009)^{-1}]^5}{1 - (1.009)^{-1}}\right] \qquad S = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_1 = R_1\left[\frac{1}{1.009}\left(\frac{1 - (1.009)^{-5}}{1 - (1.009)^{-1}}\right)\right] \qquad a^{-1}b = \left(\frac{1}{a}\right)b$$

$$S_1 = R_1\left[\frac{1 - (1.009)^{-5}}{1.009 - 1}\right] \quad \text{o} \quad S_1 = R_1\left[\frac{1 - (1.009)^{-5}}{0.009}\right] \qquad aa^{-1} = 1$$

esto es,

$$S_1 = R_1(4.867784789)$$

Note que S_1 es el capital, es decir, el valor presente de una anualidad ordinaria de 5 rentas R_1.

Por otro lado, la suma de los segundos términos, los que no están en el recuadro, forman una serie aritmético-geométrica cuya suma puede comprobarse, sin considerar la diferencia d, está dada por:

$$S_1 = \frac{1-(1+ni)(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$$

donde el significado de todas las literales es el mismo de antes.
En este caso, tal suma es, entonces:

$$S_2 = \frac{1-[1+(5/12)(0.108)](1+0.009)^{-5}}{(0.009)^2}$$

$$S_2 = 0.000781516/0.000081 \quad \text{o} \quad S_2 = 9.648344444$$

y como la diferencia es $d = \$1{,}000$, al multiplicar queda que $S_2 = 9{,}648.34$
Consecuentemente, puesto que $C = S_1 + S_2$, se tiene

$$60{,}000 = R_1(4.867784789) + 9{,}648.34$$

de donde

$$R_1 = (60{,}000 - 9{,}648.34)/4.867784789$$

o

$$R_1 = \$10{,}343.85$$

Para las 4 rentas restantes se suman sucesivamente los \$1,000. Se deja como un interesante ejercicio, hallar el valor presente de cada una para luego sumarlos y corroborar que suman \$60,000.

Lo anterior se resume en el siguiente:

Teorema 6.3

Un crédito C al inicio del plazo se amortiza con np rentas vencidas, que varían aritméticamente según la ecuación

$$C = T(R_1) + V(d)$$

donde
$$T = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$V = \frac{1-(1+np(i/p))(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2} \,*$$

Además,

R_1 es la primera renta

d es el gradiente, la diferencia entre dos pagos sucesivos

n es el plazo en años,

p es la frecuencia de conversión

i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año

Por supuesto que estas fórmulas son válidas para rentas que decrecen, es decir, para d negativa.

Ejemplo 2

Haga el cuadro de amortización del crédito del ejemplo 1 y determine los intereses.

solución

a) Sirva este cuadro para comprobar las fórmulas. Se comienza escribiendo la primera renta en la segunda columna, y la deuda C en la última.

Los intereses del primer periodo son:

$$I_1 = 60{,}000(0.009) \qquad I = C(i/p)$$

o
$$I_1 = \$540$$

La primera amortización es, por lo tanto:

$$A_1 = 10{,}343.85 - 540, \qquad \text{o} \quad A_1 = 9{,}803.85, \qquad \text{ya que} \qquad R = A + I$$

que se anota en la cuarta columna

* Note usted que como $(np)(i/p)$ es igual a ni, el primer paréntesis se puede expresar como $(1 + ni)$, pero es más práctico dejarlo así para las operaciones.

Periodo	Renta (*R*)	Intereses (*I*)	Amortización (*A*)	Saldo insoluto (*S*)
0	–	–	–	60,000.00
1	10,343.85	540.00	9,803.85	50,196.15
2	11,343.85	451.76	10,892.08	39,304.07
3	12,343.85	353.74	11,990.11	27,313.95
4	13,343.85	245.83	13,098.02	14,215.93
5	14,343.85	127.94	14,215.91	0.02

b) Los intereses se obtienen sumando los valores de la tercera columna, pero cuando no se tiene el cuadro basta con encontrar el total pagado, para luego restar el crédito. El total que se paga es una serie aritmética con $a_1 = 10{,}343.85$, la primera renta en este ejemplo, y $d = 1{,}000$, la diferencia común, es

$$M = (5/2)[2(10{,}343.85) + 4(1{,}000)] \qquad S = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

$$M = \$61{,}719.25$$

$$I = 61{,}719.25 - 60{,}000$$

o $$I = \$1{,}719.25$$

Ejemplo 3

Valor presente, intereses, saldo insoluto

¿Por qué cantidad fue un crédito para maquinaria agrícola, si se amortizó con 15 rentas bimestrales a una tasa del 12.78% compuesto por bimestre? Suponga que la primera es por \$50,000 y crecen sucesivamente \$6,500. ¿Cuánto se paga por intereses? ¿Con cuánto se liquida la deuda al hacer el pago número 8?

solución

a) En las ecuaciones del teorema 6.3 se sustituyen R_1 por \$50,000, *d* por \$6,500, *i* por 0.1278, *p* por 6, puesto que son bimestrales, *n* por 15/6 = 2.5 años y *np* por 15, el número de rentas.

a)

$$T = \frac{1-(1+0.1278/6)^{-15}}{0.0213} \quad \text{o} \quad T = 12.72517236$$

$$V = \frac{1-(1+0.3195)(1+0.0213)^{-15}}{(0.0213)^2} \qquad (np)(i/p) = 15(0.0213) = 0.3195$$

o $$V = 84.07816573$$

Entonces, puesto que $C = T(R_1) + Vd$, queda:

$$C = 12.72517236(50{,}000) + 84.07816573(6{,}500)$$

o $$C = \$1'182{,}766.69$$

b) Los intereses son la diferencia entre el total que se paga y el valor de la maquinaria, $I = M - C$.

El total que se paga es igual a la suma de las 15 rentas, que forman una serie aritmética con $a_1 = 50{,}000$, $d = 6{,}500$ y 15 términos

$$M = (15/2)[2(50{,}000) + (14)6{,}500] \qquad S = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

$$M = (15/2)(191{,}000)$$

o $$M = \$1'432{,}500$$

Entonces, los intereses son:

$$I = 1'432{,}500.00 - 1'182{,}766.69 \quad \text{o} \quad I = 249{,}733.31$$

c) Con las mismas ecuaciones, las del teorema 6.3, se obtiene el saldo insoluto luego de hacer el octavo pago. Para ello el número de rentas es $np = 7$, las que faltan, y la primera de esa serie es la novena del total; esto es:

$$R_9 = 50{,}000 + 8(6{,}500) \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$R_9 = \$102{,}000$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{1-(1.0213)^{-7}}{(0.0213)}$$

o $$T = 6.439771803$$

$$V = \frac{1-(1+0.1491)(1.0213)^{-7}}{(0.0213)^2} \qquad (np)(i/p) = 7(0.0213) = 0.1491$$

o $$V = 18.77660936$$

Entonces, el saldo insoluto es:

$$\text{Saldo} = (6.439771803)(102{,}000) + (18.77660936)(6{,}500)$$

o $$\text{saldo} = \$778{,}904.68$$

A éste hay que sumar la propia renta R_8 en la que hubo 7 incrementos desde la primera; es decir:

$$R_8 = 50{,}000 + 7(6{,}500)$$

o $$R_8 = \$95{,}500$$

En consecuencia, al efectuar el pago número 8 la deuda si liquida con:

$$778{,}904.68 + 95{,}500 = \$874{,}404.68$$

Note que cuando se ha realizado el 53.33% de los pagos, la deuda se ha amortizado únicamente en 34.1455%. ¿Por qué?

Variación geométrica

En este sistema de amortización, el incremento en las rentas se da en porcentaje y, como antes, con el primer ejemplo se desarrolla una fórmula genérica.

Ejemplo 4

Deducción de fórmula, rentas en una amortización

Se compra una computadora de \$21,000, con 6 abonos quincenales que crecen 5% sucesivamente a una tasa de interés del 12% nominal quincenal. ¿De cuánto es cada uno?

solución

Los \$21,000 se separan en 6 partes proporcionales C_1, C_2,. . . C_6, cuyo valor futuro debe ser igual al valor de cada renta quincenal, es decir, que los 6 capitales son

$$C_1 = R_1(1 + 0.12/24)^{-1} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$
$$C_2 = R_2(1.005)^{-2}$$
$$\vdots$$
$$C_6 = R_6(1.005)^{-6}, \text{ dado que el plazo crece con la renta}$$

Como cada pago es un 6% mayor que el precedente, se cumple que el K–ésimo es:

$$R_K = R_{K-1} + (0.06)R_{K-1} \quad \text{o} \quad R_K = (1.06)R_{K-1}$$

Y si denotamos con t al paréntesis, es decir, $t = 1.06$, entonces, t en general es $t = 1 + f$, donde f es la tasa de incremento en los pagos. Es claro que si f es negativo, entonces $r < 1$ y los pagos se reducen en lugar de crecer.

También es cierto que si R_1 es la primera renta, entonces:

$$R_2 = R_1(1 + f) \quad \text{o} \quad R_2 = R_1(t)$$
$$R_3 = R_2(1 + f) \quad \text{o} \quad R_3 = R_2(t), \qquad R_3 = R_1(t)(t) \quad \text{o} \quad R_3 = R_1(t^2)$$

y continuando de esta manera, el K–ésimo abono es expresable en términos del primero, como $R_K = R_1(r^{K-1})$.

La suma de los 6 capitales, puesto que R_1 es factor común es, por lo tanto:

$$\text{Suma} = R_1[(1.005)^{-1} + t(1.005)^{-2} + t^2(1.005)^{-3} + ... + t^5(1.005)^{-6}] \qquad t = 1 + f$$

La suma entre paréntesis es una serie geométrica con 6 términos y como tal se evalúa con el teorema 2.4, donde el primero es $a_1 = (1.005)^{-1}$ o $a_1 = 1/1.005$. La razón común es $r = t(1.005)^{-1}$ porque $r = a_2/a_1$, por ejemplo. Entonces, la suma es:

$$\text{Suma} = R_1\left[\left(\frac{1}{1.005}\right)\frac{1-[(t)(1.005)^{-1}]^6}{1-t(1.005)^{-1}}\right] \qquad S_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$(A) \qquad \text{Suma} = R_1\left[\frac{1-(t/1.005)^6}{1.005-t(1)}\right] \qquad (1.005)(1.005)^{-1} = 1$$

$$\text{Suma} = R_1\left[\frac{1-(1.06/1.005)^6}{1.005-1.06}\right] \qquad ab^{-1} = a/b \quad \text{y} \quad t = 1.06$$

o $$\text{Suma} = R_1(6.849062564)$$

Esta suma de los 6 capitales debe ser igual al precio de la computadora y por eso:

$$R_1(6.849062564) = 21{,}000$$

de donde

$$R_1 = 21{,}000/6.849062564$$

o $$R_1 = \$3{,}066.11$$

El segundo abono y los siguientes se obtienen, claro, multiplicando sucesivamente por 1.06.

Un buen ejercicio para el estudiante es comprobar este resultado encontrando los 6 capitales, y ver que su suma sea realmente $21,000.

Para generalizar, observamos que la ecuación (A) del desarrollo anterior, es decir, la suma entre los paréntesis, puede expresarse como:

$$\text{Suma} = \frac{1-[(1+f)/(1+i/p)]^{np}}{(1+i/p)-(1+f)} \qquad t = 1+f \quad \text{y} \quad ab^{-1} = a/b$$

$$\text{Suma} = \frac{1-[(1+f)/(1+i/p)]^{np}}{i/p-f} \qquad \text{se cancela el 1}$$

o $$\text{Suma} = \frac{1}{f-i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np}-1\right] \qquad \text{invirtiendo los signos en el numerador y el denominador}$$

Al multiplicar esto por R_1, la primera renta, resulta la ecuación del siguiente:

Teorema 6.4

Un crédito C al inicio del plazo se amortiza con np rentas vencidas variables, geométricamente, según la ecuación

$$C = \frac{R_1}{f-i/p}\left(\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np}-1\right)$$

donde R_1 es la primera renta

f es la tasa de variación geométrica

i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año

n es el plazo en años

Note que C se localiza al inicio el primer periodo, es decir, un periodo antes de la primera renta y por esto la anualidad es ordinaria.

Ejemplo 5

Renta, cuadro de amortización, intereses, saldo insoluto

Obtenga los primeros renglones del cuadro de amortización de un crédito hipotecario de \$800,000, abonos mensuales durante 5 años, una tasa de interés del 20.4% nominal mensual y un incremento constante en los pagos del 1.8%. Calcule el saldo insoluto luego de efectuar el pago 35 y los intereses.

solución

Para hallar el valor de la primera renta, se sustituyen en la ecuación del último teorema, los valores siguientes:

La deuda original, $C = 800{,}000$
La tasa de incremento en las rentas, $f = 0.018$
La tasa de interés, $i = 0.204$ compuesta por mes
La frecuencia de conversión y de pagos, $p = 12$
El plazo en años, $n = 5$
Además, $np = 5(12) = 60$ e $i/p = 0.204/12 = 0.017$

Entonces,

$$800{,}000 = \frac{R_1}{0.018 - 0.017}\left(\left(\frac{1.018}{1.017}\right)^{60} - 1\right)$$

de donde

$$800{,}000 = \frac{R_1}{0.001}\left((1.000983284)^{60} - 1\right)$$

$$800{,}000(0.001) = R_1(0.060741353)$$

$$R_1 = 800{,}000/0.060741353 \quad \text{o} \quad R_1 = \$13{,}170.60$$

El segundo pago y los restantes se obtienen multiplicando sucesivamente por 1.018.

$$R_2 = 13{,}170.60(1.018) = \$13{,}407.67$$

$$R_3 = 13{,}407.67(1.018) = \$13{,}649.01\text{, etcétera}$$

a) Con estos valores en la segunda columna y la deuda en la quinta, se inicia la tabla de amortización.

Periodo	Renta (*R*)	Intereses (*I*)	Amortización (*A*)	Saldo insoluto (*S*)
0	–	–	–	\$800,000.00
1	\$13,170.60	\$13,600.00	–\$429.40	\$800,429.40
2	\$13,407.67	\$13,607.30	–\$199.63	\$800,629.03
3	\$13,649.01	\$13,610.69	\$38.32	\$800,590.71
4	\$13,894.69	\$13,610.04	\$284.65	\$800,306.07

Note que las primeras dos amortizaciones son negativas, la deuda crece en los primeros pagos y comienza a reducirse hasta después del cuarto.

b) Para evaluar los intereses, se suman los pagos formándose una serie geométrica con:

$a_1 = 13{,}170.60$, el primer abono

$r = 1.018$, la razón y

$n = 12(5) = 60$, el número de términos

La suma es, entonces,

$$\text{Suma} = 13{,}170.60\left(\frac{1-(1.018)^{60}}{1-1.018}\right) \quad S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\text{Suma} = 13{,}170.60(106.4739754)$$

$$\text{Suma} = \$1'402{,}326.14$$

Consecuentemente,

$$\text{Intereses} = 1'402{,}326.14 - 800{,}000.00 \quad I = M - C$$

$$I = \$602{,}326.14$$

c) El saldo insoluto después de hacer el pago 35, es igual al valor presente de los 25 que restan. La misma ecuación del teorema 6.4 se utiliza con $np = 25$ y un primer pago R_1, que es igual al pago 36 de los 60, el cual es

$$R_{36} = 13{,}170.60(1.018)^{35}$$

$$R_{36} = \$24{,}591.09$$

porque hubo 35 incrementos del 1.8%

El saldo insoluto es, entonces,

$$C = \frac{24{,}591.09}{0.018-0.017}\left(\left(\frac{1.018}{1.017}\right)^{25}-1\right)$$

$$C = 24'591{,}090\ (1.024874353 - 1)$$

$$C = \$611{,}687.45$$

Note nuevamente que cuando se ha realizado el 58.33% de los pagos, la deuda se ha amortizado tan sólo un 23.54%, ya que:

$$35/60 = 0.58\overline{3} \text{ o } 58.33\%$$

y $$(800{,}000 - 611{,}687.45)/800{,}000 = 0.2354 \text{ o } 23.54\%$$

Importante

Antes de concluir esta sección, es importante señalar que los teoremas 6.3 y 6.4 se emplean no sólo para amortizar deudas, sino también para distribuir un capital cualquiera *C* al inicio del plazo, en una serie de pagos crecientes, como se aprecia en los ejercicios de esta sección.

Ejercicios 6.5

1. Explique brevemente la característica de las amortizaciones de renta variable.
2. ¿Qué es una *serie gradiente* y qué es el *gradiente aritmético*?
3. ¿Qué es una *serie en escalera* y qué es el gradiente geométrico?
4. ¿De cuánto es el capital que se amortiza con 15 abonos mensuales que crecen $350, si el primero es por $6,000 y los intereses son del 11.4% anual capitalizable por mes?
5. Encuentre los primeros abonos bimestrales que amortizan en 2 años, un crédito de $1.5 millones a una tasa del 18% nominal bimestral, suponiendo que cada uno es $6,250 más grande que su predecesor.
6. ¿Por cuánto es cada uno de los 8 abonos mensuales que la señora de Méndez hace para pagar un refrigerador de $7,500. Suponga que los abonos crecen $40 y que la tasa de interés es del 9.3% compuesto por mes? Obtenga los intereses.
7. Obtenga las primeras 4 rentas quincenales que amortizan en 2 años un crédito de $500,000, considerando que el primero cubre exactamente los intereses de una tasa del 21% capitalizable por quincena y forman una serie gradiente aritmética. ¿A cuánto ascienden los derechos transferidos al deudor luego del pago aritmético 30?
8. ¿Calcule la cantidad de un préstamo que se amortiza con 15 rentas semanales que crecen sucesivamente un 2%, siendo la primera de $2,350 y la tasa de interés es del 12.48% anual compuesto por semana? ¿Con cuánto se cancela al hacer el pago 11?
9. ¿Con cuántos pagos quincenales amortiza el señor Villanueva un crédito de $100,000, si el primero es por $5,400, los siguientes se incrementan en 0.8% y le cargan una tasa del 9.96% de interés nominal quincenal?
10. ¿Cuál es el precio de un terreno que se amortiza con un anticipo del 25% y 24 rentas mensuales que crecen 2.5%, la primera es por $3,800 y se cargan intereses del 18% anual capitalizable por mes?
11. ¿Cuántos abonos trimestrales, que crecen un 3%, se necesitan para amortizar una deuda de $75,000? Suponga que la tasa de interés es del 10.2% anual capitalizable trimestralmente y que el primero es por $6,500. Haga un ajuste a la renta redondeando al entero más cercano.
12. ¿Por qué cantidad es el crédito hipotecario que se amortiza en 5 años, si la renta mensual crece 0.5%, la primera fue de $5,750 y la tasa de interés es del 15% anual capitalizable por mes? Obtenga el saldo insoluto luego de hacer el pago 25.
13. Haga el cuadro de amortización, en sus primeros tres renglones y el último, de un crédito que se amortiza con 15 pagos bimestrales que crecen a un ritmo del 1.3% sucesivamente, el primer pago es de $4,000 y la tasa de interés es del 20.4% compuesto por bimestre.
14. ¿Cuánto debe dar a la Universidad un egresado para que otro estudiante de economía restringida disponga de una beca semestral que crezca un 4.8% cada semestre? Suponga que la tasa es del 11.3% de interés capitalizable por semestre, que la primera semestralidad, 2 años después del donativo, es por $15,000 y la carrera profesional dura 9 semestres.

15. ¿Cuánto deberá invertir a una tasa del 13.36% compuesto por mes, el doctor Escalante para hacer disposiciones mensuales durante 2 años, considerando que el primer retiro es por $7,500, a los 5 años después de la inversión y que crecen:

a) $250 cada mes? *b*) 2.6% cada mes?

16. ¿Cuánto podrá retirar cada quincena durante 7 meses, una persona que deposita en un banco $45,000, ganando intereses a una tasa del 11.28% compuesto por quincena? Considere que el primero se hace 3 meses después del depósito y que los retiros:

a) son iguales.
b) crecen $200 sucesivamente.
c) se incrementan un 2% cada uno.

17. Con intereses a una tasa del 23.4% capitalizable por bimestre, se depositan $150,000 para disponer de cantidades bimestrales que crecen 2.5%. ¿Durante cuánto tiempo se harán las disposiciones, suponiendo que la primera es por $10,200? Obtenga los intereses.

18. ¿Cuántas disposiciones mensuales pueden hacerse, si se invierten $100,000 en una cuenta que reditúa una tasa de interés del 9.6% compuesto por mes? Suponga que la primera disposición es por $5,300, a los 6 meses de la inversión, que las disposiciones ulteriores crecen 1.5% cada mes, y haga un ajuste con un retiro menor al final.

En los problemas 19 al 32 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

19. Encuentre el primer abono mensual de los que amortizan en 3 años un crédito de $750,000, considerando intereses del 12.6% anual capitalizable por mes y crecen $900 sucesivamente.

a) $12,429.32 *b*) $13,098.42 *c*) $11,129.49 *d*) $10,388.32 *e*) Otra

20. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 19?

a) $178,421.08 *b*) $190,979.52 *c*) $185,458.91 *d*) $189,095.31 *e*) Otra

21. ¿De qué magnitud es el crédito que se amortiza con 15 rentas bimestrales e intereses del 13.2%? Suponga que la primera es de $4,850 y crecen $150 sucesivamente.

a) $390,875.31 *b*) $406,778.64 *c*) $398,048.39 *d*) $386,963.37 *e*) Otra

22. El primer abono mensual de un total de 35 que amortizan una deuda de $560,000 es de $18,750. ¿Cuál es la diferencia aproximada entre dos pagos sucesivos, si se consideran intereses del 10.08% nominal mensual?

a) $95.38 *b*) $195.31 *c*) –$195.31 *d*) –$95.38 *e*) Otra

23. ¿De cuánto es la última renta quincenal de un total de 30, que amortizan un crédito de $375,000? Considere cargos del 14% efectivo y que crecen $450 uno tras otro.

a) $20,297.62 *b*) $22,038.18 *c*) $23,961.09 *d*) $21,243.43 *e*) Otra

24. Un crédito de $136,000 se amortiza con 13 rentas mensuales que crecen $450 de forma sucesiva. ¿De cuánto es la primera renta, si se hace 5 meses después de conseguido el préstamo y se cargan intereses del 13.8% anual capitalizable por mes?

a) $9,224.86 *b*) $10,483.09 *c*) $10,063.47 *d*) $11,129.37 *e*) Otra

25. En el problema 19, ¿cuánto se paga por intereses?

a) $19,023.18 *b*) $20,127.34 *c*) $20,497.23 *d*) $23,596.31 *e*) Otra

26. ¿Cuánto se recibió en préstamo si se amortiza con 18 rentas bimestrales que crecen 1.8% sucesivamente? Suponga que la primera renta es de $7,600 y se cargan intereses del 11.4% nominal bimestral.

a) $165,265.41 *b*) $142,093.08 *c*) $133,135.27 *d*) $152,368.87 *e*) Otra

27. ¿De cuánto es el último abono quincenal que amortiza un crédito de $63,000, considerando que son 20, se cargan intereses del 12.96% nominal quincenal y crecen 2% sucesivamente?

a) $4,009.32 *b*) $4,201.65 *c*) $3,728.61 *d*) $4,329.06 *e*) Otra

28. ¿Cuánto se pagó por intereses en el problema 22?

a) $4,328.35 *b*) $4,096.31 *c*) $3,869.28 *d*) $4,198.93 *e*) Otra

29. ¿Con cuánto dinero se cancela el crédito del problema 22 al hacer el abono número 14?

a) $22,473.31 *b*) $24,693.50 *c*) $26,033.47 *d*) $25,421.09 *e*) Otra

30. El abono mensual 20 que amortiza un crédito es de $15,400, los intereses que cargan son del 12.9% nominal mensual y en total son 48 rentas que crecen 1.5% cada mes. ¿De cuánto fue el crédito?

a) $565,306.23 *b*) $670,423.61 *c*) $609,285.31 *d*) $714,903.08 *e*) Otra

31. ¿Cuántos abonos bimestrales se necesitan para amortizar un crédito de $2’760,000, considerando que crecen 1.8% sucesivamente, el primero es por $45,000 y los intereses son del 13.20% anual capitalizable por bimestre? Haga un ajuste a las rentas.

a) 68, la primera de $46,960.35
b) 70, la primera de $46,073.25
c) 71, la primera de $45,121.32
d) 72, la primera de $44,879.37
e) Otra

32. La primera renta mensual que amortiza un crédito de $681,787.00 es de $25,000. ¿Cuánto se necesita si crecen 1.3% sucesivamente y se cargan intereses del 10.2% anual convertible por mes?

a) 26 *b*) 23 *c*) 28 *d*) 25 *e*) Otra

6.6 Problemas de aplicación

Si bien es cierto que la mayoría de los ejemplos resueltos en este capítulo son verdaderas aplicaciones, a continuación plantearemos otros que, por su grado de dificultad o porque representan situaciones muy específicas, no se trataron antes. Se incluyen las anualidades de rentas que varían en grupos y no de manera sucesiva, una por una, como se vio en la sección que precede. Un ejemplo de lo anterior lo constituyen los créditos del Infonavit,* que en México financian y administran recursos económicos para que el trabajador adquiera una vivienda, así como el traspaso de terrenos y otros bienes inmuebles cuando no se han amortizado totalmente.

*Para mayor información sobre el Instituto consulte la dirección www.infonavit.gob.mx

Traspaso de un bien considerado su plusvalía

Porque la situación económica es apremiante, o simplemente para cambiarla por otra más amplia, es común que una persona traspase o trasfiera su vivienda o terreno, antes de pagarla totalmente; pero ¿cuánto debería pedir por ella? Se proponen dos maneras de saberlo y, en ambos casos, debe suponerse que el comprador y futuro propietario seguirá pagando el resto de las mensualidades.

- Evaluando el porcentaje, sobre el precio del bien que se traspasa, que ya ha sido transferido al deudor original, considerando alguna utilidad adicional y la plusvalía del propio bien.
- Calculando el monto en que se traspasa, como si todos los abonos se hubieran hecho en una cuenta bancaria, por ejemplo.

Ejemplo 1

Ⓕ El señor Pérez adquiere un terreno de \$360,000 y lo paga con un anticipo del 25% que amortiza con 8 mensualidades, y el 75% restante lo paga en un plazo de 5 años contados desde que lo compró (también con rentas mensuales). ¿Cuánto deberá pedir por el terreno, si lo traspasa dos años antes de concluir el plazo? Suponga intereses del 13.20% anual capitalizable por mes, el valor del terreno ha aumentado por la inflación y otros factores en un 4.71% en promedio cada trimestre, y los gastos fijos al comprarlo fueron de \$45,000.

solución

El valor presente de las 60 mensualidades al iniciar el plazo es igual al 75% del precio.

$$0.75(360{,}000) = 270{,}000$$

Entonces, cada renta mensual es R de la siguiente ecuación:

$$270{,}000 = R\left[\frac{1-(1+0.132/12)^{-60}}{0.011}\right] \qquad C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

o $$270{,}000 = R(43.75298012)$$

de donde

$$R = 270{,}000/43.75298012$$

o $$R = \$6{,}171.01$$

El saldo insoluto luego de efectuar el pago 36, cuando aún faltan 24, los que corresponden a los dos años, es:

$$C = 6{,}171.01\left(\frac{1-(1.011)^{-24}}{0.011}\right)$$

$$C = 6{,}171.01(20.99260683)$$

o $$C = 129{,}545.59$$

y los derechos adquiridos por el deudor son:

$$D = 270{,}000 - 129{,}545.59$$

o $$D = \$140{,}454.41$$

Lo que ya pertenece al comprador es la suma de estos derechos, el anticipo y los gastos fijos.

$$140{,}454.41 + 0.25(360{,}000) + 45{,}000 = 275{,}454.41$$

El porcentaje en relación con el precio y los gastos fijos es:

$$275{,}454.41/405{,}000 = 0.680134346$$

El valor futuro de precio más gastos fijos, considerando que crecen 4.71% cada trimestre, es:

$$M = 405{,}000(1.0471)^{12} \qquad 360{,}000 + 45{,}000 = 405{,}000$$

o $$M = \$703{,}579.11$$

Consecuentemente, el señor Pérez deberá pedir por su terreno:

$$(0.680134346)703{,}579.11 = \$478{,}528.32,$$

sin contar, claro, alguna utilidad adicional por deshacerse de su propiedad.

Ejemplo 2

Resuelva el ejemplo 1, considerando el problema como una inversión a interés compuesto con la tasa dada.

solución

El valor futuro de los gastos, \$45,000, y del anticipo tres años después es porque 0.25(360,000) = 90,000; esto es:

$$M_1 = 135{,}000(1.011)^{36}$$

o $$M_1 = \$200{,}159.11$$

y el de los 36 abonos que ya se realizaron es:

$$M_2 = 6{,}171.01(1.011)\left[\frac{(1.011)^{36} - 1}{0.011}\right]$$

$$M_2 = 6{,}171.01(1.011)(43.87819118)$$

o $$M_2 = \$273{,}751.26$$

y la suma de los dos es:

$$M_1 + M_2 = \$473{,}910.37,$$

y en esto deberá traspasarse el terreno con este criterio.

Ejemplo 3

Toma de decisiones al comprar maquinaria

Gracias al Tratado de Libre Comercio (TLC), un empresario tiene las siguientes opciones para comprar maquinaria para su fábrica textil. Despreciando los costos por transporte y otros, decida cuál le conviene más, suponiendo que las tres le ofrecen la misma calidad y factibilidad. Suponga que la amortización es gradual.

a) Puede conseguirla en Canadá sin anticipo, 15 mensualidades vencidas de \$21,600 dólares canadienses y una tasa de interés del 7.2% capitalizable por mes.

b) En Estados Unidos se la ofrecen con un anticipo de \$30,000 y 9 abonos bimestrales iguales al anticipo, con cargos del 6.3% de interés nominal bimestral.

c) En su país la puede adquirir al contado en \$3'230,000. Considere que la paridad actual es de 11.32 unidades monetarias por dólar estadounidense, y por dólar canadiense de \$10.46 por cada uno.

solución

a) Para el precio actual en unidades monetarias comprándola en Canadá, se obtiene el valor presente de las 15 rentas mensuales.

$$C_1 = 21{,}600\left(\frac{1-(1+0.072/12)^{-15}}{0.072/12}\right) \qquad C = R\,\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$C_1 = 21{,}600(14.30383382)$$

o $$C = 308{,}962.8105$$

que en unidades monetarias, con la paridad actual, es

$$C = 308{,}962.8105(10.46) = \$3'231{,}751.00$$

b) El valor presente del anticipo y de los 9 abonos bimestrales es el de una anualidad anticipada.

$$C_1 = 30{,}000(1+0.063/6)\left[\frac{1-(1.0105)^{-10}}{0.0105}\right] \qquad C = R(1+i/p)\left[\frac{1-(1+i(p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$C_1 = 30{,}000(1.0105)(9.44595101)$$

o $$C_1 = \$286{,}354.00$$

que en unidades monetarias es:

$$C = 286{,}354.00(11.32) \text{ o } C = \$3'241{,}527.34$$

Consecuentemente, le conviene comprar la maquinaria en su país.

Ejemplo 4

Resuelva el problema 3 considerando que la maquinaria se compra 6 meses después, el dólar estadounidense aumenta 0.13% cada semana, el canadiense aumenta 13 centavos por mes, el precio en su país se incrementa 0.32% cada quincena y las tasas de interés se mantienen fijas.

solución

Al cabo de 6 meses la paridad de la moneda canadiense será:

$$10.46 + 0.13(6) = \$11.24$$

y el precio en esas fechas será:

$$C = 308{,}962.8105(11.24)$$

o

$$C = \$3'472{,}741.99$$

Cada dólar estadounidense costará:

$$11.32(1.0012)^{26} = 11.67853297$$

y el precio en moneda nacional, 6 meses después de ahora, será:

$$C = 286{,}354.00(11.67853297)$$

o

$$C = \$3'344{,}194.63$$

Finalmente, en su país costará:

$$C = 3'230{,}000(1 + 0.0032)^{12}$$

o

$$C = \$3'356{,}238.42$$

Por lo tanto, dentro de seis meses se debería comprar en Estados Unidos según en los resultados anteriores.

Ejemplo 5

Inversión para disposiciones que varían geométricamente

¿Cuánto debe depositar el señor Díaz en una cuenta bancaria que bonifica intereses del 10.4% anual capitalizable por semestres, cuatro años antes de que su hija comience sus estudios profesionales que duran 9 semestres? Suponga que la colegiatura actual es de $35,000 por semestre, que aumenta 4.8% cada semestre y que debe pagarse al inicio de cada periodo semestral. Obtenga los intereses.

solución

a) El diagrama de tiempo de la figura 6.2 puede ayudarnos a entender mejor el planteamiento y solución del ejercicio.

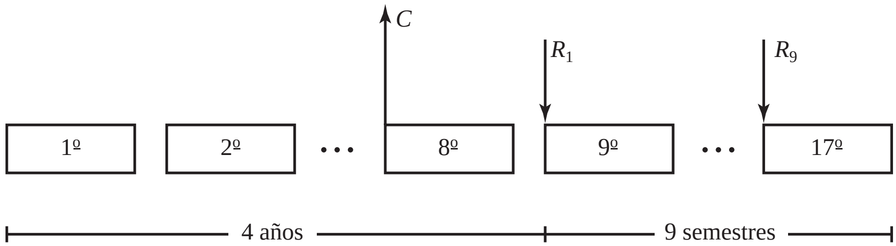


FIGURA 6.2

Las nueve disposiciones semestrales constituyen una anualidad de renta variable geométricamente y, por eso, se emplea la ecuación del teorema 6.4.

$$C = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right]$$

de tal manera que C se localiza un periodo antes de la primera renta, esto es, al final del periodo 7.

Con incrementos del 4.8% semestral se evalúa el valor de la primera renta.

$$R_1 = 35{,}000(1 + 0.048)^7 \qquad a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$R_1 = 48{,}595.60832$$

Los otros valores que se reemplazan en la ecuación 6.4 son:

$f = 0.048$, la tasa de crecimiento en la colegiatura
$i = 0.104$, la tasa de interés nominal semestral
$n = 4.5$, los años de la carrera
$p = 2$, la frecuencia de pagos y de capitalización de intereses
$np = 9$, el número de periodos, de disposiciones

Entonces,

$$C_1 = \frac{48{,}595.61}{0.048 - 0.052}\left[\left(\frac{1.048}{1.052}\right)^9 - 1\right]$$
$$C_1 = -12'148{,}902.50(-0.03370466)$$

o $$C_1 = \$409{,}474.6221$$

Capital que se traslada hasta 7 semestres antes, que es cuando el señor Díaz hace la inversión, con la fórmula del interés compuesto.

$$C = 409{,}474.62(1.052)^{-7} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$
$$C = 409{,}474.62(0.701277365)$$

o $$C = \$287{,}155.28$$

b) Los intereses son la diferencia entre el capital que se invierte y el total de las 9 disposiciones que forman una serie geométrica.

$$M = 48{,}595.61\left(\frac{1-(1.048)^9}{1-1.048}\right) \qquad S_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$M = 48{,}595.61(10.93616129)$$

o $\quad M = \$531{,}449.43$

Así,

$$I = 531{,}449.43 - 287{,}155.28 \qquad I = M - C$$

o $\quad I = \$244{,}294.15$

Ejemplo 6

Inversión para disposiciones que varían aritméticamente

¿Cuánto debe depositar cada mes el señor Díaz del ejemplo 5 durante los 4 años, suponiendo que la colegiatura se incrementa $1,850 cada semestre?

solución

Ahora el valor de la primera renta, es decir, de la primera semestralidad es:

$$R_1 = 35{,}000 + 7(1{,}850) \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$

o $\quad R_1 = 47{,}950.00$

Con las ecuaciones del teorema 6.3 se encuentra el valor presente de las 9 rentas variables.

$$T = \frac{1-(1+0.104/2)^{-9}}{0.052} \qquad T = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

o $\quad T = 7.044942517$

$$V = \frac{1-[1+9(0.052)](1.052)^{-9}}{(0.052)^2} \qquad V = \frac{1-[(1+np(i/p)](1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

o $\quad V = 25.80722337$

Entonces, puesto que $C = TR_1 + Vd$, se tiene:

$$C = 7.044942517(47{,}950.00) + 25.80722337(1{,}850)$$

$$C = 337{,}804.9937 + 47{,}743.3632$$

o $\quad C = 385{,}548.3569$

Este capital se localiza un semestre antes del primer depósito pero debe llevarse hasta un semestre después, porque ahí se ubicará el monto de las 48 rentas mensuales que el señor Díaz realiza antes de que su hija inicie sus estudios.

$$M = 385{,}548.3569(1.052) \qquad M = C(1+\text{i/p})^{np} \qquad np = 1 \qquad \text{o} \qquad M = 405{,}596.8715$$

Ahora bien, el monto acumulado de las 48 rentas mensuales se obtiene con:

$$M = R(1+i/p)\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

Pero antes, se obtiene la tasa capitalizable por mes equivalente al 10.4% nominal semestral.

$$(1 + i/12)^{12} = (1 + 0.104/2)^2$$

de donde

$$1 + i/12 = (1{,}052)^{1/6}$$

o $$1 + i/12 = 1.008484645$$

Entonces,

$$405{,}596.8715 = R(1.008484645)\,\frac{(1.008484645)^{48} - 1}{0.008484645}$$

$$405{,}596.8715 = R(1.008484645)(58.94409701)$$

de donde

$$R = 405{,}596.8715/59.44421675$$

o $$R = 6{,}823.151076$$

Esto quiere decir que el señor Díaz depositará $6,823.15 al inicio de cada mes, durante los cuatro años anteriores al inicio de los estudios de su hija.

Ejemplo 7

Reestructuración de un crédito hipotecario con renta variable en bloques

a) Para ampliar sus instalaciones, la Maquiladora del Noreste consigue un crédito y endosa dos documentos: el primero por $875,000 que vence el 21 de junio y el segundo por 1.18 millones con vencimiento al 1 de octubre. ¿Qué día se consiguió el crédito suponiendo que se hizo por $1'946,710 con intereses del 9.36% anual capitalizable por días?

b) Si los dos pagos se reemplazan por 20 mensualidades que crecen en 3.2% cada 4, ¿de cuánto será cada una si la primera se hace el 21 de junio?

c) ¿Cuánto dinero costó a la maquiladora el haber cambiado el plan de amortización?

solución

a) El diagrama de la figura 6.3, donde las entidades están en millones de unidades monetarias, nos auxilia; C es el préstamo.

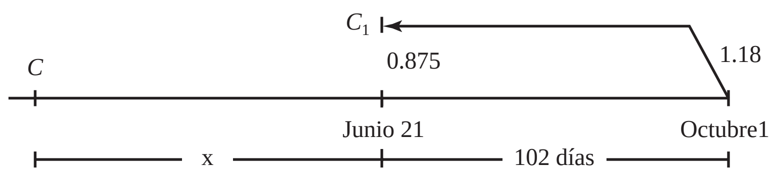


FIGURA 6.3

El valor presente de los 1.18 millones al 21 de junio es:

$$C_1 = 1.18(1 + 0.0936/360)^{-102} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$
$$C_1 = 1.18(0.9738319214)$$
o $$C_1 = 1.14912167$$

y al sumarlo con el primer pago arroja el monto

$$M_A = 1.14912167 + 0.875$$
o $$M_A = 2.02412167 \text{ millones de pesos}$$

que deberá ser igual al valor futuro del crédito C, x días después, y por eso:

$$2.02412167 = 1.94671(1.00026)^x \qquad 0.936/360 = 0.00026$$

de donde

$$(1.00026)^x = 2.02412167/1.94671$$
$$(1.00026)^x = 1.039765384$$

Ecuación que se resuelve tomando logaritmos naturales a los 2 lados, los dos positivos.

$$Ln(1.00026)^x = Ln(1.039765384)$$
$$x = Ln(1.039765384)/Ln(1.00026) \qquad Ln(M^n) = nLn(M)$$
$$x = 150.0006328$$

o sea, 150 días, que se cumplen el 22 de enero: este día se logró el crédito.

b) Para obtener el valor de los primeros pagos mensuales y con ellos, el valor de todos los demás, tenemos 5 bloques de 4 cada uno como se aprecia en la figura 6.4, donde también se ve que el primero está en la fecha donde se encuentran los 2.02412167 millones que absorben, digámoslo así, los dos pagos originales.

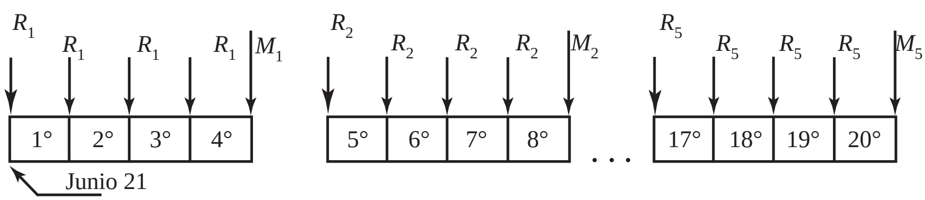


FIGURA 6.4

La tasa de interés capitalizable por mes es i de la siguiente ecuación:

$$(1 + i/12)^{12} = (1 + 0.0936/360)^{360}$$
$$1 + i/12 = (1.00026)^{30} \qquad \text{o} \qquad 1 + i/12 = 1.007829477$$

El valor futuro M_1 de los primeros 4 pagos R_1 es:

$$M_1 = R_1(1.007829477)\left(\frac{(1.007829477)^4 - 1}{0.007829477}\right) \qquad M = R_1\ (1 + i/p)\left(\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)$$

$$M_1 = R_1(1.007829477)(4.047222567 = R_1(k), \qquad k = 4.078910203$$

Para el segundo monto lo que cambia es la renta porque ahora es:

$$R_2 = R_1 + 0.032R_1 \quad \text{o} \quad R_2 = (1.032)R_1 \text{ y, por lo tanto}$$
$$M_2 = \mathrm{R}_1(1.032)k, \text{ ya que } k \text{ es invariable.}$$

Confirmando de igual manera, se verá que el monto del último bloque de renta es

$M_5 = R_1(1.032)^4(k)$, ya que la renta mensual ha tenido 4 incrementos del 3.2%.

Estos cinco montos forman una anualidad de rentas que varían aritméticamente y, por ello, la primera renta se evalúa con la fórmula del teorema 6.4, pero antes se obtiene la tasa de interés capitalizable por cuatrimestre equivalente al 0.0936 nominal diario.

$$(1 + i/3)^3 = (1 + 0.0936)^{360} \qquad \text{o} \qquad 1 + i/3 = 1.031687638$$

$$C = \frac{R_1(k)}{0.032 - 0.031687638}\left[\left(\frac{1.032}{1.031687638}\right)^5 - 1\right] = 2.02412167$$

Porque este capital C, según se aprecia en la figura 6.4, se localiza donde están los 2.02412167 millones que equivalen a los dos pagos originales. Entonces,

$$R_1(k/0.000312362)(1.001514757 - 1) = 2.02412167$$
$$R_1(k)(3'201,413744)(0.001514757) = 2.02412167$$

de donde $R_1 = 2.02412167/19.7801198$

$$R_1 = 0.102331113 \text{ millones} \qquad \text{o} \qquad R_1 = \$102,331.11$$

Las cuatro rentas del segundo bloque son un 3.2% más grandes.

$$R_2 = R_1(1.032) \qquad \text{o} \qquad R_2 = \$105,605.71 \text{ y así sucesivamente}$$

c) Para evaluar el costo para la maquiladora por haber cambiando el plan de pagos, debe hallarse los intereses en los dos planes. En el primero, los intereses son la diferencia entre lo que se iba a pagar y el valor presente del crédito, esto es

$$I_1 = 875,000 + 1'180,000 - 1'946,710 \qquad \text{o} \qquad I_1 = \$108,290.00$$

El monto de las 20 rentas que crecen forman una progresión geométrica, donde los términos crecen de 4 en 4, y por eso estará dado por

$$M = 4(M_A), \text{ donde } M_A = R_1 + R_2 + \ldots + R_5$$

$$M_A = 102,331.11\left(\frac{1-(1.032)^5}{1-1.032}\right) \qquad S = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$M_A = 102,331.11(5.330404875) \qquad \text{o} \qquad M_A = 545,466.2476$$

$$\text{y } M = 4(545,466.2476) \text{ o } M = 2'181,864.99$$

y los interés son, por tanto,

$$I_2 = 2'181,864.99 - 1'946,710 \qquad \text{o} \qquad I_2 = 235,\ 154.99$$

El costo para la maquiladora es entonces

$$\text{Costo} = 235,154.99 - 108,\ 290.00 \qquad \text{o} \qquad \$126,864.99$$

Amortización de un crédito de una institución

Un ejemplo de créditos que se amortizan con pagos que crecen aritméticamente en bloques son los que algunas instituciones otorgan a los trabajadores, ya que los pagos periódicos, mensuales o quincenales, dependen del salario mínimo y éste se incrementa cada año.

Si bien para tener derecho a esta clase de crédito, el trabajador debe acumular un cierto número de puntos, o número de semanas que cotiza en el Instituto, en el ejemplo siguiente se considera que los pagos se realizan a partir de que se otorga tal financiamiento, y se procede como en el ejemplo anterior, con montos parciales de rentas vencidas.

Ejemplo 8

¿De cuánto es un crédito de alguna institución que se amortiza en 15 años con pagos quincenales que crecen 5.3% cada año? Suponga cargos o intereses del 6.96% anual capitalizable por quincena y el primero es por \$870.

solución

El monto acumulado de los primeros 24 pagos vencidos al final del primer año es:

$$M_1 = 870\left(\frac{(1+0.0696/24)^{24}-1}{0.0696/24}\right) \qquad M = R_1\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

$$M_1 = 870(24.81768414) \qquad \text{o} \qquad M_1 = 870(k),\ k = 24.81768414$$

donde

ya que se trata del monto de una anualidad vencida. ¿Por qué?

El monto acumulado al final del segundo grupo de pagos, al final del segundo año, porque ahora la renta es $R_2 = R_1(1.053)$, y la constante k no cambia es:

$$M_2 = R_1(1.053)(k)$$

Se continúa hasta el último grupo, el que corresponde al 15º año, y resulta que ahora el monto es

$$M_{15} = R_1(1.053)^{14}(k) \qquad a_n = a_1 r^{n-1}$$

Note que el valor de k no cambia porque todos los bloques tienen el mismo número de abonos.

Los 15 montos parciales constituyen una anualidad con rentas que crecen $f = 0.053$ sucesivamente. Para el capital, es decir, para el valor del crédito, en la ecuación 6.4 se sustituye la tasa de interés anual capitalizable por año, que es la tasa efectiva equivalente al 6.96% capitalizable por quincena.

$$e = (1 + 0.0696/24)^{24} - 1 \qquad e = (1 + i/p)^p - 1$$

o $\quad e = 0.071971284 \quad$ o $\quad 7.1971284\%$

También,

$n = 15$, el plazo en años

$p = 1$, la frecuencia de montos, anuales, y

$R_1' = 870(k) \qquad R_1' = M_1$, la primera renta anual

Entonces,

$$C = \frac{870(k)}{0.053 - 0.071971284}\left[\left(\frac{1.053}{1.071971284}\right)^{15} - 1\right]$$

$$C = 45{,}858.78321(k)(-0.234970304)$$

o $$C = 267{,}421.7704 \text{ ya que } k = 24.81768414$$

Quiere decir que el crédito que se amortiza en las condiciones dadas es de $267,421.77.

Ejemplo 9

Cuadro de amortización de renta variable en grupos, intereses

Se compra una casa de $1’750,000 con un anticipo del 25% que se liquida, junto con los gastos fijos, con $127,500 el día de la firma del contrato y 12 mensualidades fijas de $35,000 cada una.

El resto se amortiza con 48 rentas mensuales que crecen 4.8% cada semestre, haciendo la primera después de pagar el anticipo, es decir, al final del mes 13. Suponiendo cargos o intereses del 13.8% anual capitalizable por mes, determine:

a) El capital que se paga por los gastos fijos.
b) El tamaño de las 48 rentas.
c) El cargo total por concepto de intereses.
d) El cuadro de amortización de las 48 rentas variables en sus primeros renglones y el último.

solución

a) Para saber de cuánto fueron los gastos fijos, note que al sumarlos con el anticipo resulta

$$\text{GASTOS FIJOS} + \text{ANTICIPO} = 127{,}500 + C$$

donde C es el valor presente de las 12 mensualidades de $35,000.

$$C = 35{,}000\left[\frac{1-(1+0.138/12)^{-12}}{0.138/12}\right] \qquad C = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

$$C = 35{,}000(11.14913698)$$

o $$C = \$390{,}219.7943$$

El anticipo es igual al 25% del precio de la casa:

$$0.25(1’750{,}000) = 437{,}500$$

Entonces,

$$\text{GASTOS} + 437{,}500 = 127{,}500 + 390{,}219.79$$

de donde los gastos fijos son:

$$517{,}719.79 - 437{,}500 = \$80{,}219.79$$

b) Las 48 rentas vencidas se distribuyen en 8 bloques de 6 cada uno, y por eso se obtienen 8 montos parciales vencidos que crecen de forma geométrica, el primero de los cuales es:

$$M_1 = R_1\left(\frac{(1.0115)^6 - 1}{0.0115}\right) \qquad M = R\left(\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)$$

$$M_1 = R_1(6.175167913)$$

o $$M_1 = R_1(k), \text{ donde } k = 6.175167913$$

Para el monto del segundo grupo de abonos sólo cambia la renta $R_2 = R_1 + 0.048R_1$ o $R_2 = (1.048)R_1$ y, por ello, $M_2 = (1.048)R_1(k)$, ya que k no cambia al no cambiar el número de rentas iguales en cada grupo.

En consecuencia los 8 montos al final de cada semestre forman una anualidad de rentas vencidas que crecen 4.8% de forma sucesiva y su valor presente, al inicio del mes 13, se evalúa con la ecuación del teorema 6.4, pero antes es necesario obtener la tasa equivalente compuesta por semestre:

$$(1 + i/2)^2 = (1 + 0.138/12)^{12}$$

$$1 + i/2 = (1.0115)^6 \quad \text{o} \quad 1 + i/2 = 1.071014431$$

El valor presente de las 8 rentas, es decir, de los 8 montos es, entonces:

$$C = \frac{M_1}{0.048 - 0.071014431}\left[\left(\frac{1.048}{1.071014431}\right)^8 - 1\right] \text{ porque } C = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right]$$

$$C = M_1(-43.4509982)(-0.159519426)$$

$$C = 6.931278292(R_1)(6.175167913) \qquad M_1 = R_1(k)$$

o $C = 42.8018073R_1$

Este capital debe ser igual al valor futuro, 12 meses después de la fecha inicial, del valor del crédito que fue del 75% del precio.

$$M = (0.75)(1'750,000)(1.0115)^{12} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

o $$M = 1'505,531.885$$

entonces,

$$42.8018073R_1 = 1'505,531.885 \qquad C = M$$

de donde

$$R_1 = 1'505,531.885/42.8018073 \quad \text{o} \quad R_1 = \$35,174.49$$

c) Los intereses son la diferencia entre el total que se paga y el precio de la casa, incluyendo los gastos fijos.

Lo que se paga por las 12 rentas fijas es:

$$M_1 = 12(35,000) \quad \text{o} \quad M_1 = \$420,000$$

y las 48 rentas variables forman una serie geométrica, cuya razón es 1.048; entonces, la suma es la siguiente que se multiplica por 6 porque cada grupo tiene 6 rentas mensuales:

$$M_2 = 35{,}174.49\left(\frac{1-(1.048)^8}{1-1.048}\right)(6) \qquad S = a_1\ \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$M_2 = 35{,}174.49(9.481069938)(6)$$

o $$M_2 = 2'000{,}950.987$$

El total que se paga es, entonces:

$$M = M_1 + M_2 + 127{,}500$$

o $$M = \$2'548{,}450.99$$

Y el capital es:

$$C = 1'750{,}000 + 80{,}219.79$$

o $$C = \$1'830{,}219.79$$

Los intereses son, por lo tanto:

$$I = 2'548{,}450.99 - 1'830{,}219.79$$

o $$C = \$718{,}231.20$$

d) El cuadro de amortización se inicia con el valor presente de las 48 rentas, como primer saldo insoluto en la última columna.

Periodo	Renta (*R*)	Intereses (*I*)	Amortización (*A*)	Saldo insoluto (*S*)
0	–	–	–	1'505,531.88
1	35,174.49	17,313.62	17,860.87	1'487,671.01
2	35,174.49	17,108.22	18,066.27	1'469,604.73
3	35,174.49	16,900.45	18,274.04	1'451,330.70
4	35,174.49	16,690.30	18,484.19	1'432,846.51
5	35,174.49	16,477.73	18,696.76	1'414,149.76
6	35,174.49	16,262.72	18,911.77	1'395,237.99
7	36,862.87	16,045.24	20,817.63	1'374,420.36
⋮				
47				(*x*)48,282.63
48	48,837,88	555.25	(*x*)48,282.63	0

Para las primeras filas de este cuadro vea la sección 6.3 y para los últimos recuerde que la última amortización *x*, debe ser igual al penúltimo saldo insoluto, y la suma de tal amortización y los intereses es igual a la última renta R_{48} que resulta ser:

$$R_{48} = 35{,}174.49(1.048)^7 \text{ porque hubo 7 incrementos}$$

$$R_{48} = 35{,}174.49(1.388445952) \quad \text{o} \quad R_{48} = 48{,}837.88$$

Entonces,

$$x + (0.0115)x = 48{,}837.88$$
$$(1.0115)x = 48{,}837.88$$

de donde

$$x = 48{,}837.88/1.0115$$

o

$$x = \$48{,}282.63$$

y los intereses son $0.0115x = 555.25$, que se escriben en la última fila.

Ejercicios 6.6

1. Suponiendo que el dinero en un banco reditúa el 10.5% efectivo, diga qué es más conveniente para el comprador de una Pick Up, cuyo precio es de $216,000:

a) Pagar al contado con un descuento del 8%.

b) Pagar 24 mensualidades “congeladas” de $10,000.

c) Efectuar 18 pagos mensuales que crecen $300, de los cuales el primero es por $10,750.

d) Cubrir un anticipo del 40% y 20 abonos bimestrales que se reducen $100 sucesivamente, siendo el primero por $8,500.

2. El Centro de Estudios del Occidente compra mobiliario, cuyo precio es de $144,000 y lo paga con 10 abonos mensuales que crecen 5%. Considerando una tasa de interés del 8.76% convertible mensualmente, obtenga:

a) La magnitud de los pagos.

b) El capital con el que se liquida el total que se debe, al efectuar el séptimo pago.

c) El cuadro de amortización.

d) El total que se paga por intereses.

3. ¿De cuánto es un crédito que se amortiza con 20 pagos bimestrales de $16,750 con intereses del 15.3% nominal bimestral, seguidos de 18 mensualidades que crecen 3.6% cada mes, y el primero de éstos es por $12,500?

4. Resuelva el problema 3 considerando que las mensualidades crecen $350 cada trimestre.

5. Para comprar una casa el contador Avilés traspasa el departamento que está pagando, luego de hacer el abono número 25. ¿Cuánto debe pedir si el precio de contado fue de $425,00 más $53,000 de gastos no financiados, de escrituración, apertura de crédito, etcétera? Suponga que el plazo es de 4 años, los cargos son del 12.9% anual capitalizable por mes, los abonos son mensuales y el precio del departamento aumenta 1.8% cada bimestre, por la inflación y otros factores.

6. Resuelva el problema 5 considerando que la amortización es constante.

7. Para instalar un nuevo laboratorio de computación, el Instituto del Noroeste consigue un crédito de 1.85 millones de dólares que amortiza gradualmente con intereses del 13.8% nominal mensual, con un periodo de gracia de 3 años. ¿De cuánto es cada uno de los 25 pagos mensuales?

8. ¿De cuánto serían los primeros 3 abonos mensuales que amortizan de manera constante el crédito del problema 10?

9. Para aumentar su producción, una fábrica de zapatos obtiene un crédito por $675,000 que amortizará con 21 mensualidades, que crecen 3% cada trimestre con cargos del 11.4% anual capitalizable por trimestre. ¿Cuánto dinero paga por concepto de intereses? ¿Con cuánto liquida su deuda al efectuar el pago número 12?

10. La promotora VyP ofrece casas con el 20% de anticipo que incluye un apartado de $10,000 y mensualidades que crecen 5.1% cada año, la primera de las cuales es de $7,250. ¿Cuál es el precio de una vivienda, si el plazo es de 8 años y se cargan intereses del 1.3% mensual capitalizable por mes?

11. Obtenga las primeras 6 mensualidades en el problema 10, considerando que en ese plazo se amortiza gradualmente el anticipo de manera simultánea con el resto.

12. Para estudiar un posgrado de 8 cuatrimestres el licenciado Uribe deposita $8,500 al inicio de cada mes, durante dos años antes de comenzar el posgrado. ¿De cuánto dispondrá al inicio de cada periodo cuatrimestral, si la cuota se incrementa 2.5% cada cuatrimestre y le bonifican el 9.6% de interés anual capitalizable por mes?

13. En el problema 12, ¿cuánto debe depositar cada mes el licenciado Uribe si la cuota cuatrimestral se incrementa 1.8% y al comenzar sus ahorros fue de $35,000.

14. El 5 de mayo la Empacadora de Carnes del Norte consigue un préstamo endosando dos documentos que vencen el 23 de julio y el 10 de noviembre, con valor nominal de $65,000 y $128,000, respectivamente. Poco antes del primer pago acuerdan con sus acreedores liquidar sus compromisos con 12 mensualidades que crecen 2.1% cada cuatrimestre, haciendo la primera el mismo 23 de julio. Considerando intereses del 13.92% nominal mensual, determine:

a) El capital que recibió en préstamo.

b) El tamaño de las rentas mensuales.

c) El costo en intereses por haber cambiado el plan de financiamiento.

15. Elabore el cuadro de amortización en el problema 14.

16. ¿Por cuánto dinero consiguió un crédito de una institución el profesor Delgado, si lo amortiza con abonos quincenales e intereses del 6.09% anual capitalizable por quincena, en 15 años de plazo? El primer pago fue por $1,150 y crecen 5.1% cada año.

17. ¿Cuánto pagará el profesor del problema 16 por concepto de intereses?

18. Seis años antes de comenzar los estudios profesionales de su primogénito, un padre de familia deposita $60,000 en una cuenta que le bonifica el 7.92% nominal mensual. ¿Cuánto debe invertir dos años después del primer depósito, si se sabe que la cuota semestral por la colegiatura al hacer el primer depósito es de $35,000, aumenta 5.4% cada año y el pago se realiza al comenzar cada uno de los 9 semestres de la carrera.

19. Para ampliar sus instalaciones, la compañía Maderas y Derivados, S.A., adquiere un crédito bancario por $1'200,000 que amortiza con abonos bimestrales que crecen 4% cada semestre. ¿Cuánto pagará por bimestre, si el plazo es de dos años y les cargan intereses del 15.6% convertible bimestralmente?

En los problemas del 20 al 34 seleccione la opción correcta, justificando la elección.

20. ¿Cuántos pagos semanales se necesitan para amortizar una deuda de $100,000, si crecen 3% sucesivamente, se cargan intereses del 13% nominal semanal, y el primero por $3,500 se realiza 3 meses después de lograr el préstamo?

a) 21 de $3,505.03 *b*) 22 de $3,482.47 *c*) 23 de $3,325.32

d) 20 de $3,622.41 *e*) Otra

21. El 30% de precio de un terreno de $672,000 se amortiza con 15 rentas mensuales fijas, haciendo la primera el día de la compra. Para el 70% restante se hacen 48 pagos mensuales que crecen 5.7% cada semestre, comenzando un mes después del último pago del anticipo. ¿De cuánto es cada pago que amortiza el anticipo, si los intereses son del 16.5% efectivo?

a) $13,896.43 *b*) $14,670.10 *c*) $15,010.04 *d*) $15,683.00 *e*) Otra

22. En el problema 21, ¿de cuánto es la primera renta variable que amortiza el 70% restante, si los intereses para estos pagos son del 8.82% nominal mensual?

a) $8,629.35 *b*) $10,963.41 *c*) $12,629.03 *d*) $9,019.46 *e*) Otra

23. ¿A cuánto ascienden los derechos adquiridos por el deudor, 1.5 años después de realizar el primer abono variable en la amortización del terreno del problema 21?

a) $295,653.48 *b*) $306,429.03 *c*) $323,496.35 *d*) $312,825.37 *e*) Otra

24. Una inversión de $225,000 al 6.02% nominal trimestrales se recupera en 5 años con rentas trimestrales anticipadas que crecen 8.5% cada año. Determine el tamaño de las rentas en el último trimestre.

a) $13,282.15 *b*) $15,621.32 *c*) $13,429.61 *d*) $14,425.42 *e*) Otra

25. Haga el cuadro de amortización, es decir, la recuperación de la inversión del problema 24 y diga cuánto se tiene luego de la séptima renta.

a) $177,125.82 *b*) $180,095.31 *c*) $180,923.40 *d*) $178,429.35 *e*) Otra

26. La compañía aceitera Las Juntas contrata un crédito y lo amortiza con rentas mensuales de $75,000, durante 3 años a una tasa del 132% convertible mensualmente. Las ventas mejoran y deciden incrementar sus pagos 5.2% cada trimestre, a partir del décimo pago. ¿En cuánto tiempo lo amortiza?

a) 29 meses *b*) 28 meses *c*) 27 meses *d*) 25 meses *e*) Otra

27. En el problema 26, ¿por qué cantidad se contrató el crédito?

a) $1'928.521.35 *b*) $2'219,567.61 *c*) $2'125,428.62 *d*) $1'873,402.55 *e*) Otra

28. La promotora Desarrollo Turístico del Pacífico ofrece en venta 25 departamentos de tiempo compartido. Pide un anticipo del 35% y abonos mensuales que crecen 3.25% cada semestre durante 3.5 años, siendo el primero por $1,825. ¿Cuál es el valor presente de sus ingresos totales si cada cliente tiene derecho a 2 semanas por año, y el dinero reditúa el 11.76% de interés anual capitalizable por mes?

a) $43’395,421.05 *b*) $50’963,098.36 *c*) $54’634,556.77

d) $52’873.840.00 *e*) Otra

29. La profesora Hortensia compra un departamento con un anticipo del 30% y 60 mensualidades que crecen 4.3% cada semestre. ¿De cuánto son las primeras si se cargan intereses del 13.44% compuesto por mes y el precio fue de $365,000?

a) $3,587.89 *b*) $4,093.48 *c*) $4,163.41 *d*) $3,931.98 *e*) Otra

30. Haga el cuadro de amortización del problema 29 y determine de cuánto son los derechos adquiridos por la profesora, luego de hacer el pago 13.

a) $120,880.90 *b*) $132,421.03 *c*) $122,429.33 *d*) $128,395.42 *e*) Otra

31. ¿Cuántas disposiciones quincenales pueden hacerse si se depositan $585,000 con intereses del 9.84% nominal quincenal, la primera es por $4,098 y crecen 2.1% cada trimestre?

a) 125 *b*) 143 *c*) 131 *d*) 120 *e*) Otra

32. ¿Cuánto debe invertirse al 10.5% nominal bimestral, para realizar 16 disposiciones bimestrales que crecen $125 de manera sucesiva y la primera es por $5,650?

a) $96,475.88 *b*) $102,421.36 *c*) $95,423.72 *d*) $90,602.71 *e*) Otra

33. ¿Cuánto se devenga por concepto de intereses en el problema 32?

a) $15,429.61 *b*) $16,029.32 *c*) $16,473.91 *d*) $14,797.29 *e*) Otra

34. ¿Cuál es el monto que se tiene luego de hacer la disposición 12 en el problema 32?

a) $32,429.35 *b*) $30,417.98 *c*) $33,175.16 *d*) $31,788.29 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Definir y explicar el concepto de amortización de créditos.
- Distinguir y expresar las características de los principales sistemas para amortizar créditos.
- Establecer la diferencia fundamental entre abono y amortización.

- Calcular la *renta,* el *plazo,* el *valor presente* y los *intereses* en amortizaciones de renta fija con la fórmula

$$C = R\left(\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right)$$

- Obtener el plazo, la renta, el valor presente y los intereses en deudas con amortización constante con las fórmulas

$$R_1 = A(1 + ni) \text{ y } R_N = R_1 - (N - 1)d$$

donde $A = C/np$ y $d = A(i/p)$

Y los intereses con la fórmula

$$I = (Ci/2p)(np + 1)$$

- Encontrar el *plazo*, la *renta* el *valor presente* y los *intereses* en las amortizaciones de renta variable:

a) Aritméticamente, con las fórmulas

$$C = T\,(R_1) + V(d) \quad \text{donde} \quad T = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

y $$V = \frac{1-(1+np(i/p))(1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$$

b) Geométricamente, con la fórmula

$$C = \frac{R_1}{f-i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right]$$

- Determinar el *saldo insoluto* de un crédito en cualquier periodo de la amortización, de renta fija o variable, de un crédito.
- Hacer el cálculo de los derechos transferidos al deudor sobre el bien que se amortiza.
- Calcular el monto con el que se transfiere o se traspasa un bien inmueble que se está amortizando, considerando el efecto inflacionario.
- Elaborar el *cuadro de amortización* de un crédito con renta fija o renta variable.

Conceptos importantes

Amortización constante
Amortización de renta variable
Amortización de un crédito
Amortización gradual, de renta fija
Cuadro de amortización
Derechos transferidos al deudor en la amortización de una deuda
Renta, plazo, valor presente y tasa de interés en la amortización de créditos amortización e intereses en cada abono
Saldo insoluto en la amortización de un crédito

Problemas propuestos para exámenes

En los problemas 1 al 11 conteste verdadero o falso.

l. El abono y la amortización son conceptos iguales. ___________________

2. En la amortización constante los abonos decrecen con el tiempo. _____________________

3. Si un crédito se amortiza gradualmente, los abonos son constantes. ____________________

4. Si la renta es fija, entonces la amortización es gradual. _____________________

5. La suma de los intereses y la amortización en cada pago es igual a la renta. ______________

6. En la amortización gradual, el primer abono debe ser siempre mayor que los intereses. _______________________

7. Los derechos transferidos al deudor y el saldo insoluto son numéricamente iguales. _______________________

8. En la amortización de renta variable, el primer abono es menor que los intereses del primer periodo. _______________________

9. En la amortización de renta fija, las amortizaciones crecen con el tiempo. __________________

10. En la amortización de un crédito, la renta puede crecer, reducirse o ser fija. _________________

11. En amortizaciones de renta variable, el primer abono debe ser mayor que los intereses del primer periodo. _________________________

En los problemas 12 a 24 complete la frase según corresponda.

12. El pago mínimo para amortizar gradualmente un crédito está dado por__________________.

13. Amortizar un crédito es_______________.

14. La amortización gradual se caracteriza por______________________.

15. La característica del sistema de amortización constante es __________________.

16. El saldo insoluto se conoce también como _____________________.

17. La diferencia entre el saldo insoluto y el crédito original se conoce como_________________.

18. Los derechos transferidos al deudor son útiles para _______________________.

19. Hacer un cuadro de amortización es útil para ____________________.

20. Las amortizaciones de renta variable se caracterizan porque ____________________.

21. El enésimo pago para amortizar constantemente un crédito está dado por _________________.

22. El capital necesario al comenzar el plazo, para disponer de *np* rentas que varían geométricamente está dado por _____________________.

23. El capital y la primera renta en el sistema de amortización de renta variable aritméticamente se relacionan con la ecuación ___________________.

24. Los derechos transferidos al deudor luego de hacer un pago sirven para ________________.

25. ¿Qué característica tiene el sistema de amortización constante?

26. ¿Cómo se determina el pago mínimo en la amortización gradual?

27. ¿De cuánto es el pago mínimo mensual para amortizar gradualmente un crédito de $80,000 con intereses del 11.4% compuesto por mes?

28. ¿Calcule la cantidad de un crédito que se amortiza con 25 rentas quincenales de $3,250, con intereses del 9% anual compuesto por quincena?

29. ¿De cuánto es cada renta mensual que amortiza gradualmente un préstamo de $125,000 en 3 años, con cargos del 20.4% capitalizable mensualmente?

30. ¿Cuántos pagos bimestrales de $9,685 se necesitan para amortizar un crédito de $80,000, con intereses a una tasa del 10.5% nominal bimestral? ¿A cuánto ascienden los intereses?

31. Obtenga los pagos quincenales que se necesitan para amortizar constantemente un crédito de $47,000, considerando 4 meses de plazo e intereses del 12% capitalizable por quincena. Encuentre los intereses y haga el cuadro de amortización.

32. ¿Por qué cantidad es el crédito que se amortiza en 8 meses con rentas quincenales crecientes aritméticamente, si la primera es de $4,500, la última es de $6,375 y los intereses son a una tasa del 19.5% anual convertible quincenalmente?

33. Con cargos a una tasa de interés del 12.6% anual compuesto por mes, se amortiza en 2 años un crédito de $200,000. ¿De cuánto son los pagos mensuales si crecen sucesivamente un 3%? ¿Cuánto se paga por intereses?

34. Se compra una casa y se paga con un anticipo del 35% y un crédito a 5 años, a una tasa de interés del 12.96% capitalizable por mes. Suponiendo que crecen 0.9% cada mes, obtenga:

a) El cuadro de amortización en sus primeras 4 filas y la última. Los pagos son mensuales y el primero es de $7,000.

b) Los intereses que se devengan en total.

c) El saldo insoluto luego de hacer el abono 36.

d) Monto del traspaso del departamento, poco después de efectuar la mitad de los abonos, considerando que su valor haya aumentado con la inflación del 4.1% bimestral y que los gastos fijos fueron de $35,000.

35. ¿Cuánto debe depositarse cada mes en una cuenta que paga intereses a una tasa del 19% efectivo durante 2 años, para que durante los siguientes 4 se hagan retiros cuatrimestrales que crezcan al 12% cada año? Suponga que los depósitos y las disposiciones son anticipados y que la primera de éstas es por $38,000.

36. La entidad gubernamental encargada de los caminos y puentes federales hace una inversión al 18% anual capitalizable por trimestre, para disponer de retiros trimestrales que crecen 15% cada año durante 4 años. El primero será de $350,000 y se hará a 3 años de realizar la inversión. Determine el capital que invierte.

37. Elabore el cuadro de amortización en sus primeros renglones y el último, si un crédito se amortiza con 30 rentas bimestrales que crecen $150 sucesivamente. Suponga intereses del 18.72% nominal bimestral y el primer abono de $5,250.

38. Resuelva el problema 37, considerando que los abonos se incrementan 1.12% sucesivamente.

39. ¿Cuánto dinero se carga por intereses en el problema 37?

40. ¿Con cuánto abonos mensuales que crecen 0.7% de manera sucesiva se amortiza un crédito de $350,000, considerando que el primero es por $11,000 y los intereses son del 9.69% nominal mensual? Haga un ajuste a las rentas si es necesario.

41. El primer pago bimestral para amortizar un crédito con intereses del 13.8% nominal bimestral es de $5,450. ¿Por cuánto dinero fue el crédito si son 18 rentas y crecen $75 sucesivamente?

42. ¿Cuántos pagos se necesitan para amortizar el crédito del problema 41 considerando que crecen 1% de manera sucesiva? Haga un ajuste con un pago menor al final.

43. ¿Cuánto dinero recibió en un crédito la Importadora del Centro, si lo amortiza con pagos mensuales que crecen 3.5% cada cuatrimestre? Considere intereses del 11.4% nominal mensual, cuatro años de plazo y el primero de $16,750.

44. ¿Cuántos pagos quincenales que crecen 2% sucesivamente se necesitan para amortizar un crédito de $275,000, suponiendo intereses del 9.63% anual capitalizable por quincena y el primero es de $10,000?

45. ¿Cuál es el capital que se amortiza con 36 rentas mensuales que crecen $125 cada 6, si se cargan intereses del 12.3% anual convertible por mes y la primera es de $4,725?

46. ¿Por cuántos pesos son las primeras rentas bimestrales que amortizan un crédito de $375,000, con cargos del 14.16% nominal bimestral si crecen 1.3% una por cada una? Suponga que el plazo es de 4 años con un periodo de gracia de 8 meses.

47. La última renta mensual, de un total de 27 que amortizan un crédito, es por $8,125. ¿De cuánto es el crédito si se tienen cargos del 10.5% nominal mensual y crecen 0.2% sucesivamente? Obtenga los intereses.

Seleccione la opción correcta en los problemas del 48 al 59, justificando su elección.

48. ¿Cuánto debe invertirse ahora para disponer de 20 rentas mensuales que crecen $50, la primera es de $11,560 y los intereses son del 8.7% nominal mensual?

a) $223,088.90 *b*) $201,495.36 *c*) $198,962.41 *d*) $210,987.40 *e*) Otra

49. Resuelva el problema 48, considerando que las rentas crecen sucesivamente en 2%.

a) $302,425.05 *b*) $263,961.21 *c*) $259,352.17 *d*) $278,425.03 *e*) Otra

50. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago mensual 28 por $6,720, en la amortización gradual de un crédito con intereses del 11.3% anual, compuesto por mes, en un plazo de 4 años?

a) $121,981.34 *b*) $115,063.41 *c*) $118,322.82 *d*) $132,421.63 *e*) Otra

51. ¿De cuánto son dos pagos iguales que cancelan el resto de la deuda del problema 50, considerando que se hacen al final de los meses 15 y 26? Considere que se habían realizado los primeros 14.

a) $93,284.52 *b*) $96,421.04 *c*) $100,405.08 *d*) $103,347.67 *e*) Otra

52. En el problema 50, ¿de cuánto fue el ahorro por intereses, al sustituir los 34 pagos mensuales por solo 2 iguales?

a) $19,695.32 *b*) $20,428.71 *c*) $22,480.43 *d*) $21,784.64 *e*) Otra

53. ¿Cuántos pagos mensuales se requieren para amortizar un crédito de $118,240, considerando que crecen 1% sucesivamente, el primero es de $7,230 y los cargos son del 15.9% nominal mensual?

a) 15 *b*) 20 *c*) 16 *d*) 17 *e*) Otra

54. En el problema 53, ¿con cuánto se cancela la deuda al hacer el abono 11?

a) $60,029.35 *b*) $55,369.85 *c*) $58,048.21 *d*) $56,963.07 *e*) Otra

55. El señor Quintero consigue un crédito de $675,000, con intereses del 13.8% anual capitalizable por bimestre. ¿De cuánto es el primer abono bimestral si son 9 y crecen 1.5% sucesivamente?

a) $79,156.40 *b*) $60,875.23 *c*) $71,209.73 *d*) $72,429.61 *e*) Otra

56. ¿Cuánto paga por concepto de intereses el señor Quintero del problema 55?

a) $81,682.32 *b*) $78,921.43 *c*) $79,401.32 *d*) $80,923.28 *e*) Otra

57. Para ampliar sus instalaciones, Llantas y Servicios del Sur obtiene un crédito de $520,000 que amortiza con 30 mensualidades que se reducen sucesivamente en 0.8%, e intereses del 12.6% nominal mensual. ¿Por cuánto es el último abono?

a) $17,909.12 *b*) $18,323.33 *c*) $18,968.42 *d*) $20,121.83 *e*) Otra

58. ¿Cuánto debe invertirse en una cuenta que bonifica intereses del 12% efectivo, para disponer de 28 rentas mensuales que crecen 0.9% cada cuatrimestre? Suponga que la primera es por $7,625.

a) $256,321.03 *b*) $201,625.33 *c*) $210,116.49 *d*) $275,609.28 *e*) Otra

59. Resuelva el problema 58, suponiendo que los retiros crecen $120 de forma sucesiva.

a) $210,116.49 *b*) $256,321.03 *c*) $275,609.28 *d*) $224,580.75 *e*) Otra

Capítulo 7

Constitución de fondos

Contenido de la unidad

El material de este capítulo constituye otra interesante aplicación de las anualidades anticipadas relacionando una serie de rentas con su valor futuro al final del plazo.

Si todas las rentas son iguales, se utiliza la ecuación 5.1, pero si son variables se emplean las ecuaciones del capítulo anterior, ya sea que varíen aritmética o geométricamente, en todo caso se consideran al iniciar cada periodo.

7.1 Conceptos generales y definiciones

Puede suceder que al otorgar un préstamo, al acreedor por simple comodidad no le interese recibir su dinero en partes, sino el total equivalente al finalizar el plazo. De igual manera, al deudor puede serle difícil o imposible liquidarlo con un desembolso único al final, por lo que entonces tendrá la opción de realizar pagos parciales en una cuenta que por esa característica se denomina *fondo de amortización*.

Es evidente que se constituyen fondos con otros propósitos, como por ejemplo para la reposición de maquinaria y equipo que actualmente está en servicio, como prevención para los gastos de jubilación de un empleado, para la construcción y el mantenimiento de puentes y carreteras, para comprar a futuro un automóvil o cualquier otro bien, etcétera. Así, nos encontramos con fondos de jubilación, de ahorro, de investigación, vacacionales, etcétera, cuyo calificativo es acorde con el fin que se persigue al constituir el fondo.

Algunas ventajas de constituir un fondo para adquirir un bien:

- Al pagar de contado puede conseguirse un descuento considerable.
- Se elude el pago de altos intereses y cargos por comprar a crédito, aunque en la actualidad muchos comerciantes ofrecen sus artículos a crédito y supuestamente sin intereses, aunque lo más importante es que el deudor se acostumbra y adquiere el hábito del ahorro.
- La mayoría de las personas liquida sus obligaciones más fácilmente con abonos parciales que con un pago único al hacer la compra.

Definición 7.1

Fondo es la cantidad de dinero que se acumula con pagos periódicos devengando intereses para lograr un monto acumulado, previamente preestablecido generalmente.

Por supuesto que puede darse que el capital o depósito inicial al constituir el fondo, sea mayor que los subsecuentes, y también es posible que haya varias disposiciones creando un flujo de caja con entradas y salidas de capital. Asimismo, es cierto que cuando el fondo es para amortizar un crédito, la tasa de interés es independiente de la tasa con la que se consiguió el mismo.

7.2 Fondo de renta fija

Como se dijo antes, en esta clase de fondos se utiliza la ecuación para el monto de las anualidades anticipadas.

$$M = R(1 + i/p)\left[\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right] \qquad \text{Teorema 5.1}$$

Ejemplo 1

Monto acumulado en un fondo de ahorro

Para comprar un automóvil al terminar sus estudios, dentro de 3 años, un estudiante constituye un fondo de ahorro con depósitos quincenales de \$1,850 e intereses del 10.32% nominal quincenal. ¿Cuánto dinero faltará si sabe que el precio actual del pretendido automóvil es de \$135,000, mismo que se incrementará un 9% anual en promedio por efectos de la inflación y otros factores?

solución

Para el monto acumulado en el fondo durante 3 años, 72 rentas, se reemplazan en la ecuación 5.1.

$R = 1{,}850$, la renta quincenal.

$i = 0.1032$ la tasa nominal quincenal.

$n = 3$, el plazo en años.

$p = 24$, la frecuencia de conversión, además:

$i/p = 0.0043$ y $np = 72$, el número de rentas, entonces:

$$M = 1{,}850(1 + 0.1032/24)\left[\frac{(1.0043)^{72} - 1}{0.0043}\right]$$

$$M_1 = 1{,}850(1.0043)(84.18036233)$$

o $$M = \$156{,}403.33$$

El precio del automóvil con el incremento dado será de:

$$P = 135{,}000(1 + 0.09)^3$$

o $$P = \$174{,}828.92$$

la diferencia $P - M$ es lo que faltará para comprarlo:

$$174{,}828.92 - 156{,}403.33 = \$18{,}425.59$$

Ejemplo 2

¿Cuánto debe depositar cada trimestre el ingeniero Carlos Ignacio en un fondo de reposición de maquinaria de construcción pesada para acumular \$950,000 en 2.75 años? Suponga que se ganan intereses del 9.2% anual capitalizable por trimestre, y obtenga los intereses.

solución

a) La incógnita es R, que se obtiene al sustituir en la ecuación 5.1 los valores dados.

$$950{,}000 = R(1 + 0.092/4)\left[\frac{(1.023)^{11} - 1}{0.023}\right] \qquad C = R(1 + i/p)\left[\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right]$$

$$950{,}000 = R(1.023)(12.35643243)$$

de donde

$$R = 950{,}000/12.64063038$$

o $$R = \$75{,}154.48$$

b) Los intereses son la diferencia entre el monto y las 11 rentas

$$I = 950{,}000 - 11(75{,}154.48)$$

o $$I = \$123{,}300.72$$

Ejercicios 7.2

1. Explique qué son los fondos de renta fija y cómo se calculan sus elementos.
2. ¿De cuánto son los 25 abonos semanales en un fondo que reditúa intereses a una tasa del 13.36% compuesto por semana para acumular $32,000?
3. ¿Con cuántas rentas mensuales de $405 se acumulan $7,715.00 en un fondo que bonifica intereses del 15% anual capitalizable por mes?
4. ¿Cuántos depósitos quincenales de $1,665 se necesitan para acumular $63,000 en un fondo que genera intereses a una tasa del 11% efectivo?
5. Un empresario consigue un crédito de $1,665, que pagará al final de 2 años con intereses a una tasa del 12.6% nominal bimestral. Simultáneamente constituye un fondo de amortización en un banco que le reditúa el 9% de interés capitalizable por mes. Obtenga la renta mensual y los intereses del fondo.
6. Con el propósito de contar con $18,000 para comprar muebles para su casa, el matemático López crea un fondo de ahorro con abonos quincenales de $2,537. ¿Cuándo debe empezar si gana intereses a una tasa del 8.2% compuesto por quincena?
7. La señora Aguilar pone a disposición de una casa de empeño un televisor, por el que le prestan $1,500, incluyendo los intereses de 6 meses de plazo, ¿cuánto deberá depositar cada quincena en un fondo que le genera intereses a una tasa del 11.04% compuesto por quincena durante los 6 meses?
8. Para los gastos de su graduación dentro de 5 semestres, una estudiante de administración de empresas crea un fondo con rentas mensuales de $650. ¿Cuánto acumulará si empieza ahora y gana el 9.3% de interés nominal mensual?

9. Para ampliar su negocio, el señor González consigue un préstamo hipotecario de \$114,000, que incluye los intereses, a plazo de un año y medio. Al mismo tiempo, constituye un fondo de ahorro con depósitos bimestrales que devengan intereses a una tasa del 22% convertible bimestralmente, ¿de cuánto es cada uno?

10. La compañía Siderúrgica del Norte crea un fondo de jubilación con 15 rentas trimestrales de \$50,000, ganando intereses a una tasa del 8.28% compuesto por trimestre. ¿De qué monto dispondrá 5 años después de haber comenzado?

11. Para recuperar un pagaré con valor nominal de \$142,500, una mueblería crea un fondo con 9 pagos quincenales previos al vencimiento, con intereses a una tasa del 9.08%. ¿De cuánto es cada uno de los depósitos?

12. La concesionaria de una autopista crea un fondo con reservas bimestrales de 9.11 millones de dólares cada una, ganando intereses a una tasa del 6.96% compuesto por bimestre. ¿En cuánto tiempo iniciará un nuevo proyecto si se estima que requerirá de 150 millones de dólares?

13. Para instalar un laboratorio de computación, la facultad de economía de la universidad constituye un fondo con 8 rentas mensuales. ¿De cuánto es cada renta si necesitan \$120,000 y la tasa de interés es del 21.48% capitalizable por mes?

14. Con una duración de 22 meses, hoy se inician las obras de una línea de tren ligero en la ciudad. Para comprar los carros se crea, también hoy, un fondo de reservas cuyos depósitos mensuales son de \$115,000 cada uno, a una tasa de interés del 11.28% nominal mensual. ¿Cuánto se acumula en los 22 meses?

15. Para construir su nuevo estadio de béisbol, el Club Social y Recreativo necesita \$10’575,000 en 10 meses, contados a partir de ahora. Con tal fin, se constituye un fondo con depósitos mensuales desde ahora a una tasa de interés del 10.68% compuesto por mes. ¿De cuánto es la renta mensual?

16. Con depósitos bimestrales, una universidad crea un fondo de investigación a una tasa de interés del 18% nominal bimestral. ¿De cuánto tendrá que ser cada depósito si requiere \$242,500 dentro de un año y medio y después, de \$35,000 bimestrales por tiempo ilimitado?

17. La Compañía Papelera de Occidente pretende comprar dentro de 10 meses una guillotina que ahora cuesta \$38,500. Con ese fin, crea un fondo con depósitos bimestrales que devengan una tasa del 9% de interés anual compuesto por bimestre. ¿De cuánto es cada uno de los depósitos? Suponga que el precio aumenta con la inflación del 0.9% mensual en promedio.

18. Para construir un centro vacacional, la compañía Desarrollos Turísticos constituye un fondo con 15 rentas mensuales de 1.8 millones de dólares. ¿Cuánto acumula si devenga una tasa de interés del 7.2% nominal mensual?

En los problemas del 19 al 32, seleccionar la opción correcta, justificando la elección.

19. Para pagar un crédito de \$175,000 la compañía Refacciones y Servicios crea un fondo con depósitos mensuales que devengan intereses del 9.36% nominal mensual. ¿De cuánto es cada renta si en el préstamo se cargan intereses del 10.8% simple anual y el plazo es de 8 meses?

a) \$22,640.68 *b*) \$21,709.38 *c*) \$20,923.42 *d*) \$21,963.09 *e*) Otro

20. Para ayudar a los niños con cáncer, el Hospital de la ciudad constituye un fondo con $50,000, seguido de depósitos bimestrales anticipados, con el propósito de acumular $230,000 al final de tres años contados desde el primer depósito. ¿De cuánto es cada renta si se generan intereses del 7.5% anual capitalizable por bimestre?

a) $5,329.36 *b*) $4,928.61 *c*) $3,796.20 *d*) $4,168.28 *e*) Otro

21. ¿Cuántos depósitos quincenales de $3,250 deben hacerse en la primera parte del plazo para acumular $185,000 en un fondo con plazo de 3 años? Considere intereses del 10.2% anual capitalizable por quincena y haga un ajuste a las rentas redondeando al entero más cercano.

a) 45 de $3,329.63 *b*) 48 de $3,193.51 *c*) 46 de $3,255.03 *d*) 47 de $3,129.93 *e*) Otra

22. ¿Cuántos depósitos mensuales de $5,750 deben hacerse para acumular $123,000 en un fondo que bonifica intereses del 9.33% anual capitalizable por mes? Haga un ajuste a la renta redondeando al entero más próximo.

a) 37 de $4,165.33 *b*) 35 de $4,212.20 *c*) 34 de $4,401.35 *d*) 33 de $4,523.45 *e*) Otra

23. Para ayudar a los enfermos de escasos recursos económicos, el Centro Médico del Norte crea un fondo con un depósito inicial de $65,000 seguido de 13 bimestrales de $8,350, ¿de cuánto dinero dispondrá en el fondo 4 años después del depósito inicial si los intereses que se devengan son del 10.38% nominal bimestral?

a) $235,621.98 *b*) $214,412.57 *c*) $243,703.56 *d*) $229,385.09 *e*) Otra

24. Con $175,000, se constituye un fondo y luego se depositan en el mismo $15,000 cada trimestre, haciendo el primero 3 meses después de depositar los $175,000, ¿cuánto se tendrá en el fondo 4 años después de su creación, considerando que desde el final del vigésimo mes se realizan disposiciones mensuales de $13,250? Supóngase además que los intereses son del 8.4% anual capitalizable por mes.

a) $92,925.42 *b*) $100,550.76 *c*) $115,203.58 *d*) $97,421.38 *e*) Otra

25. ¿Cuánto se genera por concepto de intereses en el problema 24?

a) $60,929.35 *b*) $65,923.81 *c*) $70,623.08 *d*) $71,550.76 *e*) Otra

26. ¿De cuánto debe ser el depósito inicial seguido de 35 depósitos mensuales de $9,300, con intereses del 9.63% nominal mensual en el fondo que el Instituto de Investigación Psicológica constituye para disponer de $17,000 trimestrales por tiempo ilimitado a partir de los 5 años?

a) $150,833.08 *b*) $140,036.61 *c*) $165,329.35 *d*) $158,735.03 *e*) Otra

27. ¿Cuánto dinero se devenga por concepto de intereses en el fondo del problema 26 durante los 5 años?

a) $158,329.95 *b*) $224,157.13 *c*) $121,783.94 *d*) $205,963.90 *e*) Otra

28. ¿Cuánto dinero se tiene en el fondo del problema 26, 4 años después de que se constituyó?

a) $636,423.83 *b*) $595,428.71 *c*) $543,293.65 *d*) $624,875.41 *e*) Otra

29. Para ampliar la carretera que comunica a dos importantes ciudades del occidente del país, se constituye un fondo con pagos bimestrales de 3.2 millones de dólares, ¿cuánto dinero se tendrá en el fondo 2 años después del primer depósito suponiendo que se ganan intereses del 11.4% en el primer semestre y se incrementan en 1.2 puntos porcentuales por año cada semestre?

a) \$40'375,421.08 *b*) \$44'143,624.87 *c*) \$42'860,045.33 *d*) \$43'968,953.42 *e*) Otra

30. Para jubilar a sus empleados, la Universidad constituye un fondo de jubilación con un depósito inicial de un millón de dólares y \$350,000 cada mes con intereses del 11.70% anual capitalizable por mes. ¿Cuánto se tendrá en el fondo 10 años después del primer depósito?

a) \$81'964,031.36 *b*) \$78'760,245.94 *c*) \$80'925,723.61 *d*) \$83'760,819.32 *e*) Otra

31. ¿Cuántos depósitos mensuales de \$1'624,425 deberán hacerse en un fondo, para renovar el sistema de transporte colectivo de la ciudad en un plazo de 6 años, si se pretende un monto aproximado de 68 millones de dólares y se gana intereses del 9.6% nominal bimestral?

a) 29 *b*) 35 *c*) 39 *d*) 36 *e*) Otro

32. ¿Cuánto debe depositarse cada bimestre en un fondo educativo durante 6 años para disponer de \$175,000 cada cuatrimestre por tiempo ilimitado? Suponga que la primera disposición se realiza 9 años después del primer depósito, que ese día se tenían \$1'750,623.85 en el fondo, que los intereses en el primer trienio son del 8.49% anual capitalizable por bimestre y crecen 0.9 puntos porcentuales por año, cada 3 años, durante los 9 del plazo.

a) \$42,601.33 *b*) \$40,923.05 *c*) \$35,675.42 *d*) \$30,947.93 *e*) Otra

7.3 Cuadro de constitución de fondos

Como en la amortización de un crédito, en la constitución de fondos es útil hacer un cuadro donde se refleja la manera en que crece el monto y varían los intereses cada vez que se hace un depósito.

En los ejemplos siguientes se explica el procedimiento para hacer tal cuadro, comenzando con el caso más simple, cuando todos los depósitos y la frecuencia con que se realizan son iguales.

Ejemplo 1

Monto y cuadro en un fondo de ahorro

Para sus vacaciones dentro de 7 meses, un padre de familia crea un fondo de ahorro con depósitos mensuales de \$3,600. Halle el monto acumulado y haga el cuadro del fondo, considerando que la inversión reditúa el 8.28% de interés capitalizable por mes.

solución

Recuerde que al no especificar lo contrario, los depósitos se realizan al comenzar cada periodo y el monto se calcula con la ecuación 5.1 con:

$R = \$3{,}600$, la renta mensual
$i = 0.0828$, la tasa de interés anual compuesta por mes
$p = 12$, la frecuencia de conversión y de pagos
$np = 7$, el número de rentas
$i/p = 0.0828/12 = 0.0069$, la tasa por periodo, entonces

$$M = 3{,}600(1.0069)\left[\frac{(1.0069)^7 - 1}{0.0069}\right]$$

$$M = 3{,}600(1.0069)(7.146577826) \quad \text{o} \quad M = \$25{,}905.20$$

El cuadro es el siguiente, que es útil para comprobar los resultados y se inició anotando la renta mensual en todos los renglones de la segunda columna y en el primero de la tercera.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	3,600.00	3,600.00	24.84	3,624.84
2	3,600.00	7,224.84	49.85	7,274.69
3	3,600.00	10,874.69	75.04	10,949.73
4	3,600.00	14,549.73	100.39	14,650.12
5	3,600.00	18,250.12	125.93	18,376.05
6	3,600.00	21,976.05	151.63	22,127.68
7	3,600.00	25,727.68	177.52	25,905.20

Note que:
para hacer este cuadro:

- Los intereses del primer periodo son el resultado de multiplicar el capital, es decir, la primera renta, por la tasa de interés por periodo i/p

$$I_1 = 3{,}600.00(0.0069)$$

o $$I_1 = 24.84$$

- El monto al final de este primer periodo es la suma del capital más los intereses

$$M_1 = 3{,}600 + 24.84 \quad \text{o} \quad M_1 = 3{,}624.84$$

- Este monto se suma con la segunda renta, para obtener el segundo capital

$$C_2 = 3{,}624.84 + 3{,}600 \quad \text{o} \quad C_2 = 7{,}224.84$$

que se multiplica por la tasa de interés de un periodo, para obtener así los intereses del segundo renglón

$$I_2 = 7{,}224.84(0.0069) \quad \text{o} \quad I_2 = 49.85$$

- El monto al final del segundo periodo mensual es igual a la suma del capital más estos intereses.

$$M_2 = C_2 + I_2$$
$$M_2 = 7{,}224.84 + 49.85 = 7{,}274.69$$

Se continúa con este proceso hasta la terminación del cuadro, insistiendo en que el valor de la segunda columna es el capital al inicio del periodo, luego de hacer el depósito correspondiente, mientras que en la última columna está el monto al final del mismo periodo incluyendo los intereses.

Ejemplo 2

Renta bimestral y cuadro en un fondo de reservas

La Urbanizadora de Oriente, S. A., compra maquinaria con valor de 2.4 millones de dólares mediante un crédito bancario a una tasa de interés del 20% simple anual, que liquidará con un pago único a los 2 años. Simultáneamente constituye un fondo con reservas bimestrales que ganan una tasa del 18% de interés nominal bimestral. ¿De cuánto es cada una? Haga el cuadro del fondo en sus primeros tres renglones y el último.

solución

El monto acumulado en el fondo debe ser igual al valor futuro del crédito, el cual se obtiene con la fórmula del interés simple.

$$\text{M} = 2.4(1 + 2(0.20)) \qquad M = C\,(1 + ni)$$
$$M = 3.36 \text{ millones de dólares}$$

En la ecuación 5.1 se reemplazan, además:

$n = 2$, el plazo en años

$p = 6$, el número de pagos por año

$np = 12$, el total de pagos

$i = 0.18$, la tasa anual

$i/p = 0.18/6 = 0.03$, la tasa por bimestre

R es la incógnita; por lo tanto,

$$3.36 = R(1.03)\left(\frac{(1.03)^{12} - 1}{0.03}\right)$$
$$3.36 = R(1.03)(14.19202957)$$
$$3.36 = R(14.61779046)$$

de donde $R = 3.36/14.61779046$

$$R = 0.2298569 \text{ millones} \quad \text{o} \quad R = \$229{,}856.90$$

Con esta renta en todos los renglones de la segunda columna, se comienza el cuadro del fondo, cuyos primeros tres y último renglones son:

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	\$229,856.90	\$229,856.90	\$6,895.707	\$236,752.607
2	\$229,856.90	\$466,609.507	\$13,998.285	\$480,607.792
3	\$229,856.90	\$710,464.692	\$21,313.940	\$731,778.633
⋮				
11				
12	\$229,856.90	\$3’262,135.922	\$97,864.078	\$3’360,000.000

Para el último renglón, note que la suma del capital C y los intereses debe ser igual al último monto; esto es:

$$C + 0.03C = 3'360{,}000$$

de donde

$$C(1 + 0.03) = 3'360{,}000$$

$$C = 3'360{,}000/1.03 \quad \text{o} \quad C = \$3'262{,}135.922$$

y los intereses son:

$$I_{12} = 3'262{,}135.922(0.03) = \$97{,}864.078$$

que se anotan en la cuarta columna.

Ejercicios 7.3

1. ¿Qué usos tiene un cuadro de constitución de fondos?
2. Haga el cuadro del fondo en los problemas 2 y 17 de la sección 7.2 de ejercicios.
3. Para jubilar a 3 de sus empleados, la administración de la compañía Plásticos del Sureste, S. A., crea un fondo en una institución que le reditúa una tasa de interés del 13.5% efectivo. Halle la magnitud de los depósitos bimestrales, si pretende acumular \$175,000 en 2 años y haga el cuadro correspondiente.
4. ¿Cuánto debe depositar cada trimestre en un fondo una constructora que pretende tener \$1.5 millones de dólares en 2.5 años para reposición de maquinaria, suponiendo que gana un interés a una tasa del 17.6% anual compuesta por trimestre? Elabore el cuadro del fondo en sus primeros tres y último renglones.

5. Un empresario sabe que necesitará $800,000, 1.5 años después de hoy. ¿De cuánto es cada depósito mensual que deberá hacer desde ahora en un fondo que le dé a ganar el 21.6% convertible mensualmente? Haga el cuadro del fondo.

6. ¿Cuánto debe depositar cada quincena durante 8 meses en un fondo que le reditúa el 19.2% de interés compuesto por quincena un estudiante para disponer de $25,000 en su graduación al final de los 8 meses? Elabore el cuadro del fondo y obtenga el total de intereses.

7. ¿Cuántos depósitos mensuales de $65,230 deberá hacer una institución educativa para lograr un monto de $1'250,000 en un fondo de investigación que reditúa el 17% de interés efectivo? Haga el cuadro del fondo en sus primeros tres renglones y el último. ¿Cuánto dinero se tendrá en el fondo luego de hacer el decimoprimer depósito?

8. Elabore las primeras tres filas y la última del cuadro del fondo que se constituyó con depósitos trimestrales de $27,500 durante 3 años, devengando intereses a una tasa del 18.4% compuesto por trimestres.

9. La Embotelladora del Centro constituye un fondo de jubilación con depósitos mensuales de $25,000 en una institución que le bonifica el 9.54% nominal mensual, ¿de cuánto dinero puede disponer en el fondo 5 años después del primer pago? Haga un cuadro del fondo en sus primeras 3 filas y la última.

10. Para ampliar su planta de producción, la Empacadora de Carnes Frías crea un fondo con reservas mensuales de $65,000 e intereses del 8.76% anual capitalizable por mes. Haga el cuadro en sus tres primeros renglones y el último suponiendo que son 20 mensualidades.

11. ¿Cuánto dinero se acumula en un fondo, 8 años después de que un grupo de futbolistas profesionales crearon con $475,000, seguidos de 40 depósitos mensuales de $30,000 cada uno con intereses del 7.2% anual capitalizable por mes? Elabore el cuadro en sus primeras filas y la última.

Seleccione la opción correcta en los problemas del 12 al 26, justificando su elección.

12. Al continuar el cuadro del fondo del problema 11, se observa que el monto, después de 6 pagos, incluyendo el de apertura es de:

a) $641,398.35 *b*) $661,386.40 *c*) $645,080.26 *d*) $597,398.63 *e*) Otra

13. Los intereses que se generan en el sexto periodo en el fondo del problema 11, según el cuadro, son:

a) $4,625.33 *b*) $3,695.41 *c*) $3,847.40 *d*) $4,329.63 *e*) Otra

14. ¿De cuánto es el monto que se acumula con 35 depósitos mensuales, incluyendo el primero, en el fondo que se inicia con el siguiente cuadro, considerando que no cambian la tasa de interés ni los depósitos.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	72,000.00	72,000.00	577.80	72,577.80
2	9,500.00	82,077.80	658.67	82,736.47
3	9,500.00	92,236.47	740.20	92,976.67

a) $445,721.91 *b*) $456,901.32 *c*) $467,877.89 *d*) $501,791.01 *e*) Otra

15. El 25 de marzo de 2005 se crea un fondo de restitución de maquinaria obsoleta con $47,500, el 8 de junio siguiente se depositan otros $61,350 y a partir del 15 de agosto, 7 bimestrales de $18,300 cada uno, ¿cuánto se tendrá el 15 de enero de 2007 considerando intereses del 10.32% anual capitalizable por bimestre? Haga el cuadro del fondo y compruebe el resultado.

a) $338,429.18 *b*) $360,121.02 *c*) $315,961.36 *d*) $348,068.37 *e*) Otra

16. En el problema 15, ¿cuánto dinero se ganó por concepto de intereses?

a) $35,206.47 *b*) $34,709.21 *c*) $36,168.91 *d*) $31,479.19 *e*) Otra

17. El primer depósito quincenal de un total de 36, en un fondo de ahorro, es por $4,500 y los intereses que se generan en el primer periodo son de $26.0625, ¿cuál es el monto acumulado? Elabore el cuadro en sus primeros renglones y el último.

a) $180,590.50 *b*) $197,728.42 *c*) $185,961.42 *d*) $190,968.78 *e*) Otro

18. ¿Cuál es la tasa efectiva en el problema 17?

a) 15.7019% *b*) 16.4130% *c*) 15.0962% *d*) 14.8663% *e*) Otra

19. La Asociación de Locutores constituye un fondo para servicios médicos y hospitalarios, con depósitos semestrales de $150,000 y $45,000 en los meses intermedios. ¿De cuánto dispondrá al término de 5 años si le pagan intereses del 10.5% anual capitalizable por mes? Haga el cuadro en las primeras filas y la última.

a) $3’750,429.05 *b*) $4’820,923.21 *c*) $4’977,563.88 *d*) $4’536,098.83 *e*) Otra

20. Resuelva el problema 19 considerando que desde el vigésimo mes se realizan disposiciones trimestrales anticipadas de $53,000.

a) $3’725,496.03 *b*) $4’537,216.81 *c*) $4’219,159.36 *d*) $4’146,281.98 *e*) Otra

21. ¿Para pagar un crédito de $78,250 a final de un año y medio, el señor Rojas constituye un fondo de amortización con depósitos quincenales de $2,726, ¿cuántas quincenas antes debe comenzar si le bonifican intereses del 8.52% anual capitalizable por quincena? Considere que los cargos en el crédito son del 14.5% efectivo. Comience el cuadro del fondo con 3 filas.

a) 32 *b*) 33 *c*) 28 *d*) 35 *e*) Otra

22. Haga el cuadro del fondo, los primeros renglones y el último, que se constituye con un depósito inicial y 25 mensuales de $13,720 devengando intereses del 9.93% anual capitalizable por mes. Considere que se acumulan $450,000 al final de 2.5 años y obtenga el depósito de apertura.

a) $40,628.35 *b*) $41,786.05 *c*) $42,735.07 *d*) $42,129.86 *e*) Otra

23. ¿Cuántas aportaciones quincenales de $1,755 se necesitan para disponer al final de $56,000 aproximadamente en un fondo de jubilación que bonifica intereses del 15.12% nominal quincenal? Haga el cuadro del fondo en sus primeras filas.

a) 26 *b*) 30 *c*) 28 *d*) 29 *e*) Otra

24. La profesora Lorena consigue un préstamo y firma un documento con valor nominal de \$38,650. Simultáneamente crea un fondo de amortización con depósitos mensuales e intereses del 9% efectivo, ¿de cuánto es cada uno? Comience el cuadro correspondiente y suponga que el plazo es de un semestre.

a) \$6,281.30 *b*) \$7,326.35 *c*) \$6,429.61 *d*) \$7,058.73 *e*) Otra

25. La administración de Cajas y Empaques del Sur constituye un fondo de amortizaciones con reservas mensuales de \$30,800, ¿cuánto le faltará para liberar un documento de \$600,000 si le bonifican intereses del 8.46% nominal mensual? Escriba los primeros renglones y el último del cuadro del fondo, y suponga que el plazo es de 3 semestres.

a) \$15,600.00 *b*) \$6,942.95 *c*) \$10,368.35 *d*) \$8,960.00 *e*) Otra

26. ¿Cuánto gana por intereses la compañía del problema 25?

a) \$40,629.36 *b*) \$39,025.08 *c*) \$38,657.05 *d*) \$42,923.95 *e*) Otra

7.4 Fondos de renta variable

Estos fondos son más usuales cuando los índices inflacionarios son considerablemente altos, ya que la variación en las rentas se mantiene al ritmo de crecimiento o decrecimiento, del valor del dinero con el paso del tiempo.

De manera similar a las amortizaciones, las rentas varían aritméticamente, con una diferencia común o varían geométricamente, con una razón constante, aunque también es posible que varíen una por una o por grupos.

Variación aritmética

Para resolver esta clase de fondos, pueden emplearse las fórmulas del teorema 6.3 para la amortización de un crédito, notando que el crédito *C* es un capital que está al comenzar los *np* periodos del plazo, tal como se aprecia en la figura 7.1.

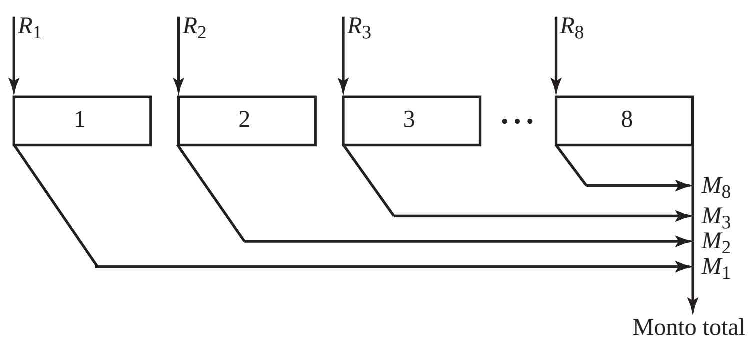


FIGURA 7.1

Si C se traslada hasta el final del periodo np con la fórmula del interés compuesto, se obtendrá el monto de una anualidad de rentas vencidas, ¿por qué?, y si se lleva hasta el final del periodo $np + 1$ se tendrá el monto de np rentas anticipadas. Este monto es entonces:

$$M = C(1 + i/p)^{np + 1}$$

Donde, según el teorema 6.3, C está dado por $C = TR_1 + Vd$

donde además $T = \dfrac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$ y $V = \dfrac{1-[1-np(i/p)](1+i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$

Con algunos pasos algebraicos, las leyes de exponentes principalmente, se comprueba que dicho monto estará dado por las ecuaciones del teorema siguiente:

Teorema 7.1

El monto M del fondo constituido con np pagos anticipados que varían con una diferencia común d está dado por

$$M = (1 + i/p)(A + B) \text{ donde}$$

$$A = R_1\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right)$$

$$B = d\left(\frac{(1+i/p)^{np}-1-(np)(i/p)}{(i/p)^2}\right)$$

además:

R_1 es el primer depósito en el fondo, i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año y n es el plazo en años.

Note que:

- Si las rentas son vencidas, este monto se anticipa un periodo dividiéndolo entre $(1 + i/p)$, es decir, que siendo así el monto será simplemente

$$M = A + B$$

- La fórmula para A en este teorema es semejante a la que se utiliza para hallar el valor acumulado de las anualidades ordinarias como si R_1 fuera la renta fija.
- También es cierto que el término $(np)(i/p)$ puede simplificarse como ni, pero por el contexto en este libro es más práctico no simplificarlo.

Ejemplo 1

Para construir y poner en servicio una nueva sucursal, la cadena de tiendas de autoservicio Vipart constituye un fondo con 8 rentas mensuales que crecen $200,000 cada una, siendo la primera por 2.5 millones de dólares, ganando intereses a una tasa del 12.9% anual capitalizable por mes, ¿cuánto acumula?

solución

Los valores a sustituir en las ecuaciones del teorema 7.1 son:

R_1 = 2.5 millones, la primera renta

n = 8/12, el plazo en años

p = 12, la frecuencia de conversión y de pagos

d = 0.2 millones, la diferencia entre los pagos.

Además; la tasa de interés anual es $i = 0.129$, la mensual es $i/p = 0.01075$ y el número de rentas $np = 8$

Entonces

$$A = 2.5\left[\frac{(1.01075)^8 - 1}{0.01075}\right] \qquad A = R_1\left[\frac{(1+ i/p)^{np} - 1}{i/p}\right]$$

$$A = 2.5(8.307559256) \quad \text{o} \quad A = 20.76889814$$

$$B = 0.2\left[\frac{(1.01075)^8 - 1 - (8)(0.01075)}{(0.01075)^2}\right] \quad B = d\left[\frac{(1+ i/p)^{np} - 1 - (np)(i/p)}{(i/p)^2}\right]$$

$$B = 0.2(28.61016333) \qquad \text{o} \qquad B = 5.722032666$$

Por lo tanto, el monto en el fondo es

$$M = (1.01075)(20.76889814 + 5.722032666)$$

$$M = 26.77570832 \qquad \text{o} \qquad \text{M} = \$26'775,708.32$$

Sirva el ejemplo siguiente para comprobar este resultado y la funcionabilidad de las fórmulas del último teorema.

Ejemplo 2

Hacer el cuadro del fondo del ejemplo 1.

solución

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	2.5	2.50000000	0.026875000	2.526875000
2	2.7	5.22687500	0.056188906	5.283063906
3	2.9	8.183063906	0.87967937	8.271031843
4	3.1	11.37103184	0.122238592	11.49327043
4	3.3	14.79327943	0.159027657	14.95229809
6	3.5	18.45229809	0.198362205	18.65066029
7	3.7	22.35066029	0.240269598	22.59092989
8	3.9	26.49092989	0.284777496	26.77570739*

* La diferencia con el resultado anterior se debe al redondeo y es insignificante.

Las cantidades se han escrito en millones de dólares y la tabla se comienza anotando las rentas en la segunda columna.

Ejemplo 3

Depósitos en un fondo de reposición de maquinaria, determinación de los intereses y elaboración de un cuadro de fondo de amortización

La compañía Cerámicas del Noreste prevé la necesidad de renovar parte de su equipo de producción en un plazo de 1.5 años, con un estimado de 1.75 millones de dólares para esas fechas.

a) Obtenga los primeros 3 y el último de los 18 depósitos mensuales en un fondo, que reditúa con intereses a una tasa del 19.2% compuesto por mes, considerando que crecen con una diferencia común igual al 25% del primer pago.

b) Calcule también los intereses.

c) Elabore el cuadro del fondo en sus primeros tres renglones y el último.

solución

a) Los valores para reemplazar en las ecuaciones del último teorema son:

$$M = 1.75 \text{ millones}, \; p = 12, \; n = 1.5 \text{ años}, \; np = 18 \text{ e } i/p = 0.192/12 = 0.016$$

La diferencia común es el 25% de la primera renta, por eso $d = 0.25\ R_1$ de donde $R_1 = d/0.25$ o $R_1 = 4d$. Entonces,

$$A = 4d\left(\frac{(1.016)^{18}-1}{0.016}\right)$$

$$A = 4d(20.67001131) \qquad \text{o} \qquad A = 82.68004524(d)$$

$$B = d\left(\frac{(1.016)^{18}-1-(18)(0.016)}{(0.016)^2}\right) \qquad B = d\,\frac{(1+i/p)^{np}-1-(np)(i/p)}{(i/p)^2}$$

$B = d(166.8757071)$ y al sustituir queda

$$1.75 = (1.016)[82.68004524(d) + 166.8757071(d)]$$

$$1.75 = (1.016)[(249.5557523(d)]$$

$$1.75 = 253.5486443(d)$$

de donde $d = 1.75/253.5486443$

$$d = 0.006902029 \text{ millones} \qquad \text{o} \qquad d = \$6{,}902.03$$

El primer depósito en el fondo es, por lo tanto,

$$R_1 = 4d = \$27{,}608.11$$

Para el segundo y los siguientes se suma sucesivamente la diferencia, en tanto que para el último se suma 17 veces la misma diferencia.

$$R_2 = 27{,}608.11 + 6{,}902.03 = \$34{,}510.14$$

$$R_3 = 34{,}510.14 + 6{,}902.03 = \$41{,}412.17 \text{ y}$$

$$\vdots$$

$$R_{18} = 27{,}608.11 + 17(6{,}902.03) = \$144{,}942.62$$

b) Los intereses son la diferencia entre el monto acumulado y el capital que se invierte con las 18 rentas. Este capital constituye una serie aritmética; por lo tanto, la suma es:

$$S_n = (18/2)(27{,}608.11 + 144{,}942.62), \text{ ya que } S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \$1'552{,}956.57$$

Entonces, los intereses son

$$I = 1'750{,}000 - 1'552{,}956.57$$

$$I = \$197{,}043.43$$

c) Los primeros renglones del cuadro del fondo son los siguientes. Se inicia anotando las primeras rentas en la segunda columna y se continúa como en el ejemplo 1 de la sección 7.3.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	27,608.11	27,608.11	441.73	28,049.84
2	34,510.14	62,559.98	1000.96	63,560.94
3	41,412.17	104,973.11	1,679.57	106,652.68
⋮				
18	144,962.62	1’722,440.94	27,559.06	1’750,000.00

Importante

- Si se incrementa el primer depósito en el fondo, sin cambiar los otros valores, entonces la diferencia se reduce y puede llegar a ser negativa: en ese caso, más que incrementarse, los pagos se reducirían con el paso del tiempo. Esto significa que las ecuaciones del teorema 7.1 son válidas también para fondos con rentas decrecientes.
- Por supuesto que si la diferencia es negativa y grande, entonces los últimos depósitos pueden llegar a ser negativos, lo cual no tiene sentido práctico.

El ejemplo siguiente ilustra las dos posibilidades.

Ejemplo 4

Resuelva la primera parte del ejemplo 3 considerando que:

a) La primera renta es de $100,000.
b) La primera renta es de $200,000.

solución

a) El valor de B no cambia porque no depende del primer pago, es decir

$$B = (166.8757071)d$$

pero el de A es

$$A = 0.100(20.67001131)$$
$$A = 2.067001131$$

Entonces,

$$1.75 = (1.016)(2.067001131 + 166.8757071(d))$$

de donde $(1.75/1.016) - 2.067001131 = 166.8757071(d)$

$$-0.344560186 = 166.8757071(d)$$
$$d = -0.344560186/166.8757071$$
$$d = -0.002064771 \text{ millones o } d = -\$2,064.77$$

Significa que si los depósitos comienzan con R_1 = \$100,000, se reducen en \$2,064.77 y el último es

$$R_{18} = 100{,}000 - 17(2{,}064.77)$$
$$R_{18} = \$64{,}898.91$$

b) Si la primera renta fuera de \$200,000

$$A = 0.200(20.67001131) \quad \text{o} \quad A = 4.134002262$$
$$1.75 = (1.016)[4.134002262 + 166.8757071(d)]$$

de donde

$$d = -2.411561317/166.8757071$$
$$d = -0.014451243 \quad \text{o} \quad d = -\$14{,}451.24$$

En este caso, la última renta es

$$R_{18} = 200{,}000 + 17(-14{,}451.24)$$
$$R_{18} = -\$45{,}671.08$$

Más que un depósito, esto representa un retiro del fondo, ya que es negativo. Y esto no tiene sentido práctico.

Variación geométrica

El teorema 6.4 establece que el capital C al inicio de np rentas que crecen geométricamente es:

$$C = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\frac{(1+f)^{np}}{(1+i/p)} - 1\right]$$

y para trasladarlo hasta el final del periodo (np + 1) se multiplica por $(1 + i/p)^{np+1}$ tal como se hizo cuando la variación es aritmética, después se multiplica por $(1 + i/p)^{np}$ dentro de los paréntesis:

$$M = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np} - 1\right](1 + i/p)^{np+1} \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

$$M = \frac{R_1}{f - i/p}\left[\left(\frac{1+f}{1+i/p}\right)^{np}(1+i/p)^{np} - (1+i/p)^{np}\right](1 + i/p) \qquad a^{np+1} = a^{np}(a)$$

Simplificando y reacomodando factores, lo que se deja como ejercicio, se obtiene la fórmula del siguiente:

Teorema 7.2

El monto acumulado M en un fondo con depósitos anticipados que crecen geométricamente es:

$M = R_1\left(\dfrac{1+i/p}{f-i/p}\right)[(1+f)^{np} - (1+i/p)^{np}]$donde R_1 es el primer depósito, f es la tasa con la que crecen los depósitos, es decir, es el *gradiente geométrico*, n es el plazo en años, p la frecuencia de conversión y de pagos e i es la tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año.

Con el ejemplo siguiente se comprueba la validez de esta ecuación.

Ejemplo 5

¿Cuánto se acumula en un fondo de ahorro con 10 aportaciones mensuales que crecen a una tasa del 3%, la primera es por \$8,000 y la tasa de interés es del 10.8% anual compuesto por mes? Haga el cuadro del fondo.

solución

a) En la ecuación del teorema último se reemplazan:

$R_1 = 8{,}000$, el primer depósito.

$f = 0.03$, la tasa de crecimiento en los pagos.

$np = 10$, el número de rentas.

$i = 0.108$, de donde $i/p = 0.009$ ya que $p = 12$.

Entonces, el monto es:

$$M = 8{,}000\left(\frac{1.009}{0.03 - 0.009}\right)[(1.03)^{10} - (1.009)^{10}]$$

$$M = 8{,}000(48.04761904)(0.250182506)$$

$$M = 96{,}165.38992 \quad \text{o} \quad M = \$96{,}165.39$$

b) El cuadro es el siguiente que se inicia anotando las rentas en la segunda columna y se continúa como en los anteriores de esta sección.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	8,000	8,000	72	8,072.00
2	8,240	16,312	146.81	16,458.81
3	8,487.20	24,946.01	224.51	25,170.52
4	8,741.82	33,912.34	305.51	34,217.55
5	9,004.07	43,221.62	388.99	43,610.62
6	9,274.19	52,884.81	475.96	53,360.77
7	9,552.42	62,913.19	566.22	63,479.41
8	9,838.99	73,318.40	659.87	73,978.27
9	10,134.16	84,112.42	577.01	84,869.44
10	10,438.19	95,307.62	857.77	96,165.39

Ejemplo 6

Renta variable geométricamente en un fondo

Para el mantenimiento de un tramo de carretera de cuota que hoy se pone en servicio, la entidad gubernamental encargada constituye un fondo de reservas bimestrales que crecen 4%. ¿De cuánto deberán ser las primeras 3 para acumular 90 millones de dólares en 3 años y 4 meses, si se ganan intereses a una tasa del 15% compuesto por bimestre?

solución

Los valores que se reemplazan en la ecuación del teorema 7.2 son:

El monto $M = 90$ millones de dólares.
La tasa de interés $i = 0.15$, compuesto por bimestre.
La frecuencia de conversión y de pagos, $p = 6$.
El plazo en años es $n = 20/6$ o 20 bimestres.
La razón con la que crecen los pagos es $f = 0.04$.
Además, $i/p = 0.025$, $np = 20$ y $1 + f = 1.04$.

Entonces

$$90 = R_1\left(\frac{1.025}{0.04 - 0.025}\right)\left[(1.04)^{20} - (1.025)^{20}\right]$$

de donde

$$90 = R_1(1.025)(36.8337802)$$

$$R_1 = 90/(1.025)(36.83337802) \quad \text{o} \quad R_1 = 2.383813922 \text{ millones}$$

Es decir que la primera reserva es

$$R_1 = \$2'383{,}813.92$$

La segunda es un 4% más grande

$$R_2 = 2'383{,}813.92(1.04) \quad \text{o} \quad R_2 = \$2'479{,}166.48$$

y la tercera es:

$$R_3 = 2'479{,}166.48(1.04) \quad \text{o} \quad R_3 = \$2'578{,}333{,}14$$

Ejemplo 7

Plazo para un monto de renta variable geométricamente

¿En cuánto tiempo acumula $10,000 un empleado que constituye un fondo de ahorro con intereses a una tasa del 20.4% compuesto por quincena, pagos quincenales que crecen un 2% y el primero es por $550?

solución

En la ecuación 7.2 se sustituyen:

R_1 = \$550, el primer pago en el fondo

M = \$10,000, el monto acumulado

p = 24, porque son rentas quincenales

i = 0.204 de donde i/p = 0.204/24 = 0.0085 la tasa quincenal compuesta por quincena

La incógnita es $x = np$, el número de rentas.

Entonces,

$$10{,}000 = 550\left(\frac{1.0085}{0.02 - 0.0085}\right)[(1.02)^x - (1.0085)^x]$$

$$10{,}000 = 550(87.69565217)[(1.02)^x - (1.0085)^x]$$

de donde $(1.02)^x - (1.0085)^x = 0.207328616$

$$\text{o bien } (1.02)^x - (1.0085)^x - 0.20732816 = 0$$

Esta ecuación, novedosa por su forma, se resuelve también con el método de *prueba y error*, asignando a x valores arbitrarios:

con $x = 20$:

$$(1.02)^{20} - (1.0085)^{20} - 0.207328616 = 0.094165184$$

con $x = 15$:

$$(1.02)^{15} - (1.0085)^{15} - 0.207328616 = 0.003166785$$

con $x = 14$:

$$(1.02)^{14} - (1.0085)^{14} - 0.207328616 = -0.01365346$$

El cambio de signo en el resultado indica que el valor de x debe estar entre 14 y 15, probablemente más cerca del segundo, y puesto que x debe ser entero, se hace que x sea igual a 15 pagos quincenales. Se ajusta el monto para que quede como sigue:

$$M = 550(87.69565217)[(1.02)^{15} - (1.0085)^{15}]$$

$$M = 550(87.69565217)(0.210495401) \quad \text{o} \quad M = \$10{,}152.74$$

Ejercicios 7.4

1. ¿Qué característica tienen los fondos presentados en esta sección?

2. ¿En qué forma varían los depósitos en un fondo?

3. ¿Cuánto acumula en 6 meses una ama de casa en un fondo de ahorro con depósitos semanales que crecen $7.50, el primero es de $150 y se ganan intereses a una tasa del 9 .03% compuesto por semana?

4. Un estudiante pretende acumular $25,000 en un fondo con rentas quincenales que crecen $45. ¿De cuánto es la primera renta si se devengan intereses a una tasa del 12.6% nominal quincenal y el plazo es de 5 meses?

5. Haga el cuadro del fondo constituido con 8 rentas mensuales que crecen aritméticamente, la primera es de $3,500, el monto equivale a $60,000 y los intereses se devengan a una tasa anual compuesta por mes del 8.4%.

6. La compañía Consorcio de Edificadores constituye un fondo de reservas para maquinaria que crece en forma aritmética durante 5 años. ¿De cuánto son las rentas bimestrales si el monto que se pretende es de $750,000, siendo la primera de ellas de $10,000, y se gana una tasa del 17.46% de interés anual capitalizable por bimestre? ¿Cuánto se gana por concepto de intereses?

7. Para comprar una computadora y sus periféricos, una estudiante crea un fondo con 10 pagos quincenales que crecen $150, el primero es por $1,250, ganando intereses a una tasa del 21.6% compuesto por quincena. ¿Cuánto acumula?

8. Una compañía crea un fondo de jubilación con depósitos mensuales que crecen $100 durante 5 años. Calcule las primeras 3 rentas si se generan intereses del 22.2% compuesto por mes y se pretende un monto de $425,000.

9. Una universidad pretende acumular $750,000 en un fondo de investigación, con depósitos trimestrales que crecen $2,000 y devengan intereses a una tasa del 7.2% compuesto por trimestre. Haga el cuadro del fondo si el plazo es de 3 años.

10. ¿Cuánto acumula el ingeniero Pérez durante 6 meses en un fondo vacacional con depósitos quincenales que crecen 3%, siendo el primero de $3,500, y ganando intereses a una tasa del 13.2% anual compuesto por quincena?

11. La Lotería Nacional constituye un fondo de ayuda con depósitos bimestrales que crecen un 5%, siendo el primero de $25,000, y devengan intereses a una tasa del 18.6% compuesto por bimestre. ¿Cuánto acumula en 3 años? ¿Cuánto gana por intereses?

12. ¿Cuántas rentas mensuales se necesitan para acumular $60,000 en un fondo de ahorro, si se ganan intereses a una tasa del 10.44% capitalizable por mes, siendo la primera de las rentas de $3,000, y éstas crecen 2.5%. Haga un ajuste en el valor de las rentas.

13. Para ampliar su planta de producción al cabo de 3 años, la Troqueladora del Norte crea un fondo con reservas mensuales que crecen 3%, la primera mensualidad es por $50,000 y los intereses se devengan a una tasa del 19.8% nominal mensual. ¿Cuánto acumula en los 3 años? ¿Cuánto tiene en el fondo 2 años después de que comenzó?

14. ¿Cuánto se acumula en un fondo con reservas mensuales que comienzan con $20,000 y generan intereses a una tasa capitalizable por mes del 11.4%? si:

a) Todos los depósitos son iguales.

b) Crecen $250 cada uno.

c) Crecen 4.5%, sucesivamente.

Suponga 2.5 años de plazo.

15. Se constituye un fondo para el mantenimiento de puertos y vías navegables de la nación, con depósitos trimestrales que crecen 5% y devengan intereses a una tasa del 22% nominal trimestral. Obtenga los 3 primeros si el plazo es de 3 años y el monto es de 1.5 millones de dólares. Haga el cuadro del fondo correspondiente, en sus primeras filas.

16. ¿De qué cantidad serán los primeros 3 depósitos mensuales que crecen geométricamente en un fondo donde el último es de \$3,570.35 y el penúltimo es de \$3,500? Suponga que el plazo es de 2 años y que el fondo reditúa intereses a una tasa del 10.5% nominal mensual. ¿A cuánto asciende el monto acumulado en los 2 años?

17. Para construir su nueva planta embotelladora dentro de 3 años, una conocida compañía refresquera constituye un fondo de reservas bimestrales que inicia hoy con 4.5 millones de dólares. Calcule el monto acumulado si se generan intereses a una tasa del 11.1% convertible bimestralmente, considerando que las rentas crecen:

a) \$25,000 cada bimestre.

b) 1.8%, sucesivamente.

18. El cuarto depósito quincenal en un fondo es de \$1,123.60 y el segundo es de \$1,000. ¿Cuánto se acumula en 10 meses si se ganan intereses a una tasa del 18% compuestos por quincena? Suponga que los abonos crecen:

a) Aritméticamente.

b) Geométricamente

19. Para reponer en un plazo de 4 años, parte de su maquinaria y equipo, la compañía Ferrocarriles de la Nación constituye un fondo de reservas trimestrales que crecen 5%. ¿Cuánto acumula la compañía si comienza ahora con \$1'750,000 y gana una tasa de interés del 10.4% convertible trimestralmente?

Justificando su elección, seleccione la opción correcta en los problemas del 20 al 36.

20. ¿Cuánto se acumula en un fondo con 15 aportaciones mensuales, intereses del 8.4% nominal mensual, crecen \$250 de forma sucesiva y la primera es por \$18,700?

a) \$365,028.42 *b*) \$341,862.47 *c*) \$323,985.67 *d*) \$336,491.08 *e*) Otra

21. ¿Cuántos depósitos mensuales que comienzan con \$10,000, crecen \$150 cada mes y ganan intereses del 10.5% nominal mensual deberán realizarse para acumular \$265,000 aproximadamente?

a) 18 *b*) 21 *c*) 23 *d*) 27 *e*) Otra

22. ¿En cuánto se incrementa cada depósito quincenal en un fondo de ahorro si el primero es de \$950, el monto que se pretende es de \$22,600 y se generan intereses del 12% anual capitalizable por quincena? Suponga 8 meses de plazo.

a) \$60.0321 *b*) \$54.5727 *c*) \$48.9895 *d*) \$56.3207 *e*) Otra

23. ¿De cuánto es la primera aportación bimestral en un fondo, suponiendo que crece \$125 y se generan intereses del 7.38% nominal bimestral? Suponga que el plazo es de 3.5 años y se pretende disponer de \$70,800 al final.

a) \$1,193.04 *b*) \$1,568.28 *c*) \$1,329.28 *d*) \$1,494.93 *e*) Otra

24. ¿A cuánto ascienden los intereses en el fondo del problema 23?

a) \$20,408.37 *b*) \$18,943.91 *c*) \$19,496.16 *d*) \$18,845.53 *e*) Otra

25. ¿Cuánto se acumula con 30 depósitos mensuales en un fondo que bonifica intereses del 9.6%, si la diferencia con la que se incrementan es igual al 1.8% de la primera renta y ésta es de \$13,000?

a) \$565,961.36 *b*) \$529,665.03 *c*) \$553,015.59 *d*) \$498,696.98 *e*) Otra

26. La última aportación trimestral a un fondo es de \$42,000, ¿de cuánto es la primera si el monto que se acumula es de \$520,000, los intereses son del 10.5% anual capitalizables por trimestre y el plazo es de 2 años?

a) \$72,311.30 *b*) \$78,936.43 *c*) \$80,287.40 *d*) \$87,929.62 *e*) Otra

27. Obtenga el primer depósito mensual en un fondo que bonifica intereses del 12.72% nominal mensual, considerando que decrecen \$85 sucesivamente, el monto es de \$170,000 y el plazo es de 5 trimestres.

a) \$12,045.38 *b*) \$13,163.42 *c*) \$11,698.05 *d*) \$10,984.01 *e*) Otra

28. Resuelve el problema 27, considerando que las rentas crecen 2.3%, sucesivamente.

a) \$10,429.68 *b*) \$9,781.61 *c*) \$9,061.41 *d*) \$8,871.38 *e*) Otra

29. ¿Cuántos depósitos quincenales se necesitan para acumular \$350,000, en un fondo que bonifica el 7.56% nominal quincenal, suponiendo que crecen sucesivamente un 1.8% y el primero es de \$10,790?

a) 27 *b*) 28 *c*) 29 *d*) 25 *e*) Otra

30. La primera aportación en un fondo es de \$6,206. ¿Con qué porcentaje aproximado se incrementan? Considere que el monto que se acumula en los 2 años del plazo es de \$195,000 y los intereses son del 9% anual capitalizable por mes.

a) 1.53% *b*) 1.85% *c*) 2.05% *d*) 1.76% *e*) Otra

31. La primera aportación bimestral a un fondo de jubilación es de \$20,000, ¿cuánto se acumula en 3 años si se bonifican intereses del 8.4% anual capitalizable por bimestre y crecen 0.9% cada bimestre?

a) \$456,231.48 *b*) \$443,487.10 *c*) \$471,920.58 *d*) \$469,363.91 *e*) Otra

32. ¿Con cuánto debe constituirse un fondo para acumular \$235,000 con intereses del 7.2% nominal mensual, si la segunda aportación es de \$4,500 y se hace 3 meses después del depósito de apertura? Suponga que son 35 aportaciones quincenales y crecen 1.05%, sucesivamente.

a) \$22,521.36 *b*) \$20,873.69 *c*) \$19,914.33 *d*) \$21,693.60 *e*) Otra

33. Las primeras filas del cuadro de un fondo de amortizaciones, son las siguientes.

¿Cuál es el monto acumulado con 30 aportaciones mensuales?

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	7,250.000	7,250.000	68.875	7,318.875
2	7,329.750	14,648.625	139.162	7,458.037

a) $305,421.63 *b*) $310,196.03 *c*) $295,144.63 *d*) $318,421.61 *e*) Otra

34. De cuánto es la primera renta trimestral de un total de 9 en un fondo de reposición de maquinaria, que bonifica intereses del 10.8% nominal trimestral? Suponga que crecen 2.03%, sucesivamente, y se pretende un monto de $650,000.

a) $58,323.70 *b*) $60,268.21 *c*) $56,981.72 *d*) $57,903.41 *e*) Otra

35. La quinta aportación a un fondo educativo, que bonifica intereses del 14.16% nominal quincenal, es de $10,620.00 y la sexta es por $10,800.54. ¿Cuánto dinero se acumula en 3.5 años, considerando que son quincenales y crecen geométricamente?

a) $1’463,921.03 *b*) $1’362,425.32 *c*) $1’654,767.29 *d*) $2’232,477.87 *e*) Otra

36. La última aportación mensual a un fondo para conservación de carreteras es por $195,000. ¿De cuánto se podrá disponer cada trimestre por tiempo ilimitado, desde un mes después de tal aportación? Suponga que se generan intereses del 7.2% nominal mensual, crecen 0.8% cada mes y el plazo en el fondo es de 2.5 años.

a) $102,327.11 *b*) $103,527.84 *c*) $110,663.91 *d*) $112,982.93 *e*) Otra

37. ¿Cuánto se tendrá en un fondo de investigación, después de 4 años de haber realizado la primera aportación bimestral por $17,250, considerando intereses del 11.5% nominal mensual? Suponga que crecen 1.85% cada bimestre y que se hacen disposiciones mensuales anticipadas de $12,725.00 a partir del decimoprimer mes.

a) $56,531.72 *b*) $59,629.04 *c*) $63,221.84 *d*) $60,968.73 *e*) Otra

7.5 Problemas de aplicación

Rentas que varían aritméticamente en bloques

Ejemplo 1

¿Cuánto se acumula en un fondo de ahorro con 78 rentas semanales si la primera es de $830, la última es de $1,500, crecen aritméticamente cada 13 y la tasa de interés es del 9.1% anual capitalizable por semana?

solución

Puesto que crecen cada 13, se tienen 6 grupos de pagos, los del primero tienen un valor de R_1 = \$830, los del último valen R_6 = \$1,500 y como entre ambos hay una diferencia que es igual a cinco veces la diferencia común, se cumple que:

$$R_6 = R_1 + 5d$$

de donde

$$d = (R_6 - R_1)/5 \quad \text{o} \quad d = 134$$

En la figura 7.2 se aprecian los 6 grupos de 13 pagos cada uno.

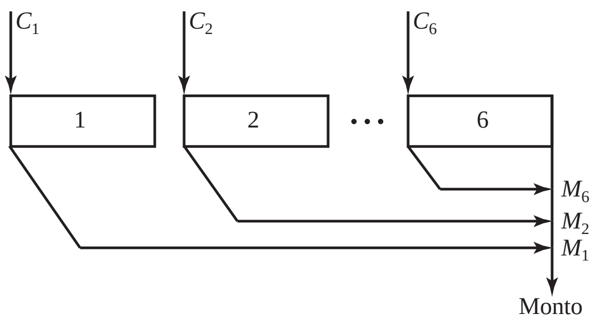


FIGURA 7.2

El procedimiento consiste en llevar el valor futuro al final del plazo de cada uno de los capitales $C_1, C_2, \ldots, C_6$ que hacen las veces de 6 rentas crecientes.

El primero de estos capitales, el que corresponde a los 13 depósitos del primer bloque, notando que es el valor presente de una anualidad anticipada, con $R = 830$, $np = 13$ e $i/p = 0.00175$, es:

$$C_1 = 830(1.00175)\left(\frac{1-(1.00175)^{-13}}{0.00175}\right) \qquad C = R(1+i/p)\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$$C_1 = 830(12.86460744)$$

o $$C_1 = 10,677.62418$$

Para el monto del segundo y los otros grupos de rentas, sólo cambia la renta, ya que el factor que está entre paréntesis permanece constante. ¿Por qué? Entonces el primer capital puede expresarse como:

$$C_1 = 830(k)$$

donde

$$k = 12.86460744$$

La renta en el segundo bloque es 134 mayor que la del primero y por eso:

$$C_2 = (830 + 134)k$$

y el capital del último bloque es:

$$C_6 = [830 + 5(134)]k$$

Para llevarlos al final del plazo con la fórmula del interés compuesto, se necesita la tasa capitalizable por trimestre, 13 semana, equivalente al 9.1% nominal semanal.

$$(1 + i/4)^4 = (1 + 0.091/52)^{52}$$

de donde

$$1 + i/4 = (1.00175)^{13} \quad \text{o} \quad 1 + i/4 = 1.022990415$$

El valor futuro, 6 trimestres después, del primer capital es entonces:

$$M_1 = 830(k)(1.022990415)^6 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

o $M_1 = \$12,237.81876$

Del segundo capital es:

$$M_2 = (830 + 134)(k)(1.022990415)^5$$

o $M_2 = \$13,894.13$

y de los otros 4 es:

$$M_3 = (830 + 268)k(1.022990415)^4$$

o $M_3 = \$15,469.81559$

$$M_4 = 16,967.65947,\ M_5 = 18,390.36575 \text{ y } M_6 = \$19,740.55515$$

La suma de los 6 es igual al monto acumulado en el fondo

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6$$

o $M = 96,700.35$, redondeando.

Solución alterna

Es evidente que si el número de grupos de pagos es relativamente grande, el método anterior es poco práctico, por lo que en su lugar se utilizan las ecuaciones del teorema 7.1 sin el factor $(1 + i/p)$ cuando se utilizan montos parciales. Los valores que se sustituyen son:

$R_1 = 830(k)$, la primera renta, es decir, el primer monto.

$d = 134(k)$, la diferencia entre dos rentas sucesivas

$d = (830 + 134)k - 830k$ o $d = 134(k)$

$np = 6$, el número de rentas crecientes, es decir, de capitales o grupos de pagos.

Entonces:

$$A = 830(k)\left(\frac{(1.022990415)^6 - 1}{0.02299415}\right) \qquad A = R_1 \frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}$$

$$A = 830(k)(6.355611371)$$

o $A = 5,275.157438(k)$

Puesto que:

$$B = d\,\frac{(1+i/p)^{np}-1-np(i/p)}{(i/p)^2}$$, en este caso:

$$B = 134(k)\,\frac{(1.022990415)^6-1-6(0.022990415)}{(0.022990415)^2}$$

$$B = 134(k)(15.46781)$$

o $$B = 2{,}072.68654(k)$$

Entonces, el monto es:

$$M = (1.022990415)(5{,}275.157438 + 2{,}072.68654)k$$

$$M = 7{,}516.77396(k)$$

o $$M = \$96{,}700.35$$

que es igual al de antes.

Intereses en un fondo de renta variable

Ejemplo 2

Intereses en un fondo

¿A cuánto ascienden los intereses que se generan en el fondo del ejemplo 1?

solución

Los intereses son la diferencia entre el monto acumulado en el fondo y la suma de las 78 aportaciones. Estas aportaciones forman una serie aritmética de 13 en 13 y al considerar la primera de cada bloque la suma, puesto que $a = 830$, $d = 134$ y $n = 6$, es:

$$S = (6/2)[2(830) + 5(134)] \qquad S = (n/2)[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S = 3(2{,}330)$$

o $$S = \$6{,}990$$

el total aportado es el capital

$$C = 13(S) \qquad \text{o} \qquad C = \$90{,}870$$

y los intereses son, por lo tanto:

$$I = 96{,}700.35 - 90{,}870.00$$

$$I = \$5{,}830.35$$

Fondo de renta variable considerando inflación

Ejemplo 3

Monto con renta variable geométricamente

Para comprar una computadora portátil dentro de un año, Claudia Guadalupe constituye un fondo de ahorro con depósitos mensuales que crecen 1.75% cada cuatrimestre, ¿cuánto deposita cada mes si le dan intereses del 13.2% nominal mensual y se considera que la computadora aumenta su precio en 1.28% cada bimestre por efectos de la inflación y otros factores y ahora cuesta $20,350?

solución

Se tienen ahora 3 grupos de 4 rentas mensuales cada uno. El monto en el primero es:

$$M_1 = R_1(1 + 0.132/12)\left[\frac{(1.011)^4 - 1}{0.011}\right] \qquad M = R_1(1 + i/p)\left[\frac{(1+i/p)^{np} - 1}{i/p}\right]$$

$$M_1 = R_1(1.011)(4.066485364)$$

$$M_1 = R_1(4.111216703)$$

Puesto que el factor entre los paréntesis no cambia, este monto se escribe como $M_1 = R_1(k)$, donde $k = 4.111216703$ y el segundo monto, puesto que $R_2 = R_1 + 0.0175(R_1)$ o $R_2 = (1.0175)R_1$ es

$$M_2 = (1.0175)R_1(k)$$

El monto del tercer grupo de rentas es:

$$M_3 = (1.0175)^2R_1(k)$$

El valor futuro del primer monto, dos cuatrimestres, es decir, ocho meses después es:

$$M_1 = R_1(k)(1.011)^8 \qquad M = C(1 + i/p)^{np}$$

o $$M_1 = R_1(k)(1.09146357)$$

El del segundo monto, cuatro meses después es:

$$M_2 = (1.0175)R_1(k)(1.011)^4$$

o $$M_2 = R_1(k)(1.063014137)$$

El tercero no se traslada y entonces el monto acumulado en el fondo con 12 rentas, luego de factorizar R_1k, es:

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

$$M = R_1(k)(1.09146357 + 1.063014137 + (1.0175)^2 \qquad R_3 = (1.0175)^2\, R_1\, k$$

$$M = R_1(k)(3.189783957)$$

o $$M = (R_1)(13.11389308)$$

Monto éste que debe ser igual al precio futuro de la computadora

$$P = 20{,}350(1.0128)^6$$
$$P = 21{,}963.75344$$

Entonces:

$$R_1(13.11389308) = 21.963.75344$$

de donde al despejar resulta que la primera renta es:

$$R_1 = 21{,}963.75394/13.11389308$$

o $$R_1 = \$1{,}674.85$$

Fondos de Retiro o Pensiones*

El sistema de pensiones fue creado para que todo trabajador que se afilie sea propietario de una cuenta personal para su retiro laboral, con aportaciones del gobierno, del patrón y del propio trabajador.

En los diferentes países se formaron organismos privados, principalmente de la banca, para administrar tales cuentas, constituyéndose en Administradoras de Fondos para el Retiro.

Si bien es cierto que cada trabajador tiene libertad para elegir la operadora de pensiones que administre sus ahorros, es recomendable que elija la mejor alternativa tomando en cuenta básicamente dos cosas:

- Las comisiones que cada una cobra por administrar los recursos del trabajador.
- El rendimiento o los intereses que la operadora le ofrece.

Por supuesto que adicionalmente debe considerar el prestigio, la solvencia y la calidad en el servicio que cada una le ofrece, sabiendo que actualmente puede cambiarse de una a otra, aunque esto no es lo deseable.

Cabe agregar, además, que el dinero de las operadoras es administrado a su vez por las Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro o Pensión, y son supervisadas por una Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro, órgano descentralizado de la Secretaría de Hacienda del gobierno federal.

También es cierto que el trabajador tiene por lo menos tres opciones al jubilarse estando asegurado en la institución responsable del seguro social en cada país.

*Recibir el monto total acumulado en su fondo con una sola exhibición al jubilarse.

*Con una pensión o renta periódica, cuyos tamaño, frecuencia y duración dependen del acumulado en su cuenta para el retiro, ya que en este caso se agota, es decir, queda en ceros con la última pensión.

*Con rentas vitalicias que consisten en recibir también pagos periódicos, desde el día de su jubilación y hasta el día de su deceso. Éstas, como ya se dijo, se consideran y se denominan anualidades contingentes.

En el capítulo 9 se abordarán las rentas vitalicias y en el ejemplo siguiente se ilustran las rentas periódicas, desde la jubilación hasta que el dinero en el fondo se acaba. Este fondo se constituye con aportaciones bimestrales que crecen conforme aumenta el salario mínimo del trabajador, es decir, cada año.

Tales aportaciones dependen del salario base de cotización, SBC, del trabajador y se evalúan de la forma siguiente:

Un 2% del SBC por parte del patrón y un 4.5% por cesantía y vejez, que es aportado por el patrón, el gobierno y también el trabajador, correspondiendo el mayor porcentaje, al patrón.

También el gobierno federal aporta otro porcentaje por lo que llama *cuota social* por cada bimestre cotizado.

Ejemplo 4

Disposiciones de un fondo para el retiro

¿De cuánto podrá disponer cada mes el señor Castillo, durante ocho años, luego de jubilarse a los 65 años de edad, considerando que ahora su salario base de cotización es de $9,250 mensuales, tiene 54 años de edad, cotiza desde los 46 y su salario se ha incrementado, y se incrementará, 4.08% en promedio anual? Suponga que la operadora de pensiones le cobra el 1.01% de comisión bimestral y la aportación total gobierno-patrón-trabajador es del 6.50% del salario bimestral y le reditúa intereses del 9.12% anual capitalizable por bimestre.

solución

El salario base bimestral del señor Castillo cuando tenía 46 años de edad, 9 antes de ahora, es a_1, tal que $a_9 = a_1(1 + 0.0408)^8$, de donde $a_1 = a_9/1.377013723$ o $a_1 = 13{,}434.87$, porque $a_9 = 9{,}250(2)$ es el salario bimestral actual.

De los 46 a los 65 años de edad quedan comprendidos 20 años o 120 bimestres, que se dividen en 20 grupos de 6 cada uno. ¿Por qué?

El tamaño de las primeras 6 aportaciones es igual al 6.5% del salario, es decir:

$$A_1 = 0.065(13{,}434.87) \quad \text{o} \quad A_1 = 873.27, \text{ redondeando}$$

La comisión que le cobra la Afore es del 1.01% del salario bimestral

$$0.0101(13{,}434.87) = 135.69$$

Por lo tanto, las primeras 6 aportaciones, descontando esta comisión, son de:

$$R_1 = 873{,}27 - 135.69 \quad \text{o} \quad R_1 = 737.58$$

Note que aunque la comisión la cobra la operadora de pensiones y el rendimiento lo ofrece el sistema de acreditación, para efectos prácticos esta aportación neta puede obtenerse restando las tasas, esto es:

$$R_1 = (0.065 - 0.0101)(13{,}434.87) \quad \text{o} \quad R_1 = 737.58$$

Se considera que las aportaciones están al comenzar cada bimestre y el valor presente de las primeras 6, dado que constituyen una anualidad anticipada, están dadas por:

$$C_1 = 737.58(1 + 0.0912/6)\left(\frac{1-(1.0152)^{-6}}{0.0152}\right) \qquad C = R(1+i/p)\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

$C_1 = 737.58(1.0152)(5.693308836)$
$C_1 = 737.58(5.77984713)$ o $C_1 = 737.58(k)$

donde

$$k = 5.77984713, \text{ es constante.}$$

Para el capital del segundo bloque, la renta es 4.08% más grande, es decir,

$$R_2 = R_1 + 0.0408R_1 \text{ o } R_2 = (1.0408)R_1$$

Entonces

$$C_2 = [(1.0408)R_1](k)$$

Cada uno de los siguientes, se obtiene multiplicando el anterior por la razón común 1.0408 y los 20 capitales forman una anualidad de renta variable al inicio de cada periodo anual, como se observa en la gráfica de la figura 7.3, donde cada rectángulo representa un periodo anual

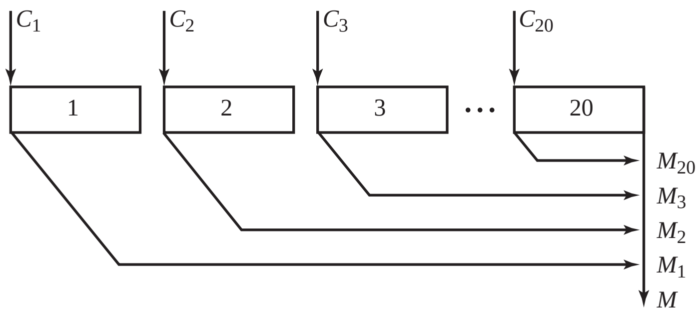


FIGURA 7.3

Los valores que se reemplazan en la ecuación son:

$R_1 = 737.58(k)$, la primera renta, $R_1 = C_1$
$f = 0.0408$, la tasa de crecimiento en las aportaciones.
$np = 20$, el número de rentas es decir de capitales.
$i/p = 0.094736642$, la tasa de interés anual, capitalizable por año, equivalente al 9.12% nominal bimestral, ya que

$$e = (1 + 0.0912/6)^6 - 1$$

o

$$e = 0.094736642$$

Entonces el monto según el teorema 7.2 es:

$$M = 737.58(k)\left(\frac{1.094736642}{0.0408 - 0.094736642}\right)[(1.0408)^{20} - 1.094736642)^{20}$$

$$M = 737.58(k)(-20.29671484)(-3.887056964)$$

$$M = 58{,}190.99555(k) \quad \text{o} \quad M = \$336{,}335.06$$

Para saber de cuánto dinero podrá disponer cada mes durante los 8 años el señor Castillo, se utiliza la ecuación 5.2, para el capital de una anualidad anticipada, pero antes se obtiene la tasa de interés capitalizable por mes.

$$(1 + i/12)^{12} = (1 + 0.0912/6)^6 \quad \text{o} \quad 1 + i/12 = 1.007571337$$

Entonces

$$336{,}335.06 = R\left(\frac{1-(1.007571337)^{-96}}{0.007571337}\right)$$

$$336{,}335.06 = R(68.05197809)$$

$$R = 336{,}335.06/68.05197809 \qquad \text{o} \qquad R = 4{,}942.33 \text{ redondeando}$$

Note usted que los intereses que se devengan en los 8 años son:

$$I = 4{,}942.33(96) - 143{,}277.50 \qquad \text{o} \qquad I = \$331{,}186.18$$

ya que el total aportado a la operadora de pensiones es

$$C = 737.58\left(\frac{1-(1.048)^{20}}{1-1.048}\right)(6) = 737.58(32.37558319)(6) \qquad \text{o} \qquad C = 143{,}277.50$$

Ejercicios 7.5

1. Explique brevemente las características de las clases de fondos de esta sección.
2. ¿Cuánto se acumula en un fondo con 28 depósitos semanales que de 4 en 4 crecen $75, si el primero es de $1,500 y se ganan intereses a una tasa del 13% nominal semanal? Haga el cuadro en sus primeros 5 renglones y el último.
3. Obtenga el valor de los primeros depósitos quincenales que crecen $100 cada trimestre, para acumular $100,000 en 1.5 años en un fondo de jubilación con intereses a una tasa del 18% compuesto por quincena. ¿A cuánto ascienden los intereses?
4. Encuentre el monto que se acumula en un fondo de inversión que genera intereses a una tasa del 9.9% nominal mensual. Suponga que el plazo es de 3 años, la primera mensualidad es de $3,850 y ésta crece $250 cada semestre. Calcule los intereses.
5. ¿Con qué capital debe comenzar el señor López sus depósitos quincenales, en un fondo de ahorro que reditúa el 8.28% de interés nominal bimestral si pretende acumular $85,000 en 2 años y si los incrementa en $180 cada bimestre? ¿Cuánto dinero gana por concepto de intereses?
6. Se constituye un fondo con reservas mensuales para acumular $1’750,000 en 3 años, ganando intereses a una tasa del 9.12% convertible mensualmente. Luego de hacer el pago número 24, se decide incrementar los siguientes en $1,250 cada cuatrimestre. ¿Cuánto se acumula en los 3 años?
7. Se constituye un fondo educativo con un depósito inicial de $150,000, seguido de 36 mensualidades que crecen $75 cada trimestre. La primera renta es de $350 y se generan intereses a una tasa del 15% capitalizable por mes. ¿Cuánto se acumula en el fondo? ¿Cuánto se devenga por concepto de intereses?

8. El decimonoveno depósito quincenal en un fondo es de $13,250 y el decimoctavo es de $12,500. Calcule el monto acumulado en 1.5 años si se ganan intereses a una tasa del 12.3% nominal trimestral y si los depósitos crecen cada trimestre con:

a) Una diferencia constante, aritméticamente.

b) Una razón constante, geométricamente.

9. Para rescatar un pagaré con valor nominal de $150,000 en 16 meses de plazo, se crea un fondo de amortización con pagos bimestrales, que paga intereses a una tasa del 20.1%, compuesta por cuatrimestre. Determine el tamaño de los pagos si crecen:

a) $1,200.00 cada 4 meses.

b) 10% cada cuatrimestre.

Obtenga los intereses del fondo en el caso *b*.

10. ¿En cuánto tiempo se acumulan $250,000 en un fondo de jubilación, con abonos mensuales que comienzan con $6,150, crecen 12% cada trimestre y devengan intereses a una tasa del 10.5% compuesto por mes? Ajuste el valor de los depósitos.

11. ¿Cuánto se acumula, durante 2 años, en un fondo de reservas para reposición de maquinaria si los abonos son bimestrales y crecen 15% cada semestre, comienzan con $40,000 y devengan intereses a una tasa del 9.18% compuesto por bimestre?

12. El gerente de una compañía consigue un crédito de $15,000 pagaderos en un año, con cargos a una tasa del 15% efectivo. Simultáneamente, constituye un fondo de amortización, con depósitos quincenales que incrementa 6% cada bimestre ganando intereses a una tasa del 12.42% convertible quincenalmente. ¿Cuánto faltará o sobrará para liquidar el crédito y los intereses al final del año, si el primer depósito es de $500.

13. Para construir otra sucursal, Farmacias del Sureste, S. A., crea un fondo con depósitos trimestrales que crecen 5% cada semestre. ¿Cuánto acumula en 1.5 años si el primero es por $425,000 y se ganan intereses a una tasa del 20.8% capitalizable por trimestre? ¿Cuánto se devenga por intereses?

14. Los depósitos mensuales del primer cuatrimestre en un fondo educativo son de $20,000 y los del tercero son de $22,472. ¿Cuánto se acumula en 3 años si devengan una tasa de interés del 15% compuesto por mes y crecen en forma geométrica?

15. ¿En cuánto tiempo se acumulan 1.25 millones de dólares en un fondo de ayuda hospitalaria, si la primera renta mensual es de $50,000, las rentas crecen 8% cada trimestre y generan intereses a una tasa del 9.21% capitalizable por mes? Haga un ajuste al valor de las rentas.

En los problemas del 16 al 29 selecciona la opción correcta justificándola.

16. ¿Cuánto se acumula en un fondo de ahorro con 20 aportaciones mensuales que crecen $450 cada cuatro, la primera es de $6,500 y la tasa de interés es del 9.63% anual capitalizable por mes?

a) $195,787.29 *b*) $160,501.94 *c*) $170,629.03 *d*) $178,075.93 *e*) Otra

17. ¿A cuánto ascienden los intereses en el problema 16?

a) $15,201.42 *b*) $14,624.93 *c*) $12,501.94 *d*) $13,629.61 *e*) Otra

18. La universidad crea un fondo de jubilación con 36 rentas bimestrales que crecen $1,200 cada semestre, la tasa de interés es del 8.4% anual capitalizable por bimestre y la primera es de $45,000. ¿De cuánto dinero dispondrá 10 años después de la última aportación?

a) $16'495,321.03 *b*) $16'578,494.73 *c*) $15'960,079.27 *d*) $16'729,403.55 *e*) Otra

19. ¿De cuánto dinero podrá disponer la universidad del problema 18, desde tres meses después de la última aportación por tiempo ilimitado cada trimestre, suponiendo intereses del 10.5% nominal trimestral desde la última aportación en el fondo?

a) $187,172.11 *b*) $205,429.98 *c*) $196,708.93 *d*) $190,925.37 *e*) Otra

20. Con $60,000 se constituye un fondo y 5 meses después se comienza con 27 aportaciones mensuales que crecen $750 cada trimestre. ¿Cuánto se acumula si la primera de éstas es de $8,250 y se bonifican intereses del 8.46% nominal mensual? Suponga que 2 años después del depósito inicial se dispuso de $127,000.

a) $265,302.25 *b*) $256,321.30 *c*) $273,286.26 *d*) $241,321.65 *e*) Otra

21. ¿Cuánto se tendrá en un fondo luego de 40 aportaciones quincenales que crecen 3.5% cada bimestre, la primera fue por $3,650 y se ganan intereses del 7.20% anual capitalizable por quincena?

a) $183,806.04 *b*) $201,409.63 *c*) $198,191.75 *d*) $187,923.03 *e*) Otra

22. ¿Cuánto debe depositarse en un fondo para reposición de maquinaria 7 meses antes de la primera de una serie de 36 aportaciones mensuales que crecen 4.3% cada trimestre? Suponga que se generan intereses del 12.6% anual capitalizable por mes, se pretende acumular un monto de $725,000 dos años después de la última aportación que se hizo por $35,000

a) $78,973.08 *b*) $72,949.19 *c*) $75,408.23 *d*) $83,095.73 *e*) Otra

23. ¿De cuánto será la primera aportación quincenal en un fondo de ahorros si se generan intereses del 10.32% nominal quincenal? Suponga que son 44, crecen 3% cada cuatrimestre y se pretende acumular un monto de $ 1'250,000, tres años después de la última.

a) $25,429.35 *b*) $10,940.51 *c*) $7,431.52 *d*) $15,921.78 *e*) Otra

24. Una constructora constituye un fondo con intereses del 13.2% nominal bimestral y aportaciones bimestrales que crecen 7% cada semestre, ¿cuánto acumulará un año después de la última si la primera fue por $125,000 y son 21?

a) $3'429,521.87 *b*) $4'923,728.41 *c*) $5'422,200.68 *d*) $4'065,778.09 *e*) Otra

25. Para construir una carretera de cuota que une a dos importantes ciudades del país e incluye uno de los puentes más altos del mundo, se tiene un presupuesto actual de 8,500 millones de dólares. Se constituye un fondo con 20 aportaciones mensuales que crecen 4% cada cuatrimestre, ¿de cuánto será la primera si se ganan intereses del 12.3% anual capitalizable por mes y se considera que el costo total de la construcción se incrementará un 2.5% cada semestre por efectos de la inflación y otros factores?

a) $367'977,029.90 *b*) $258'063,398.43 *c*) $248'729,043.12 *d*) $125'728.930.42 *e*) Otra

26. ¿De cuánto dinero podrá disponer cada quincena durante 10 años de su fondo de ahorro para el retiro un empleado que cotizó durante 23 años, la primera aportación bimestral neta fue de $530, misma que ha crecido en un 6.03% cada año? Suponga que le bonifican 10.26% nominal bimestral.

a) $3,473.20 *b*) $5,209.36 *c*) $6,163.71 *d*) $4,863.70 *e*) Otra

27. ¿De cuánto podrá disponer el empleado del problema 26, cada mes, durante 8 años?

a) $9,328.43 *b*) $7,981.01 *c*) $10,429.35 *d*) $11,429.39 *e*) Otro

28. ¿Cuántas disposiciones mensuales de $15,450 puede hacer el empleado del problema 26?

a) 35 *b*) 48 *c*) 40 *d*) 43 *e*) Otro

29. ¿De cuánto dinero dispondrá el empleado del problema 6 en el momento de su jubilación si simultáneamente hizo depósitos semanales en un banco que le bonifica el 8.32% nominal semanal? Considere que el primero fue de $40 y los incrementos en $5 cada semestre.

a) $630,209.42 *b*) $725,429.08 *c*) $683,345.45 *d*) $525,998.83 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Explicar los fondos de renta fija y sus fines.
- Mencionar y describir los fondos de renta variable, sus finalidades y las formas en que pueden variar los depósitos.
- Encontrar el monto, la renta, el plazo y los intereses en los fondos de renta fija.
- Calcular el monto, los intereses, la renta y el plazo en los fondos de renta variable.
- Hacer los cuadros de los fondos de renta fija y de renta variable.

Conceptos importantes

Cuadro de un fondo
Fondo de renta fija
Fondo de rentas variables
Fondos de renta variable en grupos
Los fondos como anualidades anticipadas de renta variable
Variación aritmética y geométrica en la renta de los fondos

Problemas propuestos para exámenes

Conteste si las afirmaciones que se hacen a continuación son falsas o verdaderas.

1. Se crean fondos sólo para amortizar un crédito_________________.
2. En un fondo, generalmente los pagos se relacionan con su valor futuro al final del plazo ____________.
3. La tasa de interés en un fondo de amortización es igual a la que se carga a la deuda que es el objeto del fondo _______________.
4. Los fondos de renta fija son aplicaciones de las anualidades anticipadas _______________.
5. El monto acumulado M en un fondo de renta variable geométricamente está dado por:

$$M = R_1\left(\frac{1+i/p}{f-i/p}\right)\left[(1+f)^{np}-(1+i/p)^{np}\right]$$

   donde f es la razón de crecimiento en los pagos
6. Los depósitos en un fondo de esta sección son anticipados, es decir, se hacen al inicio de cada periodo__________________.

   Complete las siguientes oraciones.
7. La cantidad que se acumula con depósitos periódicos para lograr un monto se llama ___________.
8. El monto acumulado en un fondo de renta fija está dado por________________.
9. Para acumular $800,000 en un fondo que genera intereses a una tasa del 13.2% nominal mensual, se requieren 15 rentas mensuales de ______________.
10. El cuadro de un fondo es útil para _____________.
11. Los intereses en un fondo se obtienen restando del monto____________.
12. El monto acumulado con 20 rentas mensuales que crecen $50, siendo la primera renta de $1,450 y la tasa de interés del 21.6% compuesto por mes, es _______________.
13. ¿Cuánto acumula un empleado en un fondo de ahorro con 25 depósitos quincenales de $750 si le pagan intereses a una tasa del 13.5% compuesto por quincena? ¿Cuánto gana por concepto de intereses?
14. La Abarrotera del Centro consigue un crédito en mercancía de $375,000 a pagar con intereses a una tasa del 14% simple anual y al final de 8 meses. Simultáneamente crea un fondo de amortización con depósitos mensuales que devengan intereses a una tasa del 28.2% anual compuesto por mes, ¿de cuánto es cada uno?
15. ¿De qué cantidad dispondrá el profesor González en su fondo para el retiro, cuando se jubile, si la operadora de pensiones a la que se afilió le reditúa un interés a la tasa del 10.5% anual compuesto por mes? Su primera aportación mensual fue de $498 y después las aumentó en 3.8 % cada semestre? Suponga que faltan 5 años para el retiro del profesor González y comenzó hace 2 años.

16. En el problema 15, ¿de qué monto dispondrá el profesor al final de los 7 años, si incrementa sus aportaciones un 6.6% cada año?

17. ¿Cuánto tiempo falta para que un empleado se retire si sabe que su operadora de pensiones le reditúa un interés a una tasa del 8.4% anual compuesto por mes, su primera aportación mensual fue de $220, sus aportaciones crecen 9% cada semestre y recibirá $61,120 en su retiro? ¿Cuánto gana por concepto de intereses? Suponga que comenzó hace dos años.

18. ¿Cuánto se acumula en un fondo de reposición de maquinaria y equipo durante 3 años, si las primeras 6 rentas bimestrales son de $75,000 y a partir de la séptima se incrementan 12% cada 3? Suponga intereses a una tasa del 11.22% nominal bimestral y obtenga el total que acumula por concepto de intereses.

En los problemas 19 al 36 seleccione la opción correcta justificándola.

19. ¿Cuánto acumula el señor Pérez en un fondo con 20 aportaciones mensuales de $1,500 si le bonifican intereses del 10.5% anual capitalizable por mes?

a) $35,421.35 *b*) $33,963.08 *c*) $32,915.19 *d*) $34,005.36 *e*) Otra

20. ¿Cuánto debe depositarse cada quincena en un fondo de amortización gradual, para recuperar un pagaré que se endosó por mercancía con valor de $72,750? Suponga que los intereses del fondo son del 11.4% anual capitalizable por quincena, el plazo es de 8 meses y los intereses del crédito son del 14% simple anual.

a) $6,250.08 *b*) $4,425.36 *c*) $6,963.41 *d*) $4,764.89 *e*) Otra

21. En el problema 20, ¿de cuánto será la primera renta si crecen $150 de manera sucesiva?

a) $3,654.99 *b*) $4,929.32 *c*) $3,425.35 *d*) $5,003.84 *e*) Otra

22. ¿De cuánto dinero dispondrá un profesor al final de 15 años si constituyó un fondo con pagos mensuales que crecen 0.5%? Considere intereses del 13.2% nominal mensual y la primera aportación de $350.

a) $102,425.36 *b*) $298,429.03 *c*) $277,817.74 *d*) $115,923.40 *e*) Otra

23. Suponga que usted deposita hoy $5,000 en un fondo que genera intereses del 10.56% nominal mensual, ¿cuánto tendrá al final de 18 años, suponiendo que continúa con 40 aportaciones mensuales que crecen sucesivamente $7.00, la primera de las cuales es por $1,320 y la realiza dentro de un mes?

a) $270,629.36 *b*) $369,695.30 *c*) $331,535.74 *d*) $373,929.45 *e*) Otra

24. Resuelva el problema 23 considerando que sus pagos crecen 0.3% cada cuatrimestre.

a) $175,321.03 *b*) $380,928.42 *c*) $369,760.25 *d*) $344,247.36 *e*) Otra

25. Encuentre los intereses que se ganan en el problema 24.

a) $283,237.86 *b*) $310,963.95 *c*) $315,695.03 *d*) $225,201.08 *e*) Otra

26. ¿De cuánto es la última aportación mensual a un fondo de ahorro donde se acumulan $645,250 con intereses del 9.66% anual capitalizable por mes? Suponga que son 60 y crecen 5.2% sucesivamente.

a) $28,640.35 *b*) $28,980.90 *c*) $30,935.61 *d*) $29,321.44 *e*) Otra

27. ¿Cuántos pagos quincenales de $1,595 deben hacerse con un fondo para acumular aproximadamente $45,000 suponiendo que se ganan intereses del 14.58% capitalizable por quincena?

a) 26 *b*) 29 *c*) 30 *d*) 25 *e*) Otra

28. ¿En cuánto deben incrementarse cada bimestre las 15 aportaciones bimestrales, en un fondo para acumular $750,000? Suponga que el incremento es aritmético, la primera es por $28,000 y los intereses son del 10.65% anual capitalizable por bimestre.

a) $1,529.68 *b*) $2,294.66 *c*) $1,987.33 *d*) $1,944.03 *e*) Otra

29. ¿Cuánto se acumula en un fondo de jubilación si durante 13 años se hacen depósitos mensuales que crecen $3 cada mes, se ganan intereses del 8.88% capitalizables por mes y el primero es por $3,323?

a) $985,793.91 *b*) $1’129,435.03 *c*) $898,379.63 *d*) $1’031,956.15 *e*) Otra

30. ¿Cuánto dinero se acumula en el fondo del problema 29 si las aportaciones crecen 1.8% cada mes?

a) $2’397,421.42 *b*) $3’878,429.33 *c*) $4’329,408.45 *d*) $4’108,448.56 *e*) Otra

31. ¿A cuánto ascienden los intereses del problema 29?

a) $529,375.43 *b*) $554,658 *c*) $329,085.43 *d*) $447,298.15 *e*) Otra

32. ¿De cuánto es la renta mensual que un empleado percibirá durante 15 años después de jubilarse si cotizó durante 24 años, su operadora de pensiones le bonifica el 11.22% de intereses anual capitalizable por mes y sus aportaciones bimestrales crecen 5.3% en promedio cada año? Considere que la primera fue por $625.

a) $7,215.61 *b*) 7,873.86 *c*) $5,693.42 *d*) $6,065.33 *e*) Otra

33. La aportación anual neta actual de un obrero a su operadora de pensiones es por $723, ¿de cuánto podrá disponer cuando se retire, evento que sucederá dentro de 7 años, si le pagan intereses del 7.2% anual capitalizable por año y estará cotizando durante 26 años en total? Suponga que crecen 5.36% cada año.

a) $35,923.84 *b*) $38,641.33 *c*) $40,105.23 *d*) $29,369.91 *e*) Otra

34. ¿Cuánto se acumula en un fondo para conservación de carreteras durante 5 años si la primera aportación mensual es de $165,000 y las siguientes crecen 0.25% de manera sucesiva? Considere que se generan intereses del 9.75% nominal mensual.

a) $10’875,429.03 *b*) $13’704,089.43 *c*) $12’048,329.35 *d*) $11’963,429.58 *e*) Otra

35. ¿Cuánto se acumula en el fondo del problema 34 si los pagos crecen $1,500 cada mes?

a) $14’329,396.61 *b*) $13’087,923.68 *c*) $15’946,655.15 *d*) $12’804,635.48 *e*) Otra

36. Con $40,000 se constituye un fondo que genera intereses del 13.2% anual capitalizable por quincena. Cinco meses después se continúa con pagos mensuales que crecen 8.3% cada semestre durante 6 años el primero de los cuales es por $8,500, ¿de cuánto se dispondrá al final de 8 años contados desde el pago de los $40,000?

a) $1’043,208.95 *b*) $1’125,615.03 *c*) $1’861,269.70 *d*) $1’845,269.70 *e*) Otra

37. ¿Cuánto se genera por concepto de intereses en el problema 36?

a) $765,329.45 *b*) $836,045.88 *c*) $423,321.03 *d*) $678,429.63 *e*) Otra

Capítulo 8

Acciones, bonos y obligaciones

Contenido de la unidad

En este capítulo se presentan los elementos para comprender cómo se realizan las operaciones de compraventa, y cómo se evalúan los rendimientos y las utilidades de algunos valores y títulos, que se negocian en la Bolsa de Valores y otras instituciones financieras. También se orienta al inversionista y al profesional de las finanzas para que tomen la mejor decisión en el momento de realizar sus proyectos de inversión.

Esta interesante rama de las matemáticas financieras se ha dividido en dos partes, que se complementan. En la primera se estudian los bonos y las obligaciones; en la segunda, las acciones y otros títulos. Primero se presenta la metodología para calcular las utilidades, las tasas de interés y de rendimiento anual, el valor de emisión, de redención y de compraventa de estos títulos de inversión y, después, se estudian las acciones haciendo énfasis en la manera en que se obtienen los rendimientos efectivos anuales y mensuales.

8.1 Introducción

Es común que las empresas, públicas o privadas, necesiten grandes capitales para financiar sus proyectos, de tal manera que les sería prácticamente imposible conseguirlos de un solo inversionista como en los ejemplos que hasta ahora se han considerado en esta obra. Se logra la participación de varios inversionistas con la emisión de títulos de crédito que se conocen como *bonos* y *obligaciones*, los cuales son adquiridos por personas físicas o jurídicas, quienes se convierten en prestamistas del organismo emisor.

Es común que al conseguir un préstamo en tales condiciones, la empresa emisora se comprometa a pagar a quienes le prestaron, es decir, a los inversionistas, una cantidad fija y periódica por concepto de intereses, mediante los cupones adjuntos a los bonos y las obligaciones. Asimismo, la emisora se obliga a reintegrarles el valor del título de crédito en su fecha de redención o vencimiento.

Otra manera de que las empresas o sociedades mercantiles consiguen dinero ajeno es por medio de las *acciones*, en cuyo caso los inversionistas, es decir, los accionistas, se convierten en copropietarios de la empresa y los beneficios que obtienen, los cuales se llaman *dividendos,* se originan con base en las ganancias, o pérdidas, que la empresa declara para un cierto tiempo.

Las transacciones y operaciones de compraventa de estos títulos de inversión se realizan principalmente en la sección de remates de las bolsas de valores y en los bancos. La variedad de alternativas de inversión es muy amplia y generalmente el inversionista requiere del auxilio de personal capacitado, es decir, de los *agentes de bolsa,* profesionales que le ayudan a tomar la mejor decisión a la hora de invertir su dinero.

Es importante señalar que el mercado de valores está conformado por el *mercado de dinero* y el *mercado de capitales*. En el mercado de dinero se emiten y comercializan instrumentos de crédito a corto plazo, con alta liquidez y bajo riesgo, por lo general, *valores de renta fija,* es decir, que ofrecen rendimientos o ganancias que se conocen de antemano.

En cambio, en el mercado de capitales, generalmente se emiten y negocian valores a largo plazo de baja liquidez y de más alto riesgo, los cuales pueden ser de renta fija o variable.

A continuación se analizan algunos instrumentos del mercado de dinero.

Los certificados del Tesoro (CT)

Son instrumentos que se crearon con el propósito de financiar la inversión productiva del gobierno central —lo que propició un sano desarrollo del mercado de valores— y para regular tanto el circulante del país como las tasas de interés que se utilizan en casi todo tipo de inversiones.

Los CT son colocados con descuento mediante subasta pública en la que el Banco Central actúa como agente exclusivo, y son adquiridos por las casas o puestos de bolsa y los bancos, que los comercializan y ofrecen al inversionista.

El plazo de redención de los CT varía de acuerdo con las necesidades del Banco Central, pero generalmente sus plazos varían en cada país. Son de bursatilidad alta y muy bajo riesgo, ya que son emitidos por el gobierno central.

Pagaré bancario

Los *pagarés bancarios* son instrumentos que suscriben las instituciones de crédito, con rendimientos liquidables al vencimiento; se colocan mediante ofertas pública y privada, y cuentan con la garantía del patrimonio de la empresa emisora.

Tienen alta bursatilidad y su plazo de vencimiento es determinado por la emisora.

Aceptaciones bancarias

Las *aceptaciones bancarias* son letras de cambio de bursatilidad media con valor nominal establecido en cada país, son emitidas por las empresas a su propia orden, y aceptadas por alguna institución de banca múltiple con créditos que conceden a la emisora.

Se colocan mediante oferta pública, a través de las casas o puestos de bolsa, u oferta privada, por medio de las instituciones bancarias. Cuentan también con la garantía del patrimonio del organismo emisor.

Bonos ajustables del gobierno central o ajustabonos

Los *ajustabonos* son títulos de crédito en los cuales se consigna el compromiso, del gobierno central, de pagar el valor al vencimiento. Su valor nominal es de $100 y se ajusta cada quincena en relación con el Índice Nacional de Precios al Consumidor.

Se colocan en el mercado con plazos mayores que un año, de 3 a 5 años, en la actualidad, y cuentan con un nivel medio de bursatilidad.

Bonos de desarrollo del gobierno central

Son títulos de crédito con valor nominal de $100, vencimiento a 1 y 2 años, y pagan intereses cada 28 días. Se colocan mediante subasta del Banco Central y son adquiridos por los bancos y las casas o puestos de bolsa, para después venderlos al público inversionista. Su riesgo es bajo y su bursatilidad alta, porque son respaldados por el gobierno central.

Certificados de participación ordinarios (Cpos)

Los *Cpos* son emitidos por una institución de crédito con cargo a un fideicomiso, cuyo patrimonio está constituido por bienes que le son aportados.

La emisora está obligada sólo hasta por el monto del patrimonio fideicomitivo.

Su denominación es de $100 y múltiplos, son colocados con plazos de 3 a 8 años y pagan intereses en plazos de 28 o 91 días, los cuales se determinan tomando como base la tasa mayor de pagarés de ventanilla.

Son de bursatilidad baja, pero aumenta cuando están avalados por el gobierno estatal o central.

Bonos del Tesoro

Los *bonos del Tesoro* son títulos que se cotizan en dólares. Aunque su rendimiento se considera fijo, porque se obtienen con descuento, su valor en el mercado es variable, porque depende del tipo de cambio moneda-dólar, por lo que quien los adquiere deberá hacer proyecciones sobre los posibles valores a futuro del tipo de cambio.

Su valor nominal es de $1,000, se emiten a corto plazo, pudiendo liquidarse de un día para otro, y no representan alto riesgo, porque son emitidos por el gobierno central.

Papel comercial

El *papel comercial* es un pagaré por el cual el emisor se compromete a pagar una cantidad de dinero en la fecha de vencimiento. Su riesgo es valuado por una empresa calificadora de valores, basándose en la capacidad de pago y liquidez de la emisora, así como en la garantía del aval que respalde la emisión.

Su denominación varía en cada país, lo mismo que su plazo. Es autorizado por una comisión que fija un monto máximo de colocación en el mercado.

Bonos bancarios

Estos títulos se emiten a largo plazo por instituciones crediticias y generalmente se colocan en el mercado primario a través de subastas en las que participan las casas o puestos de bolsa y otras instituciones. Tienen alta bursatilidad y generan *ganancias de capital* mediante el diferencial entre el valor de adquisición y el de redención si se adquieren con descuento; además, pagan intereses en cupones de vencimiento. Estos intereses se fijan de acuerdo con la tasa que pagan los certificados del Tesoro, los pagarés de ventanilla, la tasa de interés interbancaria de equilibrio TIIE o la tasa de interés interbancaria promedio TIIP.

Pueden mencionarse, además, los certificados de participación en plata (Ceplatas), los petrobonos y los udibonos.

Los *certificados de participación en plata* (Ceplatas) son respaldados por un fideicomiso de la plata.

Los *petrobonos* son respaldados por el petróleo nacional.

Los *certificados de inversión* se cotizan en unidades de inversión, y buena cantidad de acciones que corresponden al mercado de capitales; convierten al inversionista en propietario y socio de inversión del organismo emisor, que en este caso son las grandes compañías comerciales, industriales y de servicio.

8.2 Bonos y obligaciones

Los bonos y las obligaciones pueden ser *registrados* o *nominativos*, si tienen el nombre del propietario, o pueden ser *al portador* o *no registrados,* cuando no lo tienen.

Evidentemente, los segundos son más comerciales y más fácilmente negociables.

Cabe señalar que la diferencia fundamental entre bono y obligación es que los bonos son emitidos por el gobierno o por alguna de sus dependencias, mientras que las obligaciones son emitidas por una empresa privada.

El calificativo de los bonos depende principalmente del propósito para el que fueron creados, mientras que las obligaciones se clasifican como: *indizadas, convertibles* o *subordinadas*; pero, principalmente, según el respaldo que tienen, es decir, pueden ser:

Hipotecarias Cuando están garantizadas mediante una hipoteca sobre los bienes inmuebles que son propiedad de la emisora.

Fiduciarias Cuando están garantizadas con un fideicomiso.

Quirografarias Si la garantía se fundamenta en el prestigio y la solvencia del organismo emisor.

Los elementos esenciales de una obligación o bono son:

Fechas

Fecha de emisión El día cuando la empresa pública o la privada emite los títulos, colocándolos en el mercado de valores.

Fecha de redención Aquella en la que el organismo emisor se compromete a reembolsar el capital que le prestaron los inversionistas.

Fecha de compraventa Es el día cuando los títulos, las obligaciones o los bonos son transferidos a un tercero.

Valores

Valor nominal o denominación Es el valor consignado en el documento.

Valor de redención Es el que el organismo emisor devuelve al inversionista o al tenedor del título en la fecha de redención. Este valor puede ser:

- Igual al valor nominal, al de emisión, en cuyo caso el título *se redime a la par.*
- Mayor que el valor nominal; en este caso el título *se redime con premio o con prima*.
- Menor que la denominación, en cuyo caso se dice que el título *se redime con descuento*.

El premio o descuento, con el que *se redime*, o se emite, una obligación o un bono se determina de la forma siguiente:

Cuando se dice que un bono *se redime a 105,* significa que el valor de redención es un 5% mayor que el de emisión, es decir, hay un premio o prima del 5% sobre el valor nominal.

En cambio, si un bono o una obligación se *redimen a* 93, entonces el valor de redención es igual al 93% del valor de emisión, es decir, hay un 7% de descuento con respecto al valor nominal.

Valor de compraventa o precio de mercado: Éste se localiza entre el valor de emisión y el de redención; es el que paga un inversionista que adquiere obligaciones o bonos.

También la compraventa puede realizarse *con prima*, si se transfiere a un precio mayor que el de redención, *con descuento* si se negocia a menor precio que el de redención y *a la par* si el valor de compraventa es igual al de redención.

Ejemplo 1

Compra de una obligación con descuento

Se dice que una obligación con valor nominal de \$80 que se redime a la par se "compra a 92", cuando el valor de compraventa es el 92% de su valor de redención, es decir, se compró en

$$0.92(80) = \$73.60$$

Ejemplo 2

Compra de un bono con descuento

Un bono con valor nominal de \$100 se redime a 110. ¿En cuánto se negocia si *se compra a* 95, es decir, con descuento del 5%?

El valor de redención M es un 10% mayor que su valor nominal N y el valor de compra-venta C es un 5% menor que el valor de redención, es decir:

$$M = 1.10(N)$$

$$M = 1.10(100)$$

$$M = \$110.00 \text{ y}$$

$$C = 0.95(M) = 0.95(110)$$

$$C = 0.95(110) \text{ o}$$

$$C = \$104.50$$

Partes

El propio documento, *obligación* o *bono,* que generalmente está acompañado de:

Cupones Con los cuales el emisor paga los intereses al inversionista; estos cupones pueden ser desprendibles del documento, impresos con fecha seriada, y pueden hacerse efectivos en un banco al final de cada periodo.

Algunas veces no hay cupones, porque los intereses no se pagan en forma periódica, sino hasta el final en la fecha de redención. Con los recursos electrónicos actuales, los cupones no son físicamente desprendibles.

Rendimientos y tasas

Los bonos y las obligaciones ofrecen dos clases de beneficio para el inversionista que los adquiere: los *intereses* y las *ganancias de capital*.

Los *intereses* que paga la emisora con una tasa de interés r, a través de los cupones adjuntos al propio título, y de manera periódica durante el plazo, es decir, desde la fecha de emisión hasta la de redención.

Las *ganancias de capital* son las utilidades que obtiene el inversionista por haber prestado su dinero al organismo emisor, y equivalen a la diferencia entre el capital que invierte y los montos que recibe después de la compra. Están determinadas por una tasa de rendimiento anual i capitalizable en p periodos por año, donde p es el número de cupones por año.

En los bonos, las obligaciones y otros títulos de inversión generalmente se indican:

- El nombre o razón social del organismo emisor.
- Las fechas de redención y de pago periódico de intereses, es decir, las fechas en las que vencen los cupones.

- El valor nominal, y en caso de ser *registrado* o *nominal;* el nombre del propietario.
- La tasa de interés r que paga la emisora y el total de bonos emitidos.

Algunas cláusulas adicionales como las que estipulan las condiciones para redimir el título anticipadamente.

En los cupones se indica:

- El nombre de la empresa emisora.
- El valor de cada cupón, es decir, los intereses con letra y número.
- La emisión del bono o la obligación a la que corresponden y la fecha en la que deben hacerse efectivos.
- El número del cupón y el número de la obligación o del bono al que corresponde.

Para concluir, es importante señalar que los tres valores y las fechas de una obligación o un bono, se ubican en el tiempo, como se aprecia en la figura 8.1, donde la fecha de emisión y de compraventa pueden coincidir.

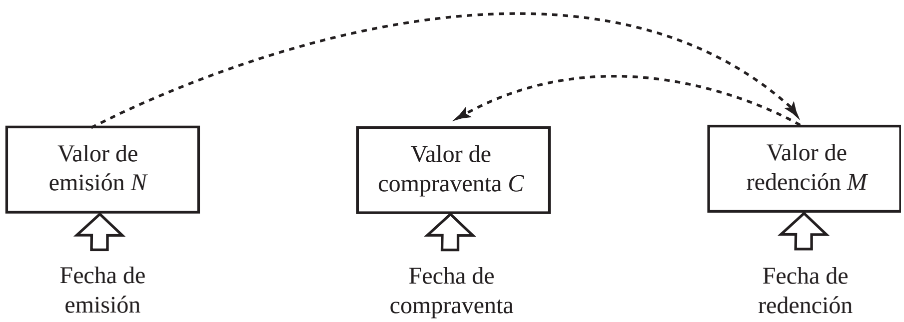


FIGURA 8.1

Ejercicios 8.2

1. ¿Cuál es el propósito de una empresa al emitir bonos y obligaciones?
2. ¿Cuál es la diferencia principal entre los bonos y las obligaciones?
3. De acuerdo con su garantía de pago o respaldo, ¿cómo se clasifican las obligaciones?
4. ¿De acuerdo con qué criterios se clasifican los bonos?
5. ¿Cómo es un bono registrado?
6. ¿Qué características tienen las obligaciones quirografarias?
7. Enumere los elementos esenciales de una obligación o un bono, y descríbalos brevemente.
8. ¿Qué datos importantes se indican en los bonos y las obligaciones?
9. ¿Qué es un cupón y qué información contiene?

10. ¿Qué significa que una obligación "se redima a 108"?
11. ¿Qué significa que un bono o una obligación "se rediman a 95"?
12. ¿Qué quiere decir que una obligación "se redima con descuento"?
13. ¿Qué significado tiene que un bono "se redima con prima"?
14. ¿Qué significa que un bono se compre con descuento?
15. ¿Qué significado tiene que una obligación se adquiera con premio?
16. ¿Qué diferencia hay entre *intereses* y *ganancias de capital?*
17. ¿Cómo se utilizan las tasas r e i en el comercio de bonos y obligaciones?
18. ¿Qué significa que una obligación "se compra a 92"?
19. ¿En cuánto se negocia un bono con valor nominal de $100 si se compra a 110 y se redime a la par?
20. ¿Cuánto paga un inversionista por un bono con valor nominal de $200, se redime a 115 y lo compra a 90 con descuento?
21. ¿Cuánto se paga por un bono de $60 si se compra con prima a 110 y se redime con descuento a 98?
22. Si una obligación se redime a 108 y su valor nominal es de $200, ¿cuánto pagará la emisora al inversionista al vencer el plazo?
23. ¿Cuánto paga la emisora al redimirse un bono con valor nominal de $100 si se redime a 120?
24. ¿Cuánto pagará la emisora al final del plazo por una obligación con valor nominal de $120, si se redime a 98?
25. ¿Cuál es el valor de redención de un bono con valor nominal de $300 si se redime a 103?
26. ¿Cuál es el valor de compraventa de una obligación que se redime a 112, con valor nominal de $300 y se compra a 92?
27. ¿En cuánto se transfiere un bono que se redime a 97, tiene valor nominal de $100 y se compra a 105?

8.3 Transferencia de bonos y obligaciones

El beneficio que obtiene un inversionista al comprar bonos y obligaciones depende básicamente de dos tasas: la *tasa de interés nominal, r,* que es determinada y pagada por el organismo emisor, y la *tasa de rendimiento, i,* para las ganancias de capital, es decir, las utilidades que logra el inversionista.

Es evidente que el beneficio depende también de factores como el plazo o tiempo que falta para la redención del documento, la periodicidad del pago de intereses a través de los cupones y el valor de redención, entre otros.

Esta clase de títulos de inversión se negocian con la participación y el auxilio de personal especializado, asesores financieros o agentes de bolsa, en operaciones que se realizan:

En *una fecha de cupón,* es decir, el día cuando la emisora paga los intereses, o sea, la fecha de vencimiento de cada uno de los cupones.

Entre fechas de cupón, o sea cualquier día distinto a las fechas de cupón.

En el primer caso, cuando la compraventa se realiza en la fecha de vencimiento de cualquier cupón, el precio se determina sumando dos capitales C_A y C_B,que corresponden respectivamente al valor presente del valor de redención *M* del bono o de la obligación, y el valor presente de la serie de cupones que se cobrarán después de la transferencia, sin incluir el que vence el día de la compraventa, porque se supone que el vendedor ya lo cobró.

El diagrama de tiempos de la figura 8.2 puede ayudar a visualizar esta situación, *R* es la renta o valor de cada cupón, es decir, el monto de los intereses que paga la emisora.

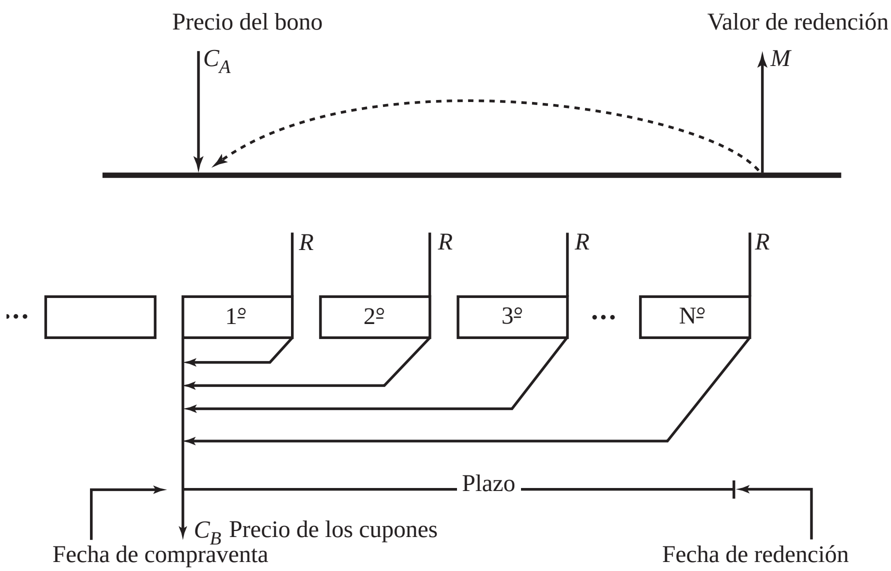


FIGURA 8.2

El precio de la obligación o del bono, C_A, es el valor presente del valor de redención *M* y se obtiene con la fórmula del interés compuesto.

$$M = C(1 + i/p)^{np}$$

de donde

$$C = M(1 + i/p)^{-np}$$

El otro capital C_B es el valor presente de *np* rentas *R,* el valor de cada cupón, y se evalúa con la fórmula del teorema 5.2, para anualidades ordinarias, es decir:

$$C_B = R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

En consecuencia, el *precio de mercado,* es decir, lo que se paga por el título y sus cupones estará dado por la fórmula del siguiente teorema.

Teorema 8.1

El *precio de mercado* de una obligación o un bono *np* periodos antes de su redención, incluyendo los cupones, es:

$$C = M(1+i/p)^{-np} + R\left[\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}\right]$$

donde:

M es el valor de redención

R es el valor de cada cupón

i es la tasa de rendimiento anual, capitalizable en p periodos por año y

n es el plazo en años, el tiempo que hay entre la fecha de compraventa y la de redención

Note usted que:

Con excepción de R y M, las literales de esta fórmula tienen el significado de antes y, además, el valor de cada cupón está dado por

$$R = N(r/p)$$

donde N es el valor nominal de la obligación o bono y r es la tasa de interés anual, y es determinada por la emisora.

También es cierto que M y N son iguales cuando el bono se redime a la par.

Ejemplo 1

Determinación del precio de compraventa de un bono y las utilidades para el inversionista

Ⓕ

Una compañía de teléfonos emitió bonos de $100 que vencen a la par el 1 de julio de 2012, con intereses del 10.4 % anual pagaderos el primer día de los meses de enero, abril, julio y octubre de cada año, es decir, cada trimestre. ¿Cuánto deberá pagarse por cada bono el 1 de octubre de 2007, si se pretenden rendimientos del 15% anual compuesto por trimestre? ¿A cuánto ascienden las utilidades para el inversionista que los compra?

solución

a) Para encontrar el precio de compraventa C del bono, se reemplazan los siguientes valores en la ecuación 8.1.

M por 100, el valor de redención.

i por 0.15, la tasa de rendimiento anual.

p por 4, porque los cupones y la frecuencia de conversión son trimestrales.

$i/p = 0.15/4 = 0.0375$ por trimestre.

R por 2.60, ya que R depende del valor nominal y de la tasa de interés r y

$$R = 100(0.104/4)$$
$$R = \$2.60$$

El plazo en trimestres es $np = 19$, los que faltan para la redención del bono, es decir, los trimestres que hay entre el 1 de octubre de 2007 y el 1 de julio de 2012, inclusive.

El valor de compraventa de cada bono es, por lo tanto:

$$C = 100(1 + 0.104/4)^{-19} + 2.60\left[\frac{1-(1.0375)^{-19}}{0.0375}\right]$$
$$C = 100(0.496850805) + 2.60(13.41731187)$$
$$C = 49.6850805 + 34.88501086$$
$$C = 84.57009135$$

o $\qquad C = \$84.57$ redondeando

b) Para conocer la utilidad neta para el inversionista, es decir, los intereses, se resta el valor de compraventa del monto total que recibirá después por el bono y los 19 cupones.

$$\text{Utilidad} = \underbrace{100.00}_{\text{bono}} + \underbrace{19(2.60)}_{\text{cupones}} - \underbrace{84.57}_{\text{inversión}} = \underbrace{\$64.83}_{\text{utilidad}}$$

Ejemplo 2

Valor de compraventa de una obligación

¿Cuál es el valor de compraventa de una obligación quirografaria con valor nominal de \$100 e intereses del 12.72%, pagaderos en cupones mensuales suponiendo que se rediman a 108, la compraventa se realiza 3.5 años antes del vencimiento y se ofrecen al inversionista con el 13% de interés anual compuesto por semestre?

solución

Primero se obtiene la tasa *i,* capitalizable por mes, equivalente al 13% nominal semestral igualando los dos montos.

$$(1 + i/12)^{12} = (1 + 0.13/2)^2$$
$$1 + i/12 = (1.065)^{2/12} \text{ se saca raíz doceava}$$
$$1 + i/12 = 1.010551074$$
$$i = (1.010551074 - 1)12$$
$$i = 0.126612888$$

El valor de cada cupón mensual es

$$R = 100.00(0.1272/12) \qquad R = N(r/p)$$
$$R = \$1.06$$

El valor de redención, puesto que se redimen a 108, es $M = 100(1.08)$ o $M = \$108$, y el plazo en años es de $n = 3.5$, de donde el número de cupones es $np = 3.5(12) = 42$. Todo se reemplaza en la ecuación 8.1 para hallar el valor de compraventa.

$$C = 108(1 + 126612888/12)^{-42} + 1.06\left[\frac{1-(1.010551074)^{-42}}{0.010551074}\right]$$

$$(A) \qquad C = 69.49867114 + 35.814687$$

$$C = 105.3133581 \quad \text{o} \quad C = \$105.31 \text{ redondeando}$$

Nótese que:

*El primero de los términos en la ecuación (A), 69.49867114, es lo que se paga por la obligación de 108 dólares, y el segundo, 35.814687, es lo que se invierte por los 42 cupones mensuales que se cobrarán después de la compraventa.

*También es cierto que, para las operaciones en el desarrollo anterior, se sustituye el valor de

$$1 + i/p = 1.010551074,$$

es decir, no era necesario despejar i al encontrar la tasa equivalente.

*La obligación se está comprando con descuento, puesto que lo que se invierte, \$105.31, es menor que el valor de redención, \$108. Además, la utilidad para el inversionista no es, como pudiera pensarse, la diferencia entre estos dos valores, sino la diferencia entre lo que invierte y lo que recibirá después, es decir,

$$\text{Utilidad} = 108.00 + 42(1.06) - 105.31$$
$$= 152.52 - 105.31 = \$47.21 \text{ por cada obligación}$$

Ejemplo 3

Utilidades al invertir en obligaciones

Cuatro años antes de que se rediman, el asesor Rodríguez compra un millar de obligaciones en $182,575. ¿Cuánto ganará con su inversión si se sabe que el tipo de rendimiento anual es del 13.2% capitalizable por cuatrimestre, y la emisora paga intereses de1 10.35% anual en cupones cuatrimestrales?

solución

En la ecuación del teorema 8.1 se sustituyen los números siguientes:

$C = 182{,}575$, el valor de compraventa de cada obligación.
$p = 3$, la frecuencia de conversión y de pago de intereses.
$i = 0.132$, la tasa de rendimiento anual compuesta por cuatrimestre, $i/p = 0.132/3$ o $i/p = 0.044$.
$n = 4$ años, el plazo entre la compraventa y la redención.
$np = 12$, el número de cupones por cobrar.
$r = 0.1035$, la tasa de interés anual que paga la emisora a través de los cupones.

M es la incógnita, el valor de redención y se supone igual al valor nominal de las obligaciones, porque se rediman a la par, al no decir lo contrario.

El pago cuatrimestral por intereses es

$$R = M(0.1035/3) \quad \text{o} \quad R = (0.0345)M$$

Entonces

$$182.575 = M(1.044)^{-12} + (0.0345)\left[\frac{1-(1.044)^{-12}}{0.044}\right]M$$

$$182.575 = M(0.596477431) + M(0.316398378)$$

$$182.575 = M(0.912875809)$$

de donde

$$M = 182.575/0.912875809 \quad \text{o} \quad M = \$200.00 \text{ redondeando}$$

Significa que el valor nominal, y de redención, de las obligaciones es de $200. El valor de cada cupón es, por lo tanto

$$R = 200.00(0.0345) \text{ o } R = \$6.90$$

y las utilidades para el asesor son:

$$U = 200.00 + 12(6.90) - 182.575 \text{ o}$$

$$U = \$100.225 \text{ por cada obligación.}$$

Por las 1,000 obligaciones serán:

$$\$100.225(1{,}000) = \$100{,}225.00$$

Ejercicios 8.3

1. ¿Cómo se evalúan las utilidades, en dinero, al invertir en obligaciones y bonos?
2. La compañía Aeronaves del Sureste emite obligaciones con valor nominal de \$200 pagando intereses del 8.8%, anual con cupones que vencen el día 15 de los meses de enero, mayo y septiembre de cada año. ¿Cuál es el precio de cada obligación el 15 de mayo de 2007 si se rediman el 15 de septiembre de 2013 y se pretenden rendimientos del 10.5% anual compuesto por cuatrimestre?
3. ¿Cuál es el valor de compraventa de un bono de \$200, 6 años antes de su redención, si la emisora paga intereses en cupones semestrales de \$18 y se pretende un rendimiento del 12% anual capitalizable por semestre?
4. ¿Una obligación de \$100 de la Siderúrgica del Norte paga intereses del 18% anual compuesto por cuatrimestre. ¿Cuál es el valor de compraventa el 1 de febrero si vence el 1 de octubre del año siguiente y se pretende un rendimiento del 16% nominal cuatrimestral?
5. Una obligación de \$80 de la aceitera Las Juntas se negocia en \$80.5778 el 2 de agosto de 2006. ¿Qué intereses está pagando en cupones semestrales si se redime a la par el 2 de agosto de 2011 y se tiene una tasa de rendimiento del 12.8% nominal semestral?
6. Encuentre el precio de compraventa el 15 de agosto de 2006 de una obligación hipotecaria con valor nominal de \$300 que paga intereses del 16% anual en cupones trimestrales y se desea un rendimiento del 18% anual compuesto por trimestre; además:

   a) Se redime a la par el 15 de agosto de 2010.
   b) Se redime a 120 el 15 de noviembre de 2009.
   c) Se redime a 72 el 15 de febrero de 2011.

7. Un bono de \$100 se redime a la par el 11 de diciembre de 2009, paga intereses del 11.4% anual en cupones que vencen el undécimo día de cada mes del año. ¿En cuánto se transfiere el 11 de marzo de 2007 si se obtiene un rendimiento del 11.4 % nominal mensual?
8. Resuelva el problema 7 si el bono se redime:

   a) a 85 *b*) a 120

9. El 19 de marzo de 2007 se adquiere mil bonos en \$318,421.82; ¿qué tasa de interés está pagando el organismo emisor en cupones trimestrales, si 7 trimestres después el inversionista que los compra recibirá \$345,000 por los 1,000 bonos? Suponga que se rediman a 115 y que el rendimiento es del 19.20% anual compuesto por trimestre. ¿A cuánto ascienden las utilidades en dólares para el inversionista?
10. El 5 de julio de 2006 se emitieron, con 7 años de plazo, obligaciones fiduciarias con valor nominal de \$200, pagando intereses del 12% anual en cupones bimestrales. ¿En cuánto se compran el 5 de septiembre de 2010 si se pretende un rendimiento del 10.8% nominal bimestral y se supone que se rediman a 115?

11. Hace 3 años, un banco colocó en el mercado de valores una emisión de bonos por $500 millones que se rediman a 103 con plazo de 6 años. ¿Cuál es el precio de compraventa hoy si se pretende un rendimiento del 8% anual capitalizable por semestre? Suponga que la emisión fue de 2.5 millones de bonos y que se pagan intereses del 7.6% anual en cupones semestrales.

12. Resuelva el problema 11 considerando que los bonos se rediman a 95.

13. La compañía Desarrollos Turísticos del Atlántico emite obligaciones quirografarias con valor nominal de $100, que se rediman a 112, 7 años después, pagando intereses del 12.8% en cupones anuales. ¿En cuánto se comercializan 3 años después de su emisión si se pretende un rendimiento del 7% efectivo?

14. ¿Qué le conviene más al licenciado Godínez para invertir 2 millones: comprar obligaciones con el 10.5% de rendimiento anual capitalizable por semestre y valor nominal de $100 cada una, redimibles a 125, 3 años después, y pagan intereses en cupones semestrales de $30 cada uno, o adquirir bonos con valor nominal de $150, que se rediman a la par en los mismos 3 años, pagan intereses del 12.6% en cupones trimestrales, y ofrecen rendimientos del 11.2% anual capitalizable por trimestre? ¿A cuánto ascienden las utilidades en cada opción?

Seleccione la opción correcta en los problemas 15 al 27, justificándola.

15. ¿En cuánto se negocia el 16 de julio de 2007 un bono con valor nominal de $100 si se redime a 120 el 16 de enero de 2012? Considere intereses del 12.6% que se pagan en cupones trimestrales y rendimiento del 11.4% anual capitalizable por trimestre.

a) $125.33 *b*) $116.24 *c*) $120.72 *d*) $121.45 *e*) Otra

16. Obtenga las utilidades para un inversionista que adquiere 420 mil bonos en las condiciones del problema 15, pero las compra el 16 de octubre de 2008.

a) $787,421.45 *b*) $920,481.61 *c*) $964,681.94 *d*) $1’063,429.33 *e*) Otra

17. ¿Cuál es el valor de compraventa de las obligaciones con valor nominal de $150, se rediman a 98, cinco años después, y pagan intereses del 12.6% anual en cupones trimestrales? Considere que se pretenden rendimientos del 11.2% anual capitalizable por trimestre.

a) $156.61 *b*) $162.38 *c*) $160.93 *d*) $180.02 *e*) Otra

18. ¿Con qué tasa de interés anual se invirtieron los bonos que se negocian en $211.15, seis años antes de su redención, se emitieron a 105, su valor nominal es de $200 y bonifican rendimientos del 13.2% nominal bimestral? Suponga que los cupones son bimestrales.

a) 11.8% *b*) 12.3% *c*) 13% *d*) 14% *e*) Otra

19. Resuelva el problema 18 suponiendo que el valor nominal de los bonos es de $150, y se negocian 4 años antes de su vencimiento.

a) 23.63214% *b*) 22.68385% *c*) 24.18352% *d*) 25.46482% *e*) Otra

20. ¿En cuánto se comercializan las obligaciones que cuatro años y tres meses después se redimen en $100 cada una considerando que se emitieron a la par, pagando intereses del 11.5%, en cupones trimestrales, y ofrecen rendimientos del 13.2% nominal trimestral?

a) $94.54 *b*) $96.63 *c*) $95.33 *d*) $97.72 *e*) Otra

21. Obtenga el valor de compraventa el 6 de enero de 2007 de una obligación hipotecaria con valor nominal de $100, que paga intereses del 10.5%, anual en cupones bimestrales, se redime a 103, se ofrece con el 12.6% nominal bimestral y se redimen el 6 de septiembre de 2012.

a) $98.17 *b*) $94.32 *c*) $93.29 *d*) $96.75 *e*) Otra

22. ¿Cuál es el valor nominal de los bonos que el 18 de agosto de 2006 se negocian en $149.24093 cada uno? Considere que se redimen a 108, el 18 de noviembre de 2011, pagan intereses del 12.6% en cupones trimestrales y se compran para lograr un rendimiento del 13.8% anual capitalizable por trimestre.

a) $160.00 *b*) $140.00 *c*) $150.00 *d*) $170.00 *e*) Otra

23. ¿Cuánto dinero gana un inversionista que compra obligaciones quirografarias con valor nominal de $200, que se redimen a 95, cuatro años, y 8 meses después ofrecen rendimientos del 12.3% nominal cuatrimestral y los intereses del 13.71% se pagan en cupones cuatrimestrales? Suponga que invierte 3 millones de dólares.

a) $1’672,068.37 *b*) $1’529,302.62 *c*) $1’429,308.29 *d*) $1’698,328.95 *e*) Otra

24. Una importante cadena de televisión emitió obligaciones con valor nominal de $100 e intereses del 12.4% pagaderos con cupones trimestrales y plazo de 5 años. ¿Cuál es el valor de compraventa 15 meses después de la emisión si se negocian con el 10.5% de interés anual capitalizable por trimestre? Suponga que se redimen a 112.

a) $116.05 *b*) $120.93 *c*) $113.96 *d*) $118.73 *e*) Otra

25. ¿Cuánto dinero gana un inversionista que adquiere 25,000 obligaciones en las condiciones del problema 24?

a) $1’203,497.08 *b*) $1’197,407.93 *c*) $1’113,500.00 *d*) $1’268,629.63 *e*) Otra

26. ¿Cuál es el valor nominal de los bonos que 2 años después de su emisión se negocian en $187.36 , se emitieron a 105, con plazo de 6 años, ofreciendo intereses del 16.20% anual con cupones bimestrales? Considere 13.8% de rendimiento anual capitalizable por bimestre.

a) $150.00 *b*) $120.00 *c*) $170.00 *d*) $160.00 *e*) Otra

27. ¿Cuál es el valor de redención de una obligación con valor nominal de $150, que ofrece intereses del 9.6% en cupones trimestrales, y se negocia en $160.61, 27 meses antes de su redención? Suponga rendimientos del 10.8% anual capitalizable por trimestre.

a) $167.00 *b*) $165.00 *c*) $168.00 *d*) $169.00 *e*) Otra

8.4 Prima y descuento

Al comparar el valor de emisión *N* con el valor de redención *M*, puede suceder que una obligación o un bono se rediman a la par, con premio o con descuento. También es cierto que si se compara el precio de compraventa *C* con el valor de redención *M*, puede ser que:

C sea mayor que *M* y entonces se dice que la obligación o el bono se compran con *premio* o *prima*.
C es menor que *M*, y entonces se compra con *descuento*.
C es igual a *M*, el título se compra *a la par*.

Importante

*Note que aun cuando un bono se compra a la par o con prima, habrá utilidades para quien las adquiere, ya que posterior a la compra recibirá el monto de los cupones.

*Si la obligación o el bono se ***redimen a la par***, la relación entre el precio de compraventa *C* y el valor de redención *M* depende de la relación que hay entre las tasas de interés *r*, con la que el organismo emisor paga intereses y la tasa de rendimiento de tal forma que:

- Si la tasa *r* es menor que *i*, entonces el título se compra con descuento.
- Si *r* es mayor que la tasa *i*, entonces se adquiere con prima.
- Si las dos tasas son iguales, entonces la compraventa de las obligaciones o los bonos se hace a la par.

Ejemplo 1

Prima, descuento y valor de compraventa de obligaciones

Una compañía de telefonía celular emitió obligaciones quirografarias con valor nominal de $50, que se rediman a la par el 2 de agosto de 2013 y pagan intereses del 13.60% anual, en cupones que vencen el segundo día de los meses de febrero, mayo, agosto y noviembre de cada año. ¿Cuál es el valor de compraventa el 2 de febrero de 2007 si se pretenden rendimientos del:

a) 14.5% efectivo?
b) 13.60% anual compuesto por trimestre?
c) 13% nominal trimestral?

Obtenga en cada caso la prima o el descuento con el que se compran.

solución

a) Es necesario obtener la tasa compuesta por trimestre equivalente al 14.5% efectivo.

$$0.145 = (1 + i/4)^4 \quad -1 \qquad e = (1 + i/p)^p - 1$$

de donde $$1 + i/4 = \sqrt[4]{1.145} = 1.03443063$$

$$i = (0.03443063)4 = 0.13772252$$

Además:

El valor de cada cupón es $R = 50(0.1360/4)$ o $R = 1.70$

El valor nominal es $M = \$50$, el plazo en trimestres es 26, ¿por qué?, y el valor de compraventa es, por lo tanto:

$$C = 50(1.03443063)^{-26} + 1.70\left[\frac{1-(1.03443063)^{-26}}{0.03443063}\right]$$

$$C = 20.73644668 + 28.89754887$$

$$C = 49.63399555 \quad \text{o} \quad C = \$49.6340$$

Puesto que la tasa de interés, $r = 0.136$, es menor que la de rendimiento, $i = 0.13772252$, cada obligación se compra con descuento de $50 - 49.634 = 0.366$ dólares.

b) En este caso, las dos tasas son iguales, $r = i$, y las obligaciones se compran a la par, es decir, ahora:

$$C = 50(0.136/4)^{-26} + 1.70\left[\frac{1-(1.034)^{-26}}{0.034}\right]$$

$$C = 20.96215832 + 29.03784168$$

o $$C = \$50.00$$

c) El valor de compraventa en esta opción es:

$$C = 50(1 + 0.13/4)^{-26} + 1.70\left[\frac{1-(1.0325)^{-26}}{0.0325}\right]$$

$$C = 21.7684957 + 29.5344959$$

$$C = 51.30299247$$

o $$C = \$51.3030$$

que es mayor que el valor de redención; se adquieren con premio, porque r es mayor que i, 0.1377 es mayor que 0.13.

Ejemplo 2

Tasa de interés al comprar bonos con descuento

F

Obtenga la tasa de interés semestral con la que una compañía petrolera emitió bonos con valor nominal de \$100, si se adquieren con un descuento total del 18%, 3 años antes de su redención. Suponga que se generan rendimientos del 21% anual capitalizable por semestre.

solución

El precio de compraventa de cada bono es:

$$C = 100.00 - 0.18(100) = \$82$$

Entonces, al reemplazar en la ecuación del teorema 8.1, queda:

$$82 = 100(1 + 0.21/2)^{-6} + R\left[\frac{1-(1.105)^{-6}}{0.105}\right]$$

$$82 = 54.93211643 + R(4.292179388)$$

De donde:

$$R = (82.00 - 54.93211643)/4.292179388 \qquad \text{o}$$

$R = 6.306326258$, es el valor de cada cupón semestral. Entonces redondeando R, la tasa de interés semestral es:

$$6.3063 = 100(r/2) \qquad R = N(r/p)$$

De donde

$$6.3063(2)/100 = r$$

$$r = 0.126126 \text{ o } 12.6126\% \text{ anual, aproximadamente}$$

Note que r es menor que i, ya que se compraron con descuento.

Ejemplo 3

Utilidades al invertir en obligaciones

Una compañía de aceites y lubricantes coloca en el mercado de valores una serie de obligaciones de \$150 cada una, redimibles a la par en un plazo de 6 años. ¿De cuánto serán las utilidades para una persona que invierte 2.5 millones de dólares en tales obligaciones 2 años antes de su redención? Suponga rendimientos del 25.8% anual capitalizable por bimestre y que la aceitera paga intereses del 18% en cupones bimestrales.

solución

Es necesario hallar el valor de compraventa de cada obligación, sustituyendo en la ecuación del teorema 8.1, los siguientes valores.

El valor nominal, $N = 150$, igual al valor de redención.

La tasa de rendimiento $i = 0.258$ con $p = 6$, porque se capitaliza cada bimestre y 6 bimestres tiene el año.

La tasa de interés $r = 0.18$ anual, que se paga con cupones bimestrales y, por lo tanto, el valor de cada cupón es

$$R = 150(0.18/6) = 4.50$$

El plazo es $n = 2$ años y el número de cupones es

$$np = 2(6) = 12.$$

El precio de cada bono es, por lo tanto:

$$C = 150(1 + 0.258/6)^{-12} + 4.50\left[\frac{1-(1+0.258/6)^{-12}}{0.258/6}\right]$$

$$= 150(0.603376371) + 4.50(9.223805319)$$

$$= 90.5064557 + 41.50712394 \quad \text{o}$$

$$C = \$132.0135796$$

La utilidad por cada bono es igual a la diferencia entre el precio con el que se adquiere y el total que se recibirá en los cupones y el propio bono en su redención, es decir:

$$U = 12(4.50) + 150.00 - 132.0136$$

$$U = \$71.9864$$

Con 2.5 millones de dólares se compran:

2'500,000/132.0136 = 18,937.4 bonos.

Entonces, la utilidad total para el inversionista es

$$U = 18{,}937(71.9864)$$

$$U = \$1'363{,}206.46$$

Ejemplo 4

Descuento y utilidades en la compra de bonos

Calcular la prima o el descuento y las utilidades que genera para un inversionista cada bono que emitió la compañía de ferrocarriles con valor nominal de $100. Suponga que se rediman a 117, el 7 de agosto de 2014, que pagan intereses del 13.9% en cupones que vencen el séptimo día de los meses de febrero y agosto de cada año, que la tasa de rendimiento es del 12.5% compuesto por semestre y que se negocian el 7 de febrero de 2007.

solución

El plazo es de 15 semestres, los que hay entre el 7 de febrero de 2007 y el 7 de agosto de 2014.
El valor de cada cupón es:

$$R = 100(0.139/2) \qquad R = N(r/p)$$

$$R = 6.95$$

Porque se rediman a 117, el monto al final del plazo es

$$M = 100(1.17) \quad \text{o} \quad M = 117.00$$

El valor de compraventa es entonces:

$$C = 117(1 + 0.125/2)^{-15} + 6.95\left[\frac{1-(1.0625)^{-15}}{0.0625}\right]$$

$$C = 117(0.402778165) + 6.95(9.555549357)$$
$$C = 47.12504533 + 66.41106803$$
$$C = 113.5361134$$
o $$C = \$113.5361$$

El descuento es la diferencia entre este valor y el de redención.

$$\text{Descuento} = 117.00 - 113.5361 \quad \text{o} \quad \$3.4639$$

La utilidad para el inversionista por cada bono que compra es

$$U = 15(6.95) + 117.00 - 113.5361$$
$$U = \$107.7139$$

Ejercicios 8.4

1. Explique qué significan el *descuento* y *la prima* en la compra de bonos y obligaciones.

2. ¿Qué relación existe entre las tasas de interés r y las de rendimiento i, para que un bono o una obligación que se redimen a la par se compren con descuento? ¿Con prima? ¿A la par?

3. El 15 de abril de 2005, Arrendamiento Dinámico, S. A., emitió obligaciones quirografarias con valor nominal de $150 y vencimiento el 15 de junio de 2012. Obtenga el valor de compraventa y la prima el 15 de octubre de 2006 suponiendo que se redimen a la par, pagan intereses del 13.2% en cupones bimestrales que vencen el decimoquinto día de los meses pares de cada año y ofrecen rendimientos del 11.85% anual capitalizable por bimestre.

4. Resuelva el problema 3 suponiendo que las obligaciones se redimen a 118.

5. Una obligación hipotecaria de la Promotora del Pacífico, con denominación de $100, vence el l de marzo de 2011. Los intereses del 21% anual se cobran en cupones cuatrimestrales el primer día de los meses de marzo, julio y noviembre de cada año. Determine el valor de compraventa y el descuento o la prima el primer día de julio de 2007 si se tienen rendimientos del 24.9% anual capitalizable por cuatrimestre y

a) Se redime a la par. *b*) Se redime con premio a 121.

6. El 10 de enero de 2006 una compañía de televisión emite obligaciones con valor nominal de $300, que se redimen a 98, el 10 de enero de 2011. y pagan intereses del 11% anual, el décimo día de enero, abril, julio y octubre de cada año. Obtenga el valor de compraventa y la prima, o el descuento, el 10 de octubre de 2007, considerando rendimientos del 12.25% anual capitalizable por trimestre.

7. El 1 de marzo de 2013 vencen las obligaciones que la compañía Maquiladora del Sureste, S. A., emitió con valor nominal de $200 e intereses del 16% anual en cupones bimestrales, que se cobran el primer día de los meses impares de cada año. Obtenga la prima o el descuento si se negocian el 1 de julio de 2007, con rendimientos del 21% anual compuesto por bimestre y las obligaciones se redimen:

a) A la par. *b*) A 118, es decir, con prima.

8. ¿Cuál es el premio o el descuento de los bonos que pagan intereses en cupones trimestrales de \$14.00 y su valor nominal es de \$160? Suponga rendimientos del 15% efectivo, faltan 2.5 años para su redención, y se rediman a 120. ¿Cuál es la tasa de interés que pagó la emisora?

9. Cuatro años antes de su vencimiento se compran obligaciones con descuento de \$26.80, rendimientos del 31.2% anual compuesto por semestre y valor nominal de \$120. ¿Cuál es la tasa de interés con la que se emitieron si se rediman a 114?

10. El l de febrero de 2009 se redime a la par una obligación que la Industrializadora de Maderas y Derivados, colocó en el mercado de valores con valor nominal de \$60 pagando intereses del 14.8% anual en cupones trimestrales. ¿Cuánto se paga por cada obligación y de cuánto es la prima el primer día de febrero de 2007 si se pretende invertir con una tasa de rendimiento del 12.36% anual capitalizable por trimestre?

11. Una obligación con valor nominal de \$100 devenga intereses del 9.9% pagaderos en cupones que se cobran el tercer día de los meses de enero, mayo y septiembre de cada año. Obtenga el valor de compraventa, las utilidades y la prima o el descuento para un inversionista, que las adquiere e1 3 de septiembre de 2006, ganando el 10.2% anual capitalizable por cuatrimestre, suponiendo que:

a) Se rediman a la par el 3 de enero de 2010. *b*) Se rediman a 95 el 3 de mayo de 2009.

12. Obtenga el tipo de interés que paga la emisora de las obligaciones, con valor de redención a la par de \$80 y cupones trimestrales. Suponga que 4 años antes el precio de compraventa fue de \$95, con rendimientos del 23.8% nominal trimestral. Encuentre la prima o el descuento.

13. Resuelva el problema 12 suponiendo que las obligaciones se rediman a 125.

En los problemas del 14 al 26, seleccione la opción correcta justificando su elección.

14. Cuando un bono que se redime a la par se compra con descuento, la tasa de interés r y de rendimiento i son:

a) $i < r$ *b*) $i = r$ *c*) $i > r$ *d*) no se sabe *e*) Otra

15. Si una obligación no se redime a la par y $r < i$, entonces:

a) Se compra con descuento *b*) No se sabe *c*) Se compra con premio
d) Se compra a la par *e*) Otra

16. Cuando un bono se redime a la par y la tasa de interés, r, es menor que la de rendimiento, i, entonces:

a) El valor de compraventa es menor que el de vencimiento.
b) El valor de compraventa es igual al valor de redención.
c) El valor de compraventa es mayor que el de redención.
d) No se sabe cuál es mayor.
e) Otra.

17. Si un bono se redime a la par y las tasas de interés r y de rendimiento i son iguales, entonces:

a) El valor de compraventa es igual al valor nominal.
b) El valor de compraventa es menor que el de redención.
c) El de compraventa es mayor que el valor de redención.
d) No se sabe cuál es mayor.
e) Otra.

18. ¿De cuánto es el descuento, o la prima, de las obligaciones que se negocian el 25 de septiembre de 2006, tienen valor nominal de $100, se redimen a 106 el 25 de enero de 2010, pagan intereses en cupones bimestrales de $5.25 y ofrecen rendimiento del 11.4% nomina bimestral.

a) descuento de $56.65 *b*) prima de $57.75 *c*) prima de $54.23
d) descuento de $48.93 *e*) Otra

19. Si las obligaciones del problema 18 se redimen a 97, entonces se compran con:

a) descuento de $47.97 *b*) descuento de $58.43 *c*) prima de $35.29
d) prima de $60.80 *e*) Otra

20. ¿Cuál es el descuento, o la prima, de las obligaciones del problema 18 si se negocian el 25 de julio de 2007?

a) prima de $46.64 *b*) descuento de $43.61 *c*) prima de $50.48
d) descuento de $55.69 *e*) Otra

21. ¿Cuánto dinero tiene de utilidades un inversionista que con 1.75 millones de dólares compra obligaciones con valor nominal de $100 y descuento de $11.25, considerando que se redimen a 103 y cada cupón mensual es de $2.98? Suponga que la operación de compraventa se realiza 3.5 años antes de la redención.

a) $2'601,825.61 *b*) $1'983,429.33 *c*) $2'068,923.45
d) $1'640,902.97 *e*) Otra

22. ¿De cuánto es la prima, o el descuento, con el que se negocian el 3 de mayo de 2007 los bonos con valor nominal de $200, de redención dan $215, intereses de 10.5% en cupones trimestrales, rendimiento del 11.4% anual capitalizable por trimestre y vencimiento al 3 de noviembre de 2011?

a) prima de $12.22 *b*) prima de $15.63 *c*) descuento de $15.63
d) descuento de $12.22 *e*) Otra

23. ¿Cuál es el descuento de las obligaciones quirografarias que 2.5 años antes de su redención, se comercializan en $191.90, pagan intereses del 13.8% en cupones trimestrales y se ofrecen con rendimiento del 14.4% anual capitalizable por trimestre? Suponga que se redimen a 96.

a) $10.60 *b*) $11.43 *c*) $8.10 *d*) $9.35 *e*) Otra

24. ¿De cuánto es el descuento, de los bonos que vencen 3 años después, se redimen a 92, su valor nominal es de $100, pagan intereses del 10.5% anual en cupones que vencen el sexto día de los meses de marzo, julio y noviembre de cada año, y se ofrecen con rendimientos del 12.72% nominal cuatrimestral?

a) $4.20 *b*) $4.70 *c*) $3.48 *d*) $2.95 *e*) Otra

25. Se compran 12,000 obligaciones 39 meses antes de su vencimiento a la par. ¿De cuánto es el descuento, o la prima total, si su valor nominal es de $200, pagan intereses del 13.2% anual en cupones mensuales y se adquieren con rendimientos del 11.4% anual capitalizable por mes?

a) $116,880 *b*) $121,425 *c*) $109,728 *d*) $113,049 *e*) Otra

26. Un bono se adquiere con descuento de $10.50. ¿Cuál es la tasa de interés que ofrece la emisora si el valor nominal es de $200, faltan 3 años para su vencimiento, se ofrecen con rendimiento del 14.1% anual capitalizable por bimestre y se redimen a 109?

a) 12.3% *b*) 11.7% *c*) $14.2% *d*) 13.2% *e*) Otra

8.5 Valor contable

Para llevar un apropiado manejo contable de su empresa o como persona física, a los inversionistas que adquieren bonos y obligaciones con premio le interesará saber en qué proporción o qué parte del premio se reduce o se amortiza cada vez que les pagan los intereses de un cupón.

Para hacer un seguimiento de dichas cantidades, suele hacerse un ***cuadro de amortización de la prima***, semejante a los que se estudiaron en el capítulo 6, tal como se aprecia en los ejemplos de esta sección.

Cuando esta clase de títulos de inversión se compra con descuento, es decir, el precio de compraventa es menor que el precio de redención, se elabora un ***cuadro de acumulación del descuento***, en el que se registran los movimientos incluyendo el *valor en libros* o *valor contable* del capital invertido.

En los siguientes ejemplos se ilustra la manera de proceder con tales cuadros, comenzando con el de acumulación del descuento.

Acumulación del descuento

Ejemplo 1

Valor de compraventa y cuadro de acumulación del descuento

Una obligación con valor nominal de $100 que se redime a la par el 5 de enero de 2011 con intereses del 12.2% pagaderos en cupones que vencen el quinto día de los meses de enero y julio de cada año, se transfiere el 5 de enero de 2007 a un inversionista que pretende ganar un tipo de rendimiento del 13.6% con capitalización semestral. Obtener el valor de compraventa y hacer el cuadro de acumulación del descuento.

solución

Los valores para sustituir en la ecuación del teorema 8.1 son:

$M = 100$, el valor de vencimiento.
$n = 4$, el plazo o tiempo en años entre la compraventa y la redención.
$p = 2$, la frecuencia de capitalización de intereses y de cobro de los cupones.
$i = 0.136$, la tasa de interés anual capitalizable por semestre.
$r = 0.122$, la tasa de interés simple anual, la que paga la emisora en cupones.

Los intereses por periodo semestral son

$$R = 100(0.122/2) \quad \text{o} \quad R = 6.10$$

El valor de compraventa de cada obligación es, por lo tanto:

$$C = 100(1 + 0.136/2)^{-8} + 6.10 \left[\frac{1-(1.068)^{-8}}{0.068}\right]$$

$$C = 100(0.590785705) + 6.10(6.017857275)$$

$$C = 59.07857052 + 36.70892938$$

$$C = \$95.7874999$$

Quiere decir que cada obligación se compra con un descuento de $4.2125001, que son la diferencia entre el resultado anterior y su valor de vencimiento.

Observe usted lo siguiente que es útil para hacer el cuadro:

El inversionista espera un rendimiento del 6.8% en el primer semestre sobre su inversión de $95.7874999, es decir

$$95.7874999(0.068) = 6.513549993 \text{ en el primer semestre}$$

Al terminar este primer semestre recibirá $6.10 por el primer cupón de los que adquirió, y por eso tendrá un remanente a su favor de $0.413549993, que son la diferencia entre 6.513549993 y 6.10.

Esto significa que el valor de su inversión, al concluir el primer semestre, es

$$95.7874999 + 0.413549993 = 96.20104989$$

y si llegase a vender su obligación en esa fecha, debería hacerlo por esta cantidad, la cual puede comprobarse obteniendo el valor de compraventa 7 semestres antes de la redención, con la ecuación 8.1, es decir

$$C = 100(1.068)^{-7} + 6.10\left[\frac{1-(1.068)^{-7}}{0.068}\right]$$

$$C = 63.09591331 + 33.10513659$$

$$C = \$96.2010499$$

Al final del segundo semestre, el rendimiento de la inversión será

$$96.2010499(0.068) = 6.541671393$$

El excedente es ahora:

$$6.541671393 - 6.10 = 0.441671393$$

y el valor de la inversión es

$$96.2010499 + 0.441671393 = 96.64272128$$

Este resultado y los siguientes pueden comprobarse con la ecuación 8.1 y se deja como ejercicio para el estudiante.

Al terminar el tercer semestre el rendimiento esperado es

$$96.64272128\ (0.068) = 6.5717705047$$

y el remanente:

$$6.5717705047 - 6.10 = 0.471705047$$

El valor de la inversión es ahora:

$$96.64272128 + 0.471705047 = 97.11442633$$

Continuando de la misma forma, se llegará hasta el final del octavo semestre, y en ese momento el valor del documento debe ser igual a su valor de redención. Se resume en el siguiente cuadro, donde se ha redondeado a 5 cifras decimales.

Fecha	Intereses	Cupón	Diferencia	Valor contable
Enero 5/06	–	–	–	95.78750
Julio 5/06	6.51355	6.10	0.41355	96.20105
Enero 5/07	6.54167	6.10	0.44167	96.64272
Julio 5/07	6.57171	6.10	0.47171	97.11443
Enero 5/08	6.60378	6.10	0.50378	97.61821
Julio 5/08	6.63804	6.10	0.53804	98.15625
Enero 5/09	6.67462	6.10	0.57462	98.73087
Julio 5/09	6.71370	6.10	0.61370	99.34457
Enero 5/10	6.75543	6.10	0.65543	100.0000*

*La diferencia con los $100 es mínima y se debe al redondeo.

Importante

Este cuadro se inicia escribiendo el valor de compraventa (C) en el primer renglón de la última columna. Se mantienen varias cifras decimales procurando más precisión. El valor C se multiplica por la tasa de interés semestral, capitalizable por semestre, y el resultado se anota en la segunda columna, la de intereses

$$I_1 = 95.78750(0.068)$$

$$I_1 = 6.51355$$

Se resta el valor del cupón semestral $R = 6.10$, los intereses que paga la emisora, y la diferencia se escribe en la cuarta columna.

$$6.51355 - 6.10 = 0.41355$$

Esta diferencia se suma con el valor contable anterior C, y se obtiene el nuevo valor contable C_1.

$$95.78750 + 0.41355 = 96.20105$$

Este proceso se repite de manera sucesiva hasta llegar al último valor de la quinta columna, el cual debe ser igual al valor de redención de la obligación.

Note que si se suman los valores de la columna de intereses y se resta el total de los 8 cupones, se obtiene el descuento, esto es

$$53.0125 - 8(6.10) = 4.2125$$

Amortización de la prima

Ejemplo 2

Valor de compraventa, prima y cuadro de amortización de la prima

Hace 4 años una compañía embotelladora de refrescos colocó, en el mercado de valores, obligaciones con valor nominal de \$150, redimibles a 125, con plazo de 7 años y con intereses del 12.3% anual pagadero cuatrimestralmente. ¿Cuánto deberá pagarse por cada obligación hoy si se pretenden rendimientos del 8.7% anual capitalizable por cuatrimestre? Obtener la prima, el cuadro de amortización de la misma, y las utilidades para el inversionista.

solución

a) Dado que faltan 3 años para la redención de las obligaciones, el plazo y el número de cupones cuatrimestrales son:

$$n = 3 \text{ y } np = 3(3) = 9$$

Los valores de redención y de cada cupón son

$$M = 150(1.25) = 187.50 \text{ y}$$
$$R = 150(0.123/3) = 6.15$$

ya que se rediman a 125 y los intereses que paga la emisora son del 12.3% compuesto por cuatrimestre.

El valor de compraventa es entonces:

$$C = 187.50(1 + 0.087/3)^{-9} + 6.15\left[\frac{1-(1.029)^{-9}}{0.029}\right] \qquad \text{Teorema 8.1}$$

$$C = 187.50(0.773146203) + 6.15(7.822544738)$$

$$C = 144.964913 + 48.10865014$$

$$C = 193.0735631$$

b) La prima con que se adquieren es la diferencia

$$193.0735631 - 187.50 = \$5.5735631$$

c) El cuadro de amortización de la prima es el siguiente, que se inicia escribiendo el precio de compraventa en el primer renglón de la última columna, y se continúa de manera semejante al cuadro de acumulación del descuento, sólo que ahora la diferencia entre los intereses y el valor del cupón, es decir, la amortización, se resta del valor en libros anterior en vez de sumarla.

Fecha	Intereses	Cupón	Amortización	Valor contable
0	–	–	–	193.07356
1	5.59913	6.15	0.55087	192.52269
2	5.58316	6.15	0.56684	191.95585
3	5.56672	6.15	0.58328	191.37257
4	5.54980	6.15	0.60020	190.77237
5	5.53240	6.15	0.61760	190.15477
6	5.51449	6.15	0.63551	189.51926
7	5.49606	6.15	0.65394	188.86532
8	5.47709	6.15	0.67291	188.19242
9	5.45758	6.15	0.69242	187.5000

d) La utilidad por cada obligación es la diferencia entre el precio de compraventa y el valor de los cupones, y el valor nominal de la obligación, es decir:

$$9(6.15) + 187.50 - 193.07 = 49.78 \text{ redondeando}$$

Ejemplo 3

Valor de redención, de emisión, tasa de interés, prima y cuadro

Ocho trimestres antes de su vencimiento, 1, 000 obligaciones se cotizan en $171,520.80, ofreciendo rendimientos del 9.8% capitalizable por trimestre. Suponiendo que se rediman a 110 y pagan intereses en cupones trimestrales de $4.95 cada uno, determine el valor de emisión, el de redención, la tasa de interés que ofrece la emisora, la prima o el descuento y el cuadro correspondiente.

solución

a) El valor de compraventa de cada obligación es

$$C = 171{,}520.8/1{,}000 = 171.5208$$

Los otros valores que se sustituyen en la ecuación 8.1 son:

$R = 4.95$, el valor de cada cupón.
$n = 2$ años u 8 trimestres.
$p = 4$, la frecuencia de conversión y de pago de cupones.
$i = 0.098$, la tasa de rendimiento anual, capitalizable por trimestre.

El valor de redención es $M = 1.10N$, donde N es el valor nominal, se redimen a 110.

$$171.5208 = 1.10N(1 + 0.098/4)^{-8} + 4.95\left[\frac{1-(1.0245)^{-8}}{0.0245}\right]$$

$$171.5208 = 0.906352179N + 35.5679671$$

De donde

$$N = 135.9528329/0.90632179$$

o $\quad N = 150{,}0000066 \quad$ o $\quad N = \$150.00$

b) El valor al vencimiento es:

$$M = 1.10(150) \quad \text{o} \quad M = \$165.00$$

La tasa con la que la emisora paga intereses es r de la ecuación:

$$4.95 = 150(r/4) \qquad R = N(r/p)$$

De donde: $\quad r = 4.95(4/150)$

$$r = 0.132 \text{ o } 13.20\% \text{ anual}$$

c) La prima es la diferencia:

$$171.5208 - 150.00 = \$21.5208$$

d) El cuadro de amortización es el siguiente, que se inicia anotando el valor de los cupones en la tercera columna, y el valor de compraventa en el primer renglón de la última.

Periodo	Intereses	Cupón	Amortización	Valor contable
0	–	–	–	171.52080
1	4.20226	4.95	0.74774	170.77306
2	4.18394	4.95	0.76606	170.00700
3	4.16517	4.95	0.78483	169.22217
4	4.14594	4.95	0.80406	168.41811
5	4.12624	4.95	0.82376	167.59436
6	4.10606	4.95	0.84394	166.75042
7	4.08539	4.95	0.86461	165.88581
8	4.06420	4.95	0.88580	165.00001

Ejercicios 8.5

1. Explique por qué es útil un cuadro de amortización de la prima o acumulación del descuento.
2. Obtenga el cuadro de acumulación del descuento o la amortización de la prima, de una obligación con valor nominal de $100 y se redime dentro de 3 años con intereses del 13% simple anual pagaderos cada semestre. Suponga rendimientos del 10.5 % anual capitalizable por semestre.
3. ¿Cuál es el valor de compraventa el 1 de octubre de 2008 de los bonos con denominación de $200 que se emitieron a la par el 1 de julio de 2005, pagando intereses del 11.2% anual en cupones trimestrales? Suponga que vencen el primer día de julio de 2011 y se ofrecen con rendimientos del 12.3% de interés anual capitalizable por trimestre. Haga el cuadro correspondiente en sus primeros cuatro renglones.
4. ¿En cuánto se transfieran el 10 de octubre de 2007, las obligaciones con valor nominal de $200, se redimen a 112 dentro de 3 años, pagan intereses del 11% en cupones semestrales y ofrecen rendimiento con intereses del 13.8% anual capitalizable por semestre? Haga el cuadro de amortización de la prima o acumulación del descuento.
5. Obtenga el valor de compraventa de un bono de $100 con redención a 108 en 4 años y medio, suponiendo que paga intereses del 11.7% anual en cupones semestrales y se ofrecen con el 13.2% de rendimiento anual capitalizable por semestre. Obtenga las utilidades para el comprador de los bonos y haga el cuadro correspondiente.
6. Una compañía de galletas colocó en el mercado bursátil obligaciones hipotecarias con valor nominal de $100, vencimiento a la par en 5 años e intereses del 11.2% anual pagaderos en cupones cuatrimestrales. Obtenga el valor de compraventa 2 años después de su emisión con el 10.5% de rendimiento anual compuesto por cuatrimestre. Haga el cuadro de amortización de la prima en sus primeros cuatro renglones.
7. ¿Cuál es el valor de compraventa de los bonos que se emitieron a la par, pagando intereses del 14% en cupones semestrales, 3 años y medio antes de su redención? Su valor nominal es de $100 y ofrecen rendimientos del 12% anual compuesto por semestre. Haga el cuadro correspondiente a la prima o el descuento, y obtenga las utilidades para el comprador de los bonos.
8. ¿Cuál es el valor nominal de las obligaciones que se redimen a 95, pagando intereses en cupones trimestrales de $8.75? Suponga que 4 años antes de su redención se negocian en $186,543.47 por cada mil, con una tasa del 13.2% de rendimiento anual, capitalizable por trimestre. ¿Con qué tasa de interés se emitieron? ¿De cuánto es la utilidad por cada obligación para el inversionista? Haga el cuadro de amortización de la prima o la acumulación del descuento en sus primeras cuatro filas.
9. Una empresa del ramo automotriz emitió y colocó en el mercado de valores obligaciones quirografarias con denominación de $300, vencimiento a 6 años de plazo e intereses del 12.9% anual pagadero en cupones cuatrimestrales. ¿Cuál es su precio en el mercado, 2 años después de su emisión, si se ofrecen con el 13.65% de rendimiento anual capitalizable por cuatrimestre? Haga el cuadro de amortización de la prima o la acumulación del descuento en sus primeros renglones y suponga que:

   a) Se redimen a la par. *b*) Se redimen a 115.

10. El 15 de junio de 2011 se rediment las obligaciones de $120 que una empresa refresquera emitió el 15 de octubre de 2005, pagando intereses del 8.4% anual en cupones cuatrimestrales. ¿En cuánto se negocian el 15 de febrero de 2009 con rendimiento del 12.6% anual capitalizable por cuatrimestre? Elabore el cuadro correspondiente a la prima o el descuento y suponga que se redimen a 110.

11. Una compañía de telefonía celular emitió obligaciones quirografarias con valor nominal de $200, redimibles a 108, con intereses del 13% anual pagadero en cupones trimestrales. ¿Cuál es la utilidad para un inversionista que cinco años antes del vencimiento adquiere tales obligaciones con rendimiento del 12% de interés anual capitalizable por trimestre? ¿Cuál es el valor contable de su inversión, luego de cobrar el tercer cupón?

12. Encontrar el valor de redención, de las obligaciones que se emitieron pagando intereses del 20% anual en cupones semestrales. Suponga que se redimen a 110 en un plazo de 4 años, ofrecen intereses del 21% efectivo y un paquete de 1,500 obligaciones se adquirió en $251,196.15. Haga el cuadro de amortización de la prima o cancelación del descuento. ¿Cuál es el valor contable de la inversión poco después de cobrar el cupón número 5? ¿A cuánto ascienden las utilidades para el inversionista que adquirió el paquete?

13. ¿Cuál es el valor nominal de los bonos que se emitieron pagando intereses en cupones cuatrimestrales de $9.20, se redimen a 90 y 5 años antes se comercializan en $190,242.99 cada mil? Suponga una tasa de rendimiento del 12.3% compuesto por cuatrimestre. ¿Con qué tasa de interés se emitieron? ¿Cuál es su valor contable luego de cobrar el cuarto cupón? Haga el cuadro de amortización de la prima en sus primeros renglones.

14. ¿Con qué tasa de interés se emitieron las obligaciones con valor nominal de $120 si 2,000 obligaciones se negocian en $265,134.50, 3 años antes de su redención? Suponga que se redimen a 105 y se ofrecen con el 10.8% de rendimiento anual capitalizable por trimestre.

Haga el cuadro en sus primeras cuatro filas.

Seleccione la opción correcta en los problemas 15 al 30, justificando su elección.

15. ¿En cuánto se comercializa el 23 de enero de 2006 una obligación con valor nominal de $100, que se redime a la par el 23 de julio de 2011, paga intereses en cupones trimestrales de $5.60 y se pretenden rendimientos del 14.4 anual capitalizable por trimestre?

a) $130.04 *b*) $127.43 *c*) $125.91 *d*) $132.93 *e*) Otra

16. ¿Cuál es el valor contable de los bonos 16 meses antes de su vencimiento, si pagan intereses del 15.3% en cupones cuatrimestrales y rendimientos del 13.8% anual capitalizable por cuatrimestre? Suponga que se redimen a la par 3 años después de ahora y su valor nominal es de $200.

a) $193.08 *b*) $201.23 *c*) $194.45 *d*) $197.62 *e*) Otra

17. ¿Cuál es el valor nominal de los bonos que el 3 de abril de 2007 se cotizaron en $144,919.67 cada mil, se redimen a 95 el 3 de abril de 2011, pagan intereses del 12.6% anual en cupones bimestrales y tienen un rendimiento del 10.5% nominal bimestral?

a) $200 *b*) $140 *c*) $180 *d*) $150 *e*) Otra

18. Una empresa del sector turismo emitió obligaciones con valor nominal de $200 y 6 años de plazo. ¿En cuánto se transfieren 21 meses después de su emisión si los intereses que se ofrecen se pagan cada tres meses en cupones de $6.50 cada uno? Considere que se redimen a 104 y se ofrecen con rendimiento del 14.7% anual capitalizable por trimestre.

a) $198.45 *b*) $189.73 *c*) $192.47 *d*) $193.73 *e*) Otra

19. Una compañía de pastas colocó en el mercado bursátil obligaciones quirografarias con valor nominal de $150, vencimiento a 98 en 7 años e intereses del 13.2% anual pagaderos en cupones semestrales. Obtenga el valor de compraventa 3 años después de su emisión considerando 14.1% de rendimiento anual capitalizable por semestre.

a) $144.24 *b*) $153.09 *c*) $160.38 *d*) $148.97 *e*) Otra

20. ¿Cuál es el valor nominal de los bonos que corresponden al siguiente cuadro de acumulación del descuento? Suponga 25 bimestres de plazo, que se rediman a 115, y los cupones son bimestrales.

Periodo	Intereses	Cupón	Diferencia	Valor contable
0	–	–	–	174.6287409
1	3.492574818	3.20	0.292574818	174.9213157
2	3.498426314	3.20	0.298426314	175.219742

a) $160 *b*) $190 *c*) $140 *d*) $150 *e*) Otra

21. ¿Cuál es el valor contable al vencer el decimosexto cupón de los bonos del problema 20?

a) $176.7351 *b*) $175.4392 *c*) $178.0983 *d*) $178.9987 *e*) Otra

22. ¿En cuánto se transfieren los bonos del problema 20 cuando faltan 15 periodos bimestrales?

a) $178.45 *b*) $176.93 *c*) $177.83 *d*) $179.95 *e*) Otra

23. ¿Cuál es el valor al vencimiento de las obligaciones que corresponden al siguiente cuadro de amortización de la prima? Suponga que se rediman a 108, y son 14 cupones cuatrimestrales en el plazo.

Periodo	Intereses	Cupón	Amortización	Valor contable
0	–	–	–	149.9558498
1	5.248454743	6.40	1.151545257	148.8043045
2	5.208150658	6.40	1.191849342	147.6124552

a) $100 *b*) $140 *c*) $120 *d*) $130 *e*) Otra

24. ¿A cuánto ascienden las utilidades para quien compra 10,000 obligaciones con las del problema 23?

a) $496,529.35 *b*) $524,673.42 *c*) $596,441.50 *d*) $603,962.75 *e*) Otra

25. ¿Por qué cantidad es la prima en las obligaciones del problema 23?

a) $22.4281 *b*) $20.3558 *c*) $19.6318 *d*) $21.0632 *e*) Otra

26. Una compañía de aeronáutica emitió obligaciones con valor nominal de $100, que vencen a 112, plazo de 6 años e intereses del 15% anual en cupones bimestrales. ¿Por qué cantidad son la prima o el descuento si se ofrecen con el 11.4% anual capitalizable por bimestre 1.5 años después de su emisión?

a) $7.10 *b*) $6.90 *c*) $8.50 *d*) $7.80 *e*) Otra

27. ¿De cuánto son las utilidades para el señor Casillas si invierte 1.5 millones de dólares en las obligaciones del problema 26?

a) $638,491.35 *b*) $728,063.91 *c*) $747,495.83 *d*) $813,905.62 *e*) Otra

28. ¿Cuál es el valor nominal de los bonos que se emitieron pagando intereses del 9.6% en cupones trimestrales, se rediment a 85 y cuatro años antes se comercializan en $145,874.20 cada mil? Suponga el 12.8% de rendimiento anual convertible por trimestre.

a) $150 *b*) $170 *c*) $180 *d*) $200 *e*) Otra

29. ¿Cuál es el valor contable luego de cobrar el noveno cupón en los bonos del problema 28?

a) $149.44 *b*) $148.03 *c*) $150.32 *d*) $147.62 *e*) Otra

30. ¿De cuánto son la prima o el descuento de los bonos del problema 28?

a) $7.68 *b*) $9.25 *c*) $7.13 *d*) $8.03 *e*) Otra

8.6 Precio entre fechas de cupón

Es evidente que no es necesario esperar hasta la fecha de vencimiento de algún cupón para adquirir bonos y obligaciones, sino que se pueden comprar antes, es decir, *entre dos fechas de cupón*.

La operación de compraventa puede realizarse de dos maneras, dependiendo de la inclusión o no, de los intereses del cupón que corresponde al periodo en el que se transfiere. Si en la compraventa se incluyen tales intereses, entonces el valor en que se negocian se conoce como *precio neto* o *precio efectivo,* pero si no se incluyen, entonces el valor de compraventa se conoce como *precio de mercado*.

Precio de mercado

Para hallar el precio de mercado C en la compraventa de bonos y obligaciones, se obtienen dos valores C_0 y C_1 que son, respectivamente, los precios de adquisición en las dos fechas de cupón, entre las que se localiza la de compraventa, luego se suma o se resta, la parte proporcional de esta diferencia, al primero de los dos valores, es decir, a C_0, tal como se aprecia en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Precio de mercado de un bono

¿Cuál es el precio de mercado de un bono con valor nominal de $100, 14 meses antes de su redención a la par, si paga intereses del 14% en cupones trimestrales y se pretenden rendimientos del 16% anual capitalizable por trimestre?

solución

En el diagrama de tiempo de la figura 8.3 se observan las fechas de redención, de compraventa y de vencimiento de cupones. También se ve que entre la fecha donde está C hasta la fecha de vencimiento hay 4 periodos de tres meses cada uno.

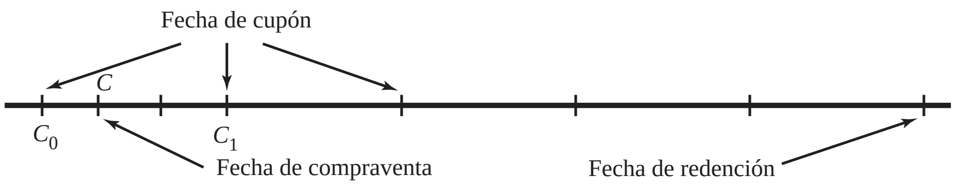


FIGURA 8.3

Para C_0 el plazo es $np = 5$ trimestres, en tanto que los otros valores que se reemplazan en la ecuación 8.1 son:

$N = 100$, el valor nominal del bono, igual al valor de redención M

$r = 0.14$, la tasa de interés que paga la emisora

$p = 4$, porque los cupones son trimestrales

$R = 100(0.14/4) = 3.50$, el valor de cada cupón

$i = 0.16$, la tasa de rendimiento anual

Entonces

$$C_0 = 100(1 + 0.16/4)^{-5} + 3.50\left[\frac{1-(1.04)^{-5}}{0.04}\right]$$

$$C_0 = 100(0.8219271068) + 3.50(4.45182233)$$

$$C_0 = 82.19271068 + 15.58137816 \quad \text{o} \quad C_0 = 97.77408884$$

Cuando faltan 4 trimestres, el valor del bono y sus cupones es:

$$C_1 = 100(1.04)^{-4} + 3.50\left[\frac{1-(1.04)^{-4}}{0.04}\right]$$

$$C_1 = 85.4804191 + 12.70463329$$

o $$C_1 = 98.18505239$$

Quiere decir que el incremento que tiene el valor del bono en 3 meses es la diferencia:

$$C_1 - C_0 = 98.18505239 - 97.77408884$$
$$= 0.41096355$$

y por consecuencia el incremento que se tiene en un mes es 1/3 de este resultado, es decir:

$$0.41096355(1/3) = 0.13698785$$

Para el precio de mercado, 14 meses antes de la redención, se suma este valor a C_0.

$$C = C_0 + 0.13698785$$
$$C = \$97.91107669$$

Una gráfica para ilustrar los valores anteriores es la figura 8.4 donde sobre el eje horizontal se representa el tiempo, y sobre el vertical, los valores de compraventa C_0, C_1 y C.

En la misma gráfica se observa que el precio de mercado aumenta con el tiempo hasta llegar al valor de redención de \$100, mientras que el valor a la par permanece constante, por lo cual la línea superior del triángulo se mantiene paralela al eje horizontal.

Si la obligación o el bono se compran con prima, el precio de mercado se reduce y la línea que lo representa en la gráfica estaría por encima de la línea horizontal que corresponde al valor a la par.

También es cierto que si el documento se redime con descuento, por ejemplo a 92, la "base" del triángulo sería inclinada y decrecería con el tiempo, y si se redime con premio, la altura de dicha recta crecería con el tiempo.

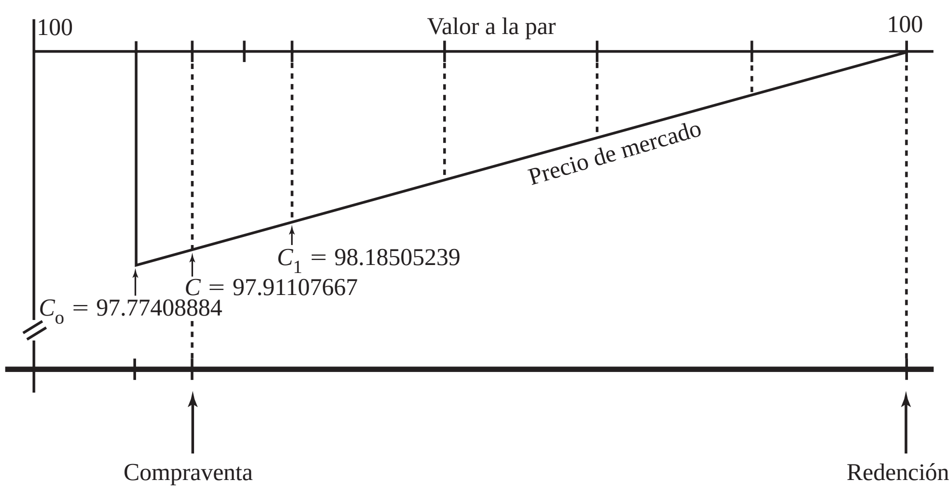


FIGURA 8.4

En este caso el valor de compraventa crece de un trimestre a otro, porque el bono se compra con descuento; si se compra con premio, entonces el precio se reduce de un periodo a otro, como se observa en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2

Precio entre fechas de cupón de una obligación

El 12 de marzo de 2006 se compra una obligación con valor nominal de \$80, se redime a 125 el 1 de junio de 2010, paga intereses en cupones cuatrimestrales de \$11 el primer día de los meses de febrero, junio y octubre de cada año. ¿Cuál es el precio si se logran rendimientos del 21.3% anual capitalizable por cuatrimestre?

solución

La gráfica de la figura 8.5 es un auxiliar para plantear y resolver el ejemplo.

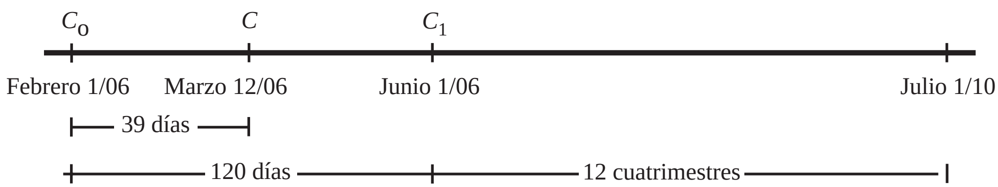


FIGURA 8.5

El precio de la obligación el 1 de febrero de 2006, puesto que faltan 13 cuatrimestres para su vencimiento y su valor de vencimiento es $M = 80(1.25) = 100$, es:

$$C_0 = 100(1 + 0.213/3)^{-13} + 11\left[\frac{1-(1.071)^{-13}}{0.071}\right]$$

$$C_0 = 100(0.409955653) + 11(8.310483763)$$

$$C_0 = 40.99556528 + 91.41532139$$

$$C_0 = 132.4108867$$

El l de junio es

$$C_1 = 100(1.071)^{-12} + 11\left[\frac{1-(1.071)^{-12}}{0.071}\right]$$

$$C_1 = 43.90625041 + 86.90580922$$

$$C_1 = 130.8120596$$

La diferencia entre los dos es

$$C_0 - C_1 = 1.5988271$$

y se multiplica por la fracción $39/120 = 0.325$, que corresponde a la parte proporcional de los días que hay entre las tres fechas, es decir, para la compraventa habrán transcurrido 39 días de los 120 que hay en el cuatrimestre del 1 de febrero al 1 de junio siguiente.

$$1.5988271(0.325) = 0.519618775$$

Éste se resta de C_0, porque el precio de mercado se reduce con el tiempo, es decir que la obligación se adquiere con prima.

$$C = 132.4108867 - 0.519618775$$
$$C = 131.8912679 \quad \text{o} \quad C = \$131.8913$$

Precio neto o efectivo

Si la compraventa se realiza entre dos fechas de cupón, el vendedor o propietario primario habrán mantenido su inversión durante un lapso del periodo de intereses, sin obtener beneficio alguno y, por otro lado, el comprador recibirá el pago total por el cupón correspondiente, a pesar de que no ha transcurrido un periodo completo desde el momento que hizo su inversión, para tener derecho a recibir el total de los intereses.

Es de justicia elemental que el comprador le pague al vendedor la parte proporcional del cupón que cobrará luego de la transacción, y para evaluar esta parte proporcional, que llamaremos con R_1, se multiplica el valor del cupón por la fracción p/q, donde p es el tiempo que hay entre la compraventa y la fecha de cupón anterior y q es el que hay entre las fechas de los cupones.

Esto es similar a lo que se ha hecho para el precio de mercado con las diferencia entre C_0 y C_1 y entre C_0 y C.

Ejemplo 3

Precio neto de una obligación y utilidades

¿Cuál es el precio efectivo el 3 de junio de una obligación con valor nominal de \$100, que se redime el 5 de octubre del año siguiente y paga intereses del 11.2% anual en cupones que vencen el quinto día de los meses de enero, abril, julio y octubre de cada año? Suponga que las obligaciones se redimen a la par y se gana el 7.8% de rendimiento anual compuesto por trimestre. Obtenga la utilidad para el inversionista.

solución

a) En el diagrama de tiempos de la figura 8.6 se aprecian las fechas de cupón, de compraventa y el número de días entre ellas.

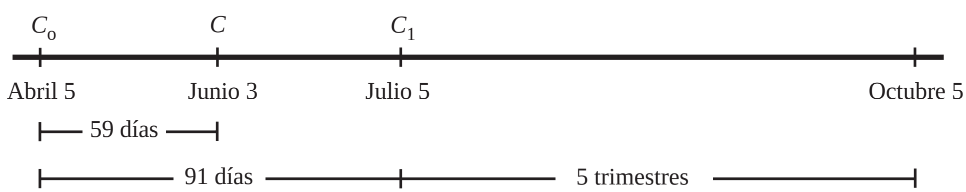


FIGURA 8.6

Para C_0, puesto que el plazo es de 6 trimestres y el valor de cada cupón es $R = 100(0.112/4) = 2.80$, es:

$$C_0 = 100(1 + 0.078/3)^{-6} + 2.80\left[\frac{1-(1.026)^{-6}}{0.026}\right]$$

$$C_0 = 100(0.857266466) + 2.80(5.489751327)$$

$$C_0 = 85.72664655 + 15.37130372 \quad \text{o} \quad C_0 = 101.0979503$$

El plazo para C_1 es de 5 trimestres; por eso:

$$C_1 = 100(1.026)^{-5} + 2.80\left[\frac{1-(1.0263)^{-5}}{0.026}\right]$$

$$C_1 = 87.95553936 + 12.97095761$$

o $$C_1 = 100.926497$$

La diferencia entre C_0 y C_1 es

$$C_0 - C_1 = 0.1714533$$

Debe multiplicarse por la fracción 59/91, que es la parte proporcional entre las fechas de cupón y de compraventa. El resultado se resta de C_0 para obtener el precio de mercado el 3 de junio.

$$0.1714533(59/91) = 0.11116203$$

$$C = 101.0979503 - 0.11116203$$

$$C = 100.9867883 \text{ o}$$

$$C = \$100.9868 \text{ redondeando}$$

Significa que la obligación se adquiere con un premio de \$0.9868 aproximadamente; esto es, la diferencia entre C y el valor de redención.

En la figura 8.7 se aprecia cómo el precio de mercado se reduce con el tiempo, y la parte proporcional que corresponde a los intereses, R' del cupón que vence el 5 de julio.

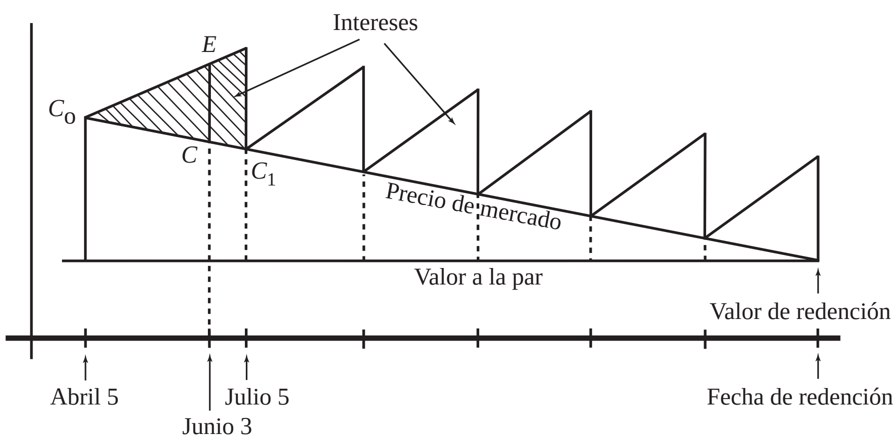


FIGURA 8.7

Los intereses de un trimestre son $R = 2.80$, por lo que la porción que deberá pagar el comprador es

$$R' = (59/91)(2.80) = 1.815384615$$

el precio efectivo es, por lo tanto:

$$E = 100.9867883 + 1.815384615 \qquad E = C + R'$$
$$E = 102.8021729$$
$$E = \$102.80 \text{ aproximadamente}$$

b) Las utilidades para el inversionista que adquiere estas obligaciones son la diferencia entre el precio neto y lo que posteriormente recibirá por los cupones y la obligación, es decir

$$I = 100.00 + 5(2.80) - 102.80$$
$$I = 114.00 - 102.80 \quad \text{o} \quad I = \$11.20$$

Ejemplo 4

Precio de mercado, precio neto, descuento, tasa de interés y utilidades en la compra de bonos

Un bono con valor nominal de $90 se redime a 110, 5 años después de su emisión, pagando intereses en cupones semestrales de $5.30 cada uno. Diecisiete meses después de la emisión, se transfiere con rendimiento del 15% de interés efectivo, determinar:

a) El precio de mercado del bono.
b) El precio neto o efectivo.
c) El descuento o la prima con la que se adquieren.
d) La tasa de interés que paga la emisora.
e) La utilidad para el inversionista que compra los bonos.

solución

En el diagrama de tiempo de la figura 8.8 se aprecian las fechas y los plazos para C_0, C_1 y C.

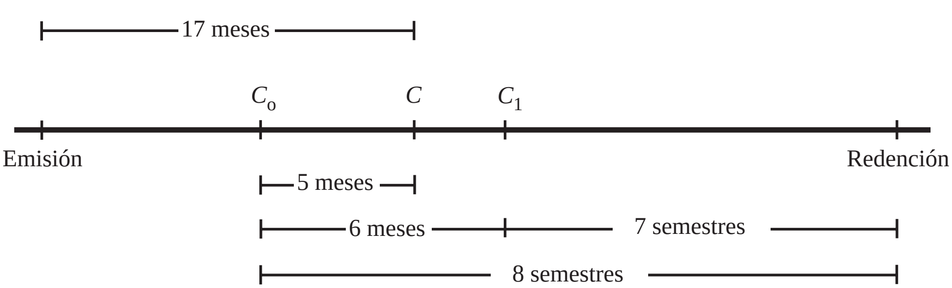


FIGURA 8.8

a) El valor de redención es $M = 1.10(90) = 99$, el plazo para C_0 es de 8 semestres y la tasa de rendimiento anual es del 14.4761058% capitalizable por semestre, equivalente al 15% efectivo, ya que

$$(1 + i/2)^2 = 1.15$$

De donde $1 + i/2 = \sqrt{1.15} = 1.072380529$

$$i = (1.072380529 - 1)2 \quad \text{o} \quad i = 0.144761058$$

Entonces

$$C_0 = 99(1.072380529)^{-8} + 5.30\left[\frac{1-(1.072380529)^{-8}}{0.072380529}\right]$$

$$C_0 = 99(0.571753248) + 5.30(5.916601582)$$

$$C_0 = 56.60357151 + 31.35798838 \quad \text{o} \quad C_0 = 87.96155989$$

Para C_1 el plazo es de 7 semestres; por eso:

$$C_1 = 99(1.072380529)^{-7} + 5.30\left[\frac{1-(1.072380529)^{-7}}{0.072380529}\right]$$

$$C_1 = 60.70056796 + 28.32769618 \quad \text{o} \quad C_1 = 89.02826414$$

La diferencia es:

$$C_1 - C_0 = 1.06670425$$

Que se multiplica por 5/6, en tanto que lo que resulta se suma a C_0 para obtener el precio de mercado, es decir:

$$C = C_0 + 1.06670425(5/6)$$

$$C = 87.96155989 + 0.888920208$$

$$C = 88.8504801 \quad \text{o} \quad C = \$88.85, \text{ redondeando}$$

b) Para el precio neto o efectivo, al precio de mercado se le suma la parte proporcional del valor de un cupón.

$$R' = 5.30(5/6)$$

o

$$R' = \$4.4166667$$

Por lo tanto:

$$E = C + R'$$

$$E = 88.8504801 + 4.4166667$$

$$E = 93.26714677 \quad \text{o} \quad E = \$93.27$$

c) El descuento es igual a la diferencia entre este precio neto y el de rendimiento o vencimiento, es decir:

$$D = 99.00 - 93.27 \quad \text{o} \quad D = \$5.73$$

d) La tasa de interés con la que se emitieron los bonos es r tal que:

$$5.30 = 90(r/2) \qquad R = N(r/p)$$

de donde

$$r = 5.30(2)/90$$
$$r = 0.11\overline{7} \quad \text{o} \quad 11.\overline{7}\% \text{ anual}$$

e) Las utilidades para el inversionista que compra los bonos son

$I = 99 + 5.30(7) - 93.27$

$I = 136.10 - 93.27$ o $I = \$42.83$ por cada uno.

Ejercicios 8.6

1. ¿Qué significa que una obligación se transfiera entre fechas de cupón?

2. ¿Cuál es la diferencia entre el precio de mercado y el precio efectivo de una obligación o un bono?

3. ¿Cuál es el precio de mercado de una obligación con denominación de \$100, 3.5 años antes de su redención, si paga intereses del 12.3% anual en cupones cuatrimestrales, y se pretenden rendimientos del 15.6% anual capitalizable por cuatrimestre?

4. Un bono de \$80 se redime a 120 pagando intereses en cupones semestrales de \$6.00 cada uno. ¿Cuál es el precio de mercado 7 cuatrimestres antes de su vencimiento si el inversionista que los compra gana el 13.7% anual capitalizable por semestre? ¿De cuánto es la prima o el descuento?

5. Obtenga las utilidades para un inversionista que adquiere obligaciones con denominación de \$100, se redimen a 95 y pagan intereses del 11.6% anual en cupones que vencen cada trimestre. Suponga que las compra el 5 de abril, vencen el 30 de julio del año siguiente con rendimientos del 18% anual capitalizable por trimestre, y las adquiere a precio de mercado.

6. ¿Cuál es el precio de mercado el 19 de marzo de 2007 de los bonos con valor nominal de \$120, pagan intereses en cupones bimestrales de \$5.56 cada uno, se redimen el 1 de noviembre de 2011 y generan rendimientos del 29% efectivo para quien los compra? Suponga que se redimen a 95; obtenga la prima o descuento, la utilidad para el inversionista, y la tasa de interés que paga la emisora.

7. El señor Cortés compra 3,000 obligaciones con valor nominal de \$100. ¿De cuánto serán sus utilidades si le pagan intereses del 10.59% anual en cupones que vencen el primer día de los meses de marzo, julio y noviembre de cada año, generan rendimientos de1 16.2% anual capitalizable por cuatrimestre, se redimen a 92 el primer día del mes de julio de 2012 y las compra el 10 de abril de 2007. Considere el precio de mercado y obtenga el descuento.

8. En el problema 7, ¿cuánto recibirá por sus obligaciones el señor Cortés e1 20 de mayo de 2009 con las mismas tasas de rendimiento e intereses y con qué descuento se las compran?

9. ¿Cuál es el precio neto de una obligación de $200 que se redime a 115 el 5 de septiembre de 2011, paga intereses del 15% anual en cupones que vencen el 5 de septiembre y el 5 de marzo de cada año? Suponga que se compran el 23 de julio de 2007 con rendimientos del 20% anual capitalizable por semestre; obtenga el descuento con el que se compran.

10. ¿Con qué prima o qué descuento se compran, el 2l de febrero de 2008, los bonos con valor nominal de $100 que se redimen a 115 e1 6 de enero de 2011, pagan intereses en cupones trimestrales de $4.80 el sexto día de los meses de enero, abril, julio y octubre de cada año? Suponga que al comprarlos se logran rendimientos del 16.4% anual capitalizable por trimestre y se compran:

a) A precio de mercado. *b*) A precio neto o efectivo.

11. ¿Cuál es el precio neto de las obligaciones que se redimen a 120, pagan intereses del 18.2% anual en cupones semestrales, su denominación es de $80, se redimen a 2 años y 8 meses después de la compraventa, y se adquieren con el 10.8% de rendimiento anual capitalizable por semestre? ¿De cuánto son las utilidades para quien las compra? ¿De cuánto es la prima?

12. ¿Cuál es el precio neto o efectivo el 13 de mayo de una obligación con valor nominal de $150, que se redime el 5 de diciembre del año siguiente y paga intereses del 12.4% anual en cupones bimestrales que vencen el quinto día de los meses pares del año? Suponga rendimientos del 19.2% anual capitalizable por bimestre y que se redimen:

a) A la par. *b*) A 120.

13. Un bono con valor nominal de $100 se redime a 105, 4 años después de su emisión, pagando intereses en cupones cuatrimestrales de $7.00 cada uno. Quince meses después de la emisión, se compra con rendimientos del 16.05% anual capitalizable por cuatrimestre, para el inversionista, obtenga:

a) El precio de mercado.

b) El precio efectivo del bono.

c) El descuento, o la prima, con el que se adquieren, considerando el precio efectivo.

d) La tasa de interés anual con que fueron emitidos.

e) La utilidad para el inversionista que compra los bonos.

14. El 19 de octubre de 2006 se negocian obligaciones con valor nominal de $90. Determine el precio neto si se redimen a 120 e1 30 de mayo de 2011, fueron emitidas pagando intereses del 10.8% anual en cupones semestrales que vencen el día 30 de los meses de mayo y noviembre de cada año, y se ofrecen con rendimiento anual del:

a) 14.6% capitalizable por semestre. *b*) 14% efectivo.

15. ¿A cuánto ascienden las utilidades para un inversionista que el 3 de marzo de 2008 adquiere 10,000 obligaciones con valor nominal de $100? Suponga que se redimen a la par el primer día de 2012, fueron emitidas con intereses en cupones trimestrales de $4.75 cada uno y se compran con rendimientos del 14.4% anual capitalizable por trimestre. Suponga precio de mercado.

16. El 10 de febrero de 2007 se emitieron bonos con valor nominal de $90, se rediman a 125, 5 años después, pagando intereses del 11.4% anual en cupones cuatrimestrales, ¿cuánto deberá pagarse por cada uno el 27 de abril de 2009 si se ofrecen con rendimientos del 13.2% anual compuesto por cuatrimestre, suponiendo:

a) El precio de mercado? *b*) El precio efectivo?

En los problemas 17 al 30 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

17. Obtenga las utilidades para un inversionista que compra bonos con valor nominal de $150, que se rediman a 104 y pagan intereses del 13.8% en cupones que vencen el tercer día de los meses de marzo, julio y noviembre de cada año. Suponga que vencen el día 3 de marzo de 2011, se negocian el 25 de abril de 2008, ofrecen rendimiento del 10.5% anual capitalizable por cuatrimestre y se compran 25 mil bonos. Resuelva con precio neto.

a) $702,425.36 *b*) $825,793.03 *c*) $774,135.98 *d*) $698,963.42 *e*) Otra

18. ¿A cuánto ascienden las utilidades si en los bonos del problema 17 se considera el precio de mercado?

a) $798,633.48 *b*) $830,339.87 *c*) $816,423.61 *d*) $765,963.91 *e*) Otra

19. ¿Cuál es el precio de mercado el 10 de octubre de 2007 de las obligaciones con valor nominal de $150, que pagan intereses en cupones bimestrales de $4.80 cada uno, vencen el 22 de noviembre de 2012 y ofrecen rendimientos del 15% efectivo? Suponga que se rediman a 110.

a) $184.76 *b*) $182.25 *c*) $176.93 *d*) $180.09 *e*) Otra

20. En el problema 19, ¿de cuánto es la prima o descuento?

a) $20.60 *b*) $16.63 *c*) $19.76 *d*) $14.90 *e*) Otra

21. ¿Cuál es la tasa de interés que paga la emisora en el problema 19?

a) 17.6% *b*) 18.9% *c*) 19.2% *d*) 16.3% *e*) Otra

22. ¿De cuánto son las utilidades para un inversionista que compra 8 mil obligaciones en las condiciones del problema 19?

a) $875,490 *b*) $903,429 *c*) $993,920 *d*) $937,429 *e*) Otra

23. ¿Cuál es el precio efectivo el 4 de febrero de una obligación con valor nominal de $100, que vence a la par el 20 de diciembre del año siguiente y paga intereses del 8.4% en cupones trimestrales? Considere que vencen a 115 y se compran con rendimiento del 10.4% nominal trimestral.

a) $110.09 *b*) $108.38 *c*) $111.93 *d*) $112.35 *e*) Otra

24. ¿De cuánto es la prima o descuento con que se adquieren las obligaciones del problema 23?

a) $6.03 *b*) $4.91 *c*) $5.65 *d*) $5.10 *e*) Otra

25. ¿Cuál es el valor contable de las obligaciones del problema 23 el día 1 de enero intermedio? Considere precio neto.

a) $110.71 *b*) $110.03 *c*) $111.69 *d*) $112.01 *e*) Otra

26. ¿Cuánto logra por utilidades un inversionista que compra 10 mil bonos con valor nominal de $100, y rendimiento del 14.4% anual capitalizable por cuatrimestre? Considere que los adquiere al 19 de marzo de 2007, vencen a la par el 30 de abril de 2012, la emisora paga intereses en cupones cuatrimestrales de $6.25 cada uno y compra a precio neto.

a) $825,409.63 *b*) $741,756.60 *c*) $903,429.75 *d*) $698,783.03 *e*) Otra

27. En el problema 26, ¿de cuánto es el descuento a la prima por cada bono?

a) prima de $21.29 *b*) descuento de $22.03 *c*) descuento de $24.65
d) prima de $19.57 *e*) Otra

28. ¿Cuál es el valor en libros el 30 de junio de 2008 de los bonos en el problema 26?

a) $114.08 *b*) $115.71 *c*) $113.93 *d*) $116.93 *e*) Otra

29. Un bono con valor nominal de $100 se redime a 110 cinco años después, pagando intereses en cupones semestrales del 12.84%, veinte meses después de su emisión, se compra con el 13.9% de rendimiento anual capitalizable por semestre. ¿Cuál es el precio neto o efectivo?

a) $108.63 *b*) $110.03 *c*) $103.91 *d*) $105.78 *e*) Otra

30. ¿Cuánto gana un inversionista que gasta $1.75 millones, en obligaciones quirografarias con valor al rendimiento de $175, cupones bimestrales de $5.60 cada uno y descuento de $10.62 por cada obligación? Suponga que se adquieren 3 años antes de vencer.

a) $1'029,306.42 *b*) $995,687.32 *c*) $1'186,177.32 *d*) $980,624.73 *e*) Otra

8.7 Obtención de la tasa de rendimiento

Es posible que la tasa de rendimiento *i* no sea parte de los datos, como en los problemas que aquí se han resuelto, sino que se tenga que evaluar para que el inversionista o su asesor financiero elijan la mejor alternativa de inversión, es decir, la que produzca mayores dividendos, al compararla con otras tasas.

Para hallar esta tasa de rendimiento anual *i* en la compra de bonos y obligaciones, existen básicamente tres métodos:

- Con la tasa promedio o de promedios.
- Con interpolación.
- Con "prueba y error" o método iterativo.

El primero, que se conoce como el *método de los comerciantes de obligaciones*, no es muy preciso, pero es el que más utilizan los agentes o corredores de bolsa, posiblemente porque es de fácil aplicación. Consiste en utilizar la fórmula que se justifica en el primer ejemplo de esta sección.

El segundo, más preciso que el primero, consiste en hacer interpolaciones tal como se explica con los ejemplos siguientes.

El tercero, que ya se ha utilizado en algunos ejemplos donde la incógnita es la tasa de interés, consiste en hacer iteraciones o tanteos de manera sucesiva hasta lograr el grado de precisión deseado. El ejemplo 5 de la presente sección así se resuelve.

Es recomendable hallar la *tasa promedio,* con el primer método, antes de utilizar los métodos *iterativo* o el de *interpolaciones*.

Tasa promedio

Ejemplo 1

Desarrollo de una fórmula para la tasa promedio

Un bono de \$100 se redime a la par en un plazo de 5 años, paga intereses en cupones semestrales de \$8.00 cada uno y su precio de mercado es de \$108. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual?

solución

El bono en la compraventa tiene un valor contable, es decir, el precio de mercado, de \$108. Al cabo de 5 años tendrá un valor de \$100 y, por lo tanto, se está adquiriendo con un premio de \$8.

La semisuma de los dos valores, llamada *inversión promedio* para el comprador de los bonos, es

$$\text{Inversión promedio} = (C + M)/2$$
$$I.\,P. = (108 + 100)/2 \text{ o}$$
$$I.\,P. = 104$$

Note que esta inversión promedio es independiente si el bono se compra con prima o con descuento. La prima de \$8 deberá amortizarse durante los 10 semestres que faltan para la redención del bono y, por lo tanto, la que se llama *amortización promedio por periodo* estará dada por el cociente.

$$A.\,P. = \frac{108 - 100}{10}$$

$$A.P. = 8/10 \quad \text{o} \quad A.P. = 0.8$$

que en general será

$$\text{Amortización promedio} = \frac{C - M}{np}$$

donde el numerador es la prima, o el descuento, y el denominador np es el número de cupones pendientes de cobrar, es decir, los que hay entre la compraventa y el vencimiento del documento.

Si esta amortización promedio se resta del valor de cada cupón, se obtiene el *rendimiento por periodo*, que en este caso será

$$8.00 - 0.8 = 7.2$$

ya que los intereses de cada cupón son $R = 8.00$.

Al dividir el rendimiento por periodo entre la inversión promedio se obtiene la que se conoce como *tasa de rendimiento promedio,* es decir,

$$i = 7.20/104 \quad \text{o} \quad i = 0.069230769$$

por periodo semestral. Si se multiplica por 2, se obtiene la tasa de rendimiento anual

$$0.069230769(2) = 0.138461539 \quad \text{o} \quad 13.846\% \text{ aproximadamente}$$

Para generalizar, se observa que la *tasa de rendimiento promedio* es igual al cociente

$$i = \frac{\text{Rendimiento por periodo}}{\text{Inversión promedio}}$$

donde la inversión promedio es $(C + M)/2$ y el rendimiento por periodo es igual al valor de cada *cupón* R, menos la amortización promedio $(C - M)/np$, es decir, el rendimiento por periodo es

$$R - (C - M)/np = [R(n)p - (C - M)]/np$$
$$= (Rnp - C + M)/np \qquad -(a - b) = -a + b$$

En consecuencia, la tasa de rendimiento por periodo es

$$i = \frac{(Rnp - C + M)/np}{(C + M)/2}$$

$$i = \frac{2[Rnp - C + M]}{np(C + M)}$$

Al multiplicar este resultado por el número de periodos por año, p, se obtiene la fórmula del siguiente teorema, ya que p se cancela.

Teorema 8.2

En la compraventa de bonos y obligaciones. la ***tasa de rendimiento promedio*** *anual* es aproximadamente igual a:

$$i = \frac{2[R(np) - C + M]}{n(C + M)}$$

donde:

$R = N(r/p)$, el valor de cada cupón.
C, el valor de compraventa o precio de mercado.
M, el valor de redención de la obligación o bono.
n, el plazo en años.
p, la frecuencia de conversión. el número de cupones por año.
np, el número de cupones pendientes de cobrar.

Ejemplo 2

Tasa promedio anual

Resolver el ejemplo 1 con el teorema 8.2.

solución

En la ecuación del teorema se reemplazan:

$M = 100$, el valor de redención, igual al valor nominal.
C = 108, el precio de mercado, de compraventa.
$R = 8.00$, el valor de cada cupón.
$p = 2$, los cupones son semestrales.
$n = 5$, el plazo en años.
$np = 5(2) = 10$, el número de cupones.

La tasa de rendimiento promedio anual es entonces:

$$i = \frac{2[8.00(10) - 108 + 100]}{5(108 + 100)}$$

$i = 144/1040$
$i = 0.138461539$ o 13.846% que es igual a la anterior

Ejemplo 3

Tasa promedio anual

Obtener la tasa de rendimiento aproximada si una obligación de \$80 redimible a la par en 4 años de plazo se ofrece, en el mercado de valores, a 92.5 y paga intereses del 15% anual en cupones trimestrales.

solución

El precio de mercado es el 92.5% del valor de redención, es decir $C = 0.925(80) = 74$; se compran con descuento. Los otros números que se sustituyen en la ecuación 8.1 son:

$M = 80$, el valor de redención, igual al valor nominal.
$r = 0.15$, la tasa de interés que paga la emisora.
$p = 4$, porque los intereses se pagan cada trimestre.
$R = 80(0.15/4) = 3.00$, el valor de cada cupón.
$n = 4$ años, el plazo.
$np = 16$, el número de trimestres.

Entonces la tasa promedio anual es

$$i = \frac{2[3(16) - 74 + 80]}{4(74 + 80)}$$

$$i = \frac{2(54)}{4(154)}$$

$i = 0.175324675$ o 17.5325% aproximadamente

Método de interpolación

La *interpolación lineal* es un método de aproximación para estimar el valor de alguna expresión matemática dados dos valores, uno antes y otro después, del que se pretende encontrar.

Ejemplo 4

Tasa de rendimiento anual con interpolación

Resolver el ejemplo 3 con el método de interpolación lineal.

El tipo de rendimiento que se obtuvo en el ejemplo 3 fue de 17.5325%, entonces se procede a encontrar el valor de C para dos valores de i entre los cuales se encuentra el 0.175325.

Por supuesto que hay muchos valores de i entre los cuales está el 0.175325, por ejemplo 0.17 y 0.18 o 0.16 y 0.19 o 0.172 y 0.178 y muchos más. Es evidente que cuanto más cifras decimales se consideren en este par de números, mayor precisión se logrará, pero también es cierto que el intervalo o la distancia entre los dos se hará cada vez más pequeño, tanto que la tasa aproximada $i = 0.175325$ resulte fuera de dicho intervalo y entonces más que interpolación, la tasa se aproximará extrapolando. En todo caso, se procurará que el valor aproximado de i esté en el punto medio de los dos que se tomen.

Con $i = 0.172$, el precio de mercado, puesto que $M = 80$, $R = 3$, $p = 4$ y $np = 16$, resulta:

$$C_1 = 80(1 + 0.172/4)^{-16} + 3\left[\frac{1-(1.043)^{-16}}{0.043}\right]$$

$$C_1 = 80(0.509860145) + 3(11.39860128)$$

$$C_1 = 40.7888116 + 34.19580384$$

o $$C_1 = 74.98461544$$

Con $i = 0.178$ queda:

$$C_2 = 80(1 + 0.178/4)^{-16} + 3\left[\frac{1-(1.0445)^{-16}}{0.0445}\right]$$

$$C_2 = 39.86161387 + 33.82448268$$

o $$C_2 = 73.68609655$$

Quiere decir que el valor de $i =$ para el precio de mercado dado de \$74 deberá estar entre los valores de $i = 0.172$ e $i = 0.178$, y con esto se procede a la interpolación, haciendo el arreglo siguiente con los números que hemos considerado y los que se obtuvieron con cada tasa de interés.

$$0.006\left[d\left[\begin{array}{c}0.172---74.98461544\\ i---74.00\end{array}\right]0.98461544 \atop 0.178---73.68609655\right]1.29851889$$

El cociente de la diferencia d entre la diferencia 0.006, la que hay entre las dos tasas, debe ser proporcional al cociente de las diferencias del lado derecho de este arreglo, las que hay entre los tres capitales C_1, C_2 y C_3, por eso es válida la ecuación siguiente, que no es más que una ecuación de proporcionalidad, es decir, es el resultado de aplicar una regla de tres.

$$\frac{d}{0.006}=\frac{0.98461544}{1.29851889}$$

de donde

$$d=(0.75826039)(0.006)$$

o $$d=0.004549562$$

En el mismo arreglo de números, se aprecia que el valor de d debe sumarse al de la primera tasa, la menor, y por eso la tasa de rendimiento anual capitalizable por trimestre es:

$$i=0.172+0.004549562$$

$$i=0.176549562 \quad \text{o} \quad 17.6549562\%$$

Si bien es cierto que con el método de interpolación el resultado es más preciso que aplicando la fórmula del teorema 8.2, no deja de ser aproximado, porque la variación en las tasas no se comporta de manera lineal, como lo supone la interpolación lineal.

Método iterativo

Éste consiste en asignar valores a i de manera sucesiva, sustituyéndolos en la ecuación 8.1 hasta obtener la precisión deseada. Las iteraciones pueden iniciarse con la tasa que se obtiene al utilizar la fórmula del teorema 8.2.

Ejemplo 5

Tasa de rendimiento anual con el método iterativo

Obtener la tasa de rendimiento anual capitalizable por semestre de una obligación hipotecaria con valor nominal de \$100, redimible a la par 3 años después, suponiendo que paga intereses del 13.2% anual en cupones semestrales y se ofrece a 105 en el mercado de valores.

solución

En la ecuación 8.2, se sustituyen los siguientes valores para hallar la tasa aproximada.

$M = 100$, el valor de redención.
$C = 100(1.05) = 105$, el precio de mercado.
$n = 3$ años, el plazo o tiempo entre la compraventa y la redención.
$p = 2$, porque los cupones son semestrales.

$np = 6$, el número de cupones por cobrar.

$R = 100(0.132/2) = 6.60$, el valor de cada cupón.

Entonces:

$$i = \frac{2[6.60(6) - 105 + 100]}{3(105 + 100)}$$

$$i = 2(34.60)/3(205)$$

$$i = 0.112520325$$

Dando valores cercanos a esta tasa se inician las iteraciones. A continuación se escriben algunos de ellos y el resultado correspondiente.

Con $i = 0.112$, esto es $i/2 = 0.056$ queda:

$$C = 100(1 + 0.056)^{-6} + 6.60\left[\frac{1-(1.056)^{-6}}{0.056}\right]$$

$$C = 72.11348612 + 32.8662485$$

o $$C = 104.9797346$$

Quiere decir que debe bajar la tasa para que aumente C.

Con $i/2 = 0.055$ resulta:

$$C = 72.5245833 + 32.97050004$$

o $$C = 105.4950833$$

Con $i/2 = 0.0558$ queda:

$$C = 72.19548762 + 32.88705765$$

o $$C = 105{,}0825453$$

Con otros valores de $i/2$ se obtienen los siguientes, cuya comprobación se deja para el estudiante, junto con otros valores intermedios.

Con $i/2 = 0.05596$, $C = 105.0002864$

Si $i/2 = 0.055965$, $C = 104.9977172$

Si $i/2 = 0.0559605$, $C = 105.0000295$

Con $i/2 = 0.05596057$, $C = 104.9999935$

y finalmente con $i/2 = 0.055960557$ resulta $C = 105.0000002$

que es muy buena aproximación para la tasa. Consecuentemente la anual es:

$$i = 0.055960557(2)$$

$$i = 0.111921114 \quad \text{o} \quad 11.1921114\% \text{ anual}$$

Compraventa entre fechas de cupón

Para hallar la tasa de rendimiento cuando la compraventa se realiza entre dos fechas de cupón, puede hacerse una doble interpolación, pero se obtiene aproximadamente el mismo resultado, si se considera el número de periodos np fraccionario, lo cual hace el procedimiento mucho más sencillo, como se aprecia en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6

Tasa de rendimiento, tasa de interés, utilidades y precio efectivo de un bono

Un bono de \$90 con cupones cuatrimestrales de \$8.10 cada uno, se redime a 120 el 15 de abril de 2013, ¿cuál es el tanto de beneficio si el 15 de julio de 2007 se cotiza a 95? ¿Cuál es la tasa de interés que paga la emisora? ¿A cuánto ascienden las utilidades para quien compra los bonos? ¿De cuánto son si se compran con su precio efectivo?

solución

a) Note usted que la fecha de compraventa no coincide con fecha de cupón alguna, porque los cupones vencen el día 15 de los meses de abril, agosto y diciembre de cada año, ya que el bono se redime el 15 de abril.

Como primer paso, se obtiene la tasa de rendimiento aproximada, sustituyendo en la ecuación 8.2 los siguientes valores:

$M = 90(1.20) = 108$, porque se rediman a 120.

$R = \$8.10$, el valor de cada cupón.

$C = 108(0.95) = 102.6$, se cotizan a 95, el día de la compra.

$p = 3$, los cupones son cuatrimestrales.

Para el plazo, en la figura 8.9 se aprecia que es de 6 años, menos un trimestre, es decir, $n = 5.75$ años. El número de periodos es $np = 17.25$ cuatrimestres, esto es 5.75(3)

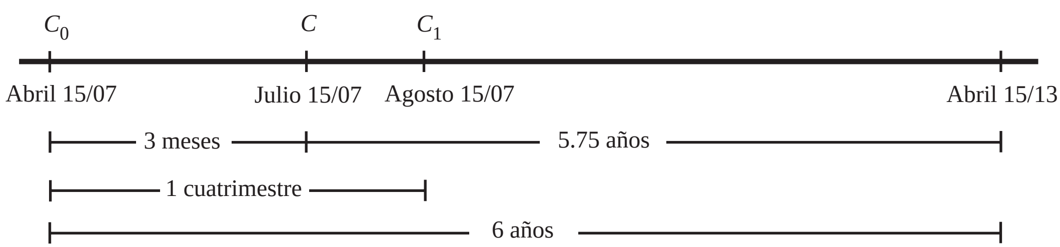


FIGURA 8.9

Entonces

$$i = \frac{2[8.10(17.25) - 102.6 + 108]}{5.75(102.6 + 108)}$$

$$i = 2\ (145.125)/1{,}210.95 \qquad \text{o} \qquad i = 0.239687848$$

Con $i = 0.24$, resulta que el valor de compraventa es

$$C = 108(1 + 0.24/3)^{-17.25} + 8.10\ \left[\frac{1-(1.08)^{-17.25}}{0.08}\right]$$

$$C = 28.63281013 + 74.4067405$$

$$C = 103.0395506$$

Es necesario incrementar la tasa para que se reduzca C.
Si $i = 0.245$:

$$C = 108(1 + 0.245/3)^{-17.25} + 8.10 \left[\frac{1-(1+0.245/3)^{-17.25}}{0.245/3}\right]$$

$$C = 27.88122187 + 73.57846968 \quad \text{o} \quad C = 101.4596916$$

Continuando con las iteraciones, se llega a que con

$i = 0.241379802$ o $i/3 = 0.080459934$ el precio de compraventa es

$$C = 108(1.080459934)^{-17.25} + 8.10 \left[\frac{1-(1.080459934)^{-17.25}}{0.080459934}\right]$$

$$C = 28.42328385 + 74.17671646 \quad \text{o} \quad C = 102.6000003$$

En consecuencia, la tasa de rendimiento anual capitalizable por trimestre es $i = 0.241379802$ o 24.138%, aproximadamente.

b) La tasa de interés que paga la emisora es r de la igualdad siguiente:

$$8.10 = 90(r/3) \qquad R = N(r/p)$$

de donde

$$r = 8.10(3)/90$$

$$r = 0.27 \quad \text{o} \quad 27\% \text{ anual}$$

c) Las utilidades, es decir, los intereses para el inversionista que compra los bonos, son

$$I = 108 + 17(8.10) - 102.6$$

$$I = 108.00 + 137.70 - 102.6 \quad \text{o} \quad I = \$143.10$$

d) El precio neto o efectivo y las utilidades con este precio, son

$$E = C + 3/4(R)$$

$$E = 102.6 + 3/4(8.10) \quad \text{o} \quad E = \$108.675 \text{ e}$$

$$I = 108 + 17(8.10) - 108.675 \quad \text{o} \quad I = \$137.02$$

Ejercicios 8.7

1. Diga cuáles son los tres métodos para estimar la tasa de rendimiento anual al comprar bonos y obligaciones.

2. ¿Cuál es la fórmula para obtener la tasa de *rendimiento promedio anual* en la compraventa de bonos y obligaciones?

En los problemas del 3 al 13 suponga que la cotización el día de la compraventa está considerada como el precio de mercado, no el precio neto. Utilice el método iterativo en los problemas 7, 8 y 9, y el de interpolación en los restantes; en todos, obtenga primero la tasa aproximada con el teorema 8.2.

3. Un bono de $100 se redime a la par dentro de 4 años, paga intereses del 12% anual en cupones semestrales y su precio cotizado, es decir, su precio de mercado, es de $80, ¿cuál es la tasa de rendimiento anual capitalizable por semestre?

4. Una obligación con denominación de $200 paga intereses del 18% anual en cupones trimestrales, ¿cuál es la tasa de rendimiento anual si se redime a la par y 3 años antes de su redención se cotiza en $160 en el mercado de valores?

5. Encuentre la tasa de rendimiento anual capitalizable por semestre, de una obligación quirografaria con valor nominal de $120, redimible a la par en un plazo de 4 años, suponiendo que se ofrece a 95 en el mercado de valores y paga intereses del 10.5% anual en cupones semestrales. Recuerde que si se ofrece a 95, entonces su precio de mercado es igual al 95% de su valor nominal.

6. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual capitalizable por trimestre de un bono del gobierno central, con denominación de $90, redimible a la par en 2.5 años y que paga intereses del 11.2% anual en cupones trimestrales? Suponga que se cotiza en $92 cada uno el día de la compraventa.

7. Una obligación hipotecaria de $100 al 12.4%, en cupones que vencen el primer día de los meses de febrero, mayo, agosto y noviembre de cada año, se redime a 115 el primer día de agosto de 2011, ¿cuál es el tanto de beneficio si el 1 de febrero de 2007 se cotiza a 106?

8. Un bono del gobierno local con valor nominal de $80, se cotiza a 96 en el mercado de valores el día 10 de abril de 2008, ¿cuál es la tasa de rendimiento anual capitalizable por cuatrimestre, suponiendo que se redime a la par el 10 de agosto de 2013 y paga intereses en cupones cuatrimestrales de $6.40 cada uno?

9. El 20 de octubre de 2006 se cotiza en $98 una obligación con valor nominal de $90, ¿cuál es la tasa de rendimiento anual capitalizable por semestre si la obligación se redime a 120 el 20 de abril de 2013 y paga intereses del 10.6% anual en cupones semestrales?

10. ¿Cuál es la tasa de beneficio anual capitalizable por cuatrimestre si un bono con denominación de $120 se redime a 95 el 3 de febrero de 2011, paga intereses del 20.7% anual en cupones cuatrimestrales y el 3 de junio de 2006 se cotiza en $102 cada uno? ¿A cuánto ascienden las utilidades para el inversionista que las compra? ¿De cuánto es el descuento? ¿En cuánto se cotizarán el 20 de junio de 2007 considerando precio efectivo?

11. El 10 de marzo de 2005, una obligación hipotecaria con denominación de $80 se ofreció en el mercado de valores en $85, ¿en cuánto se negocia el 19 de diciembre de 2008 si se mantiene la tasa de rendimiento anual? Suponga que se redime a 125 el 10 de septiembre de 2011 y paga intereses del 12.3% anual en cupones semestrales y utilice el precio neto. *Sugerencia:* Obtenga primero la tasa de rendimiento anual.

12. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual compuesta por trimestre si un bono con valor nominal de $100 se redime a 98 el 15 de junio de 2012, paga intereses del 15% anual en cupones trimestrales y el 15 de marzo de 2007 se cotiza en $87 en el mercado de valores? ¿De cuánto son las utilidades para el inversionista que las compra? ¿Cuál es el precio neto el 3 de diciembre de 2010?

13. ¿Cuánto dinero gana el contador Gutiérrez al invertir, el 3 de diciembre de 2006, l'500,000 de dólares en obligaciones con valor nominal de $100, se redimen a 120 el 3 de marzo de 2009, pagan intereses en cupones trimestrales de $4.80 cada uno y el 3 de junio de 2005 se cotizaron en $102? ¿Con qué tasa de interés anual paga la emisora? Vea la sugerencia del problema 11.

14. ¿En cuánto se cotizan, el 21 de octubre de 2008, los bonos que el l de marzo de 2006 se cotizaron en $93.50, suponiendo que se redimen a 98 el l de julio de 2012, su valor nominal es de $120 y pagan intereses del 13.2% anual en cupones cuatrimestrales? Vea la sugerencia del problema 11 y obtenga la cotización con:

a) El precio de mercado. *b*) El precio neto.

15. ¿Cuál es el precio neto, el 8 de marzo de 2008, de las obligaciones quirografarias que el 15 de febrero de 2006 se cotizaron en $105, tienen valor nominal de $110, se redimen a 120 el 15 de agosto de 2010 y pagan intereses del 7.6% en cupones semestrales?

En los problemas del 16 al 27 seleccione la opción correcta, justificándola. En todos, encuentre primero la tasa de rendimiento promedio con el teorema 8.2, en los primeros siete, use el método iterativo, en los otros, interpolación lineal y en todos redondee a tres cifras decimales.

16. Una obligación de $100 se redime a la par en 5 años, paga intereses del 18% en cupones trimestrales y su precio de mercado es de $80. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual capitalizable por trimestre?

a) 26.732% *b*) 25.136% *c*) 24.685% *d*) 25.693% *e*) Otra

17. Encuentra la tasa de rendimiento anual capitalizable por bimestre de una obligación con valor nominal de $120, que vence a la par en un plazo de 4 años. Considere que se ofrece a 96 en el mercado de valores y paga intereses del 13.2% anual en cupones bimestrales.

a) 15.935% *b*) 14.587% *c*) 14.530% *d*) 15.233% *e*) Otra

18. ¿De cuánto es la prima o descuento en las obligaciones del problema 17?

a) prima de $6.25 *b*) prima de $4.80 *c*) descuento de $4.80
d) descuento de $5.65 *e*) Otra

19. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual capitalizable por trimestre de un bono que el gobierno central emitió con valor nominal de $100, vencimiento a la par 3.5 años después y paga intereses del 13.5% anual en cupones trimestrales? Considere que se cotiza a $98.00, 1 año después de su emisión.

a) 14.467% *b*) 15.213% *c*) 14.098% *d*) 16.314% *e*) Otra

20. El 18 de junio de 2006 una obligación quirografaria con valor nominal de $150 se ofreció en el mercado de valores en $135 cada una, ¿en cuánto se negocia el 3 de diciembre de 2009 si se mantiene la tasa de rendimiento anual? Suponga que vencen a 120 el 18 de agosto de 2012 y pagan intereses del 11.2% anual en cupones bimestrales. Obtenga primero la tasa de rendimiento anual.

a) $161.32 *b*)$153.24 *c*) $157.05 *d*) $155.47 *e*) Otra

21. ¿En cuánto se cotizan, el 11 de abril de 2008, los bonos que el 1 de marzo de 2006 se cotizaron en $107.3, considerando que se redimen a 96 el 1 de junio de 2013, su valor nominal es de $100, pagan intereses del 14.2% en cupones trimestrales? Encuentre primero la tasa de rendimiento anual.

a) $114.96 *b*) $110.25 *c*) $107.63 *d*) $106.08 *e*) Otra

22. ¿Cuánto gana un inversionista que el 11 de abril de 2008 compra 15 mil bonos en las condiciones del problema 21?

a) $865,695.33 *b*) $963,345.61 *c*) $930,600.00 *d*) $784,906.00 *e*) Otra

23. ¿Cuál es el precio neto, el 8 de febrero de 2008, de los bonos que el 15 de enero de 2006 se cotizaron en $102.50, tienen valor nominal de 120, se redimen a 108 el 15 de julio de 2010 y pagan intereses del 13.6% anual en cupones bimestrales? Interpole con $i = 0.196$ e $i = 0.197$ para hallar primero la tasa de rendimiento anual.

a) $114.25 *b*) $109.63 *c*) $113.68 *d*) $112.97 *e*) Otra

24. Obtenga la tasa de rendimiento anual capitalizable por cuatrimestre de una obligación fiduciaria con valor nominal de $150 redimible a 104 en un plazo de 5 años, considerando que se ofrece a 98 en el mercado de valores y paga intereses del 14.2% en cupones cuatrimestrales. Para hallar la tasa de rendimiento, interpole con $i = 0.1422$ e $i = 0.1423$.

a) 15.2113% *b*) 16.0935% *c*) 14.2218% *d*) 13.9261% *e*) Otra

25. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual capitalizable por semestre de una obligación con valor de redención de $100, que se redime a la par en 4.5 años paga intereses del 15% anual en cupones semestrales y se cotiza en $98 en la compraventa? Interpole con $i = 0.1563$ e $i = 0.1564$.

a) 15.63547% *b*) 15.03214% *c*) 15.98632% *d*) 16.12312% *e*) Otra

26. ¿En cuánto se cotizan las obligaciones del problema 25 cuando faltan 36 meses para su vencimiento, si se mantiene la tasa de rendimiento?

a) $88.93 *b*) $87.62 *c*) $90.01 *d*) $89.63 *e*) Otra

27. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual de los bonos que el 5 de enero se cotizan en $105, el 5 de junio del año siguiente vencen en $100 y pagan $2.40 por cada cupón mensual? Haga la interpolación con $i = 0.246$ e $i = 0.245$

a) 23.4935% *b*) 24.0321% *c*) 25.1516% *d*) 24.5847%

8.8 Acciones y otros títulos de inversión

En esta parte del capítulo se analizan las formas de calcular el valor de compraventa y las tasas de rendimiento de otros títulos de inversión, como las acciones que las compañías comerciales, industriales y de servicios ofrecen a los inversionistas que, por ello, se convierten en acreedores de las mismas empresas.

Se inicia definiendo las que se conocen como *tasas efectivas de rendimiento anual y mensual,* que son útiles sobre todo para comparar dos o más alternativas de inversión, facilitando tomar la mejor decisión.

Definición 8.1

La ***tasa efectiva de rendimiento anual***, que se emplea en la compraventa de algunos valores en el mercado bursátil, se define como

$$i_e = (1 + i)^{365/q} - 1$$

y la ***tasa efectiva de rendimiento mensual*** es $i_e = (1 + i)^{30/q} - 1$

donde

i es la tasa de interés correspondiente a un periodo de q días, y está dada por el cociente de los intereses entre el capital, es decir

$$i = I/C$$

Nótese que:

*Las dos ecuaciones son semejantes, pero diferentes a la tasa efectiva que se definió en el capítulo 4.

*La diferencia entre las dos fórmulas es el numerador del exponente.

*Estas fórmulas pueden ajustarse a cualquier otro periodo, cambiando el numerador del exponente por ejemplo por 28, para periodos de 28 días en la compraventa de certificados de inversión.

Ejemplo 1

Tasa efectiva de rendimiento anual y mensual, dada la cotización de las acciones

Las acciones de una compañía procesadora de alimentos se cotizaron en \$50.08 el 25 de noviembre, y en \$52.25 el 10 de febrero del año siguiente, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual? ¿Cuál es la de rendimiento anual?

solución

La primera cotización es un capital, la segunda es el valor futuro y la diferencia entre las dos es igual a los intereses.

$$I = 52.25 - 50.08 \qquad I = M - C$$

$$I = 2.17$$

La tasa de interés para los 77 días, comprendidos entre el 25 de noviembre y el 10 de febrero, es:

$$i = 2.17/50.08 \qquad i = I/C$$

$$i = .0.043330671$$

La tasa efectiva de rendimiento mensual, según la fórmula de la definición 8.1, es

$$i_e = (1 + 0.043330671)^{30/77} - 1$$

$$i_e = 1.016663876 - 1$$

$$i_e = 0.016663876 \qquad \text{o}$$

1.666% aproximadamente y la de rendimiento anual es

$$i_e = (1.04333067)^{365/77} - 1$$

$$i_e = 1.222714168 - 1$$

$$i_e = 0.222714168 \qquad \text{o} \qquad 22.27\%\text{, aproximadamente.}$$

Importante

Estos porcentajes y las cantidades no incluyen los dividendos, es decir, las ganancias que el organismo emisor distribuye entre sus accionistas, tampoco incluyen las comisiones que cargan las casas o puestos de bolsa y los bancos al comercializar esta clase de documentos.

Recuerde que la tasa de interés i puede obtenerse dividiendo la cotización actual entre la anterior y restando la unidad, es decir, $i = 52.52/50.08 - 1 = 0.043330671$, en este ejemplo.

La variación en las cotizaciones de los títulos de inversión, que se publica en los periódicos, depende de los movimientos que sufre el mercado bursátil, principalmente por la oferta-demanda, pudiendo suceder que el rendimiento tienda a la baja, produciendo pérdidas para el inversionista y para el organismo emisor. El ejemplo siguiente ilustra dicha situación.

Ejemplo 2

Tasa efectiva de rendimiento mensual

¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual de las acciones que el 3 de julio se cotizaron en \$75.21 y e1 29 del mismo mes estuvieron en \$73.93.

solución

Puesto que el plazo incluye sólo una de las dos fechas, se tiene que el número de días es

$$29 - 3 = 26$$

Los intereses son la diferencia entre el valor futuro y el capital

$$I = 73.93 - 75.21 \qquad I = -1.28$$

y la tasa para ese lapso es

$i = -\ 1.28/75.21 \qquad i = I/C$

$i = -\ 0.017019013$ La tasa efectiva de rendimiento mensual es, por lo tanto:

$i_e = [1 + (-0.017019013)]^{30/26} - 1$

$i_e = (0.982980987)^{30/26} - 1$

$i_e = 0.98038851 - 1$

$i_e = -0.019611491$

Lo anterior significa que en un periodo de 30 días, un mes, la pérdida en el precio de las acciones es aproximadamente de 1.96%. Suponiendo que se sostiene la tasa de reducción durante el año, la tasa anual será:

$i_e = (0.982980987)^{365/26} - 1$

$i_e = 0.785859521 - 1$

$i_e = -\ 0.214140479$ o 21.414% aproximadamente.

Compra con descuento

En la cuarta sección de este capítulo se dijo que el precio de compraventa de los títulos de inversión puede ser mayor que su valor en la redención, en cuyo caso se adquieren con prima.

Si se adquieren con descuento, es decir, el precio de compraventa es menor que el valor de redención, entonces el descuento estará dado por $D = ndM$ y el precio de mercado será:

$$P = M(1 - nd) \qquad \textit{Teorema } 3.4$$

donde:

M, el valor de redención o valor nominal cuando se redime a la par.

d, la tasa de descuento simple.

n, el plazo.

Recuerde que n y d deben estar en las mismas unidades de tiempo, días en este caso. Debe quedar claro, además, que intervienen en la compraventa de algunos títulos de inversión, es decir, pueden considerarse las siguientes tasas:

- La de *descuento,* que se aplica al valor de redención para obtener el precio de mercado.
- La de *rendimiento nominal*, que se aplica al precio de mercado para llegar al valor de redención. Es equivalente, mas no igual, a la tasa de descuento.
- La *tasa efectiva de rendimiento mensual, o anual,* que se aplica al valor de compraventa, con las ecuaciones de la definición 8.1 y constituye el mejor indicador para comparar diferentes alternativas de inversión.

Las primeras dos generalmente se publican en las ofertas de colocación en el mercado de valores junto con otros datos importantes tal como se aprecia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Utilidades al invertir en papel comercial

El 18 de mayo se publicó en los periódicos la oferta de papel comercial con descuento del 10.3% anual simple y valor nominal de los pagarés de \$100. ¿Cuánto ganará un inversionista que compra 25,000 pagarés considerando que el plazo es de 43 días? ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual?

solución

a) La tasa de descuento anual es $d = 0.103$.

El plazo es $n = 43$ días, el valor nominal, es decir, el monto es $M = 100$ y el valor comercial es, por lo tanto:

$$P = 100[1 - 43\ (0.103/360)] \qquad P = M(1 - nd)$$
$$P = 100(0.987697222) \quad \text{o} \quad P = \$98.76972222$$

La utilidad unitaria, la de cada pagaré, es la diferencia $M - P$

$$M - P = 100 - 98.76972222 = 1.23027778$$

y la utilidad total con los 25,000 pagarés es

$$U = 25{,}000(1.23027778) \qquad U = \$30{,}756.94$$

b) La tasa de interés que corresponde a los 42 días es

$$i = 1.23027778/98.76972222 \qquad i = I/C$$
$$i = 0.012456021 \quad \text{o} \quad 1.2456021\%$$

La tasa de interés nominal anual se obtiene multiplicando este resultado por la fracción 360/43. ¿Por qué?

$$0.012456021(360/43) = 0.10428297.$$

Esta tasa aparece en el anuncio, cuando se anuncia como 10.4283% y significa que si se aplica al precio de mercado, resultará el valor nominal del pagaré, es decir:

$$M = 98.76972222[1 + 43(0.10428297/360)] \qquad M = C(1 + ni)$$
$$M = 98.76972222(1.012456021) \quad \text{o} \quad M = 100.00$$

Con la primera ecuación de la definición 8.1 se obtiene la tasa efectiva de rendimiento anual:

$$i_e = (1 + 0.012456021)^{365/43} - 1] \qquad i_e = (1 + i)^{365/9} - 1$$
$$i_e = 1.110797541 - 1$$
$$i_e = 0.110797541 \quad \text{u} \quad 11.08\% \text{ aproximadamente.}$$

Ejemplo 4

Utilidades al invertir en certificados del Tesoro (CT), tasa de interés

En los periódicos se anuncia la oferta pública de certificados del Tesoro a un plazo de 91 días, valor nominal de $10 y un tipo de descuento del 10.8% simple anual. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual? ¿A cuánto ascienden las utilidades para una sociedad profesional que invierte 2.5 millones de dólares? ¿Cuál es la tasa de interés simple anual?

solución

a) El precio de compraventa de cada certificado se obtiene sustituyendo en la ecuación 3.4 los valores siguientes:

$M = 10.00$, el valor futuro o nominal.

$d = 0.108$, la tasa de descuento simple anual.

$n = 91$ días, el plazo.

Entonces

$$P = 10.00[1 - 91(0.108/360)] \qquad P = M(1 - nd)$$
$$P = 10.00(0.9727) \quad \text{o } P = \$9.727$$

La tasa de interés que corresponde a los 91 días es

$$i = (10 - 9.727)/9.727 \quad \text{ya que} \quad i = I/C \quad \text{e} \quad I = M - C$$
$$i = 0.273/9.727 \quad \text{o} \quad i = 0.028066207$$

La tasa efectiva de rendimiento anual es entonces:

$$i_e = (1 + 0.028066207)^{365/91} - 1 \qquad i_e = (1 + i)^{365/q} - 1$$
$$i_e = 1.117419988 - 1$$
$$i_e = 0.117419988 \quad \text{u} \quad 11.74\ \%\text{, redondeando.}$$

b) La utilidad por cada certificado es la diferencia entre el valor de compraventa y el valor nominal.

$$I = 10.00 - 9.727$$
$$I = \$0.273$$

Con 2.5 millones de dólares se adquieren 257,016 certificados porque

$$2'500{,}000/9.727 = 257{,}016.5519$$

La utilidad total para la asociación profesional es, por lo tanto

$$I = 257{,}016(0.273) \quad \text{o} \quad \$70{,}165.37$$

c) La tasa de interés simple anual se obtiene multiplicando la tasa diaria por 360, esto es

$$(0.028066207/91)360 = 0.11103115 \quad \text{u} \quad 11.103115\%$$

Observe que el valor futuro de cada certificado con esta tasa es igual a su valor nominal.

$$M = 9.727[1 + (0.1113115/360)\ 91]$$
$$M = 9.727(1.028066207) \quad \text{o} \quad M = 10.00$$

Compraventa con tasa efectiva

En los ejemplos que preceden se ha encontrado el valor comercial de los títulos, empleando la fórmula del descuento simple $P = M(1 - nd)$, pero puede evaluarse con la tasa efectiva de rendimiento anual, procediendo de manera inversa a la anterior.

Ejemplo 5

Compra de certificados del Tesoro con tasa efectiva de rendimiento anual

¿Cuál será el precio de compraventa de los certificados del Tesoro del ejemplo 4, 39 días antes de su vencimiento, si se mantiene la tasa efectiva de rendimiento anual?

solución

La tasa efectiva de rendimiento anual que se obtuvo en el ejemplo 4 es

$$i_e = 0.117419988$$

La tasa i que corresponde a los 39 días del nuevo plazo está en la siguiente igualdad que resulta de sustituir en la ecuación de la definición 8.1

$$(1 + i)^{365/39} - 1 = 0.117419988$$

Para despejar i, se suma la unidad a los dos lados, se obtiene la raíz 365ª y después se eleva a la potencia 39, es decir:

$$(1+i)^{365/39} = 1.117419988$$
$$1+i = (1.117419988)^{39/365}$$
$$1+i = 1.011933313$$
$$i = 1.011933313 - 1 \quad \text{o} \quad i = 0.011933313$$

Ésta debe ser igual al cociente $i = I/C$, pero $I = M - C$ o $I = 10 - \mathrm{C}$, porque $M = 10$ entonces

$$(10 - C)/C = 0.011933313$$

Se multiplica a los dos lados por C y con otros pasos algebraicos se despeja la misma C.

$$10 - \mathrm{C} = (0.011933313)C$$
$$10 = C + 0.011933313C$$
$$10 = C(1.011933313) \text{ ya que } c + ac = c(1+a)$$

de donde

$$C = 10/1.011933313$$
$$C = 9.882074116 \quad \text{o} \quad C = \$9.8821$$

Denominación en dólares

Existen títulos de inversión como los bonos que se negocian con descuento, pero se cotizan en dólares. Su rendimiento, por lo tanto, depende del tipo de descuento, pero también del tipo de cambio moneda local-dólar. El caso se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6

Tasa efectiva de rendimiento anual

Suponga que se anuncia la colocación de bonos en el mercado de valores con los siguientes datos:

Valor nominal: \$1,000
Tasa de descuento: $d = 0.126$ o 12.60%
Plazo: 91 días

Encuentre la tasa efectiva de rendimiento anual suponiendo que:

a) La paridad moneda local-dólar no varía.

b) En la fecha de emisión de los pagarés, el tipo de cambio fue de 10.8601 por cada dólar, y 91 días después fue de 11.0825.

solución

a) Con la fórmula del valor descontado, que ya se estudió en el capítulo 3, se obtiene el precio de compraventa en dólares.

$$P = 1{,}000[1 - 91(0.126/360)] \qquad P = M(1 - nd)$$
$$P = 1{,}000(0.96815)$$
$$P = \$968.15$$

Las utilidades para el inversionista son la diferencia entre los dos valores

$$I = 1{,}000.00 - 968.15 \qquad I = M - C,\ C = P$$
$$I = 31.85$$

La tasa de interés por los 91 días del plazo es

$$i = 31.85/968.15 \qquad i = I/C$$

o

$$i = 0.032897795$$

La tasa nominal anual es

$$(0.032897795/91)360 = 0.130145122 \quad \text{o} \quad 13.0145\% \text{ aproximadamente.}$$

Finalmente, la tasa efectiva de rendimiento anual según la ecuación de la definición 8.1 es

$$i_e = (1 + 0.032897795)^{365/91} - 1$$
$$i_e = 1.138633291 - 1$$
$$i_e = 0.138633291 \ \text{ o } \ 13.8633\%$$

b) El valor al vencimiento en moneda local con la cotización futura del dólar es

$$M = 1{,}000(11.0825)$$
$$M = \$11{,}082.50$$

El precio de mercado en moneda local en su colocación es

$$P = 968.15(10.8601)$$
$$P = 10{,}514.20582$$

Los intereses, es decir las ganancias para el inversionista en moneda nacional son entonces

$$I = 11{,}082.50 - 10{,}514.21 \qquad I = M - P$$
$$I = 568.29 \text{ por cada bono}$$

La tasa de interés correspondiente a los 91 días es

$$i = 568.29/10{,}514.21$$
$$i = 0.05404971$$

y la tasa efectiva de rendimiento anual es

$$i_e = (1 + 0.05404971)^{365/91} - 1$$
$$i_e = 1.235081434 - 1$$
$$i_e = 0.235081434 \quad \text{o} \quad 23.5081\% \text{ aproximadamente.}$$

Ejercicios 8.8

1. Mencione cuatro ejemplos de valores que se adquieren en el mercado bursátil de su país.
2. ¿Qué ganancias se obtienen al invertir en acciones, bonos y obligaciones?
3. ¿Cómo se calcula la tasa efectiva de rendimiento mensual?, ¿la anual?
4. ¿Para qué fueron creados los certificados del Tesoro?
5. ¿Qué es el papel comercial?
6. Mencione dos títulos de inversión que se coticen en dólares.
7. El 10 de enero de 2006 las acciones de una compañía televisora se cotizaron en $25.08 y el 12 de marzo siguiente, en $26.93. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual?
8. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual de las acciones que el 5 de noviembre se cotizaron en $12.8503 y el 15 de enero siguiente, en $13.0863?
9. El 10 de diciembre se publicó en los periódicos un anuncio de colocación de papel comercial con los datos siguientes, obtenga la tasa efectiva de rendimiento anual y las utilidades que alcanza una persona que invierte 1.75 millones de dólares el día que se colocan.

Valor nominal:	$100.
Fecha de emisión:	diciembre 11 de 2006.
Fecha de vencimiento:	enero 17 de 2007.
Tasa de descuento:	9.76% simple anual.

10. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual de las acciones que el 3 de abril se cotizaron en $56.7535 y el 15 de junio siguiente, en $57.0315?
11. Obtenga la tasa efectiva de rendimiento anual de los títulos que el 23 de marzo se cotizaron en $125 y el 3 de mayo siguiente, en $126.08.
12. En los periódicos se anuncia la oferta de certificados del Tesoro con plazo de 28 días, valor nominal de $10 y un tipo de descuento del 10.05%. ¿De cuánto es la utilidad para una persona que invierte 1.25 millones de dólares en certificados del Tesoro? ¿Con qué tasa de interés simple anual gana en su inversión? ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual?
13. Las acciones de una importante compañía de refrescos se cotizaron en $68.5123 el 20 de junio y el 3 de septiembre siguiente, en $69.8215, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual? ¿En cuánto se cotizan el 1 de agosto intermedio si se mantiene la tasa efectiva anual?
14. ¿Qué conviene más a un inversionista invertir su dinero en certificados del Tesoro, con descuento de1 12.6% simple anual y plazo de 91 días, o en una cuenta bancaria, que ofrece intereses del 13.2% simple anual?

15. Suponga que se anuncia la colocación de títulos en el mercado de valores con la siguiente información:

Valor nominal	$N = M = \$1{,}000.00$.
Plazo:	$n = 70$ días.
Tasa de descuento:	$d = 0.117$ simple anual.

Obtenga la tasa efectiva de rendimiento anual, suponiendo que:

La paridad moneda local-dólar no varía durante la vigencia de los títulos.

En la fecha de emisión de los pagarés, el tipo de cambio fue de 10.9708 por cada dólar y 70 días después fue de 11.0953.

16. Con valor nominal de 1,000 y plazo de 91 días, en el mercado de valores se ofrecen bonos con descuento del 11.08% simple anual. Calcule la tasa efectiva de rendimiento anual, suponiendo que:

La cotización del dólar se mantiene invariable durante los 91 días del plazo.

La cotización del dólar en la fecha de vencimiento fue de 11.0217, y 91 días antes fue de 10.9671 por cada dólar.

17. ¿Con qué tasa de descuento simple anual se ofrecen en su emisión los certificados del Tesoro con plazo de 182 días si en su colocación se cotizaron en $9.7529 cada uno? ¿Cuál es la tasa de interés simple anual? ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual? ¿La anual? ¿Cuánto gana un inversionista que invierte 2.3 millones de dólares en certificados del Tesoro?

Seleccione la opción correcta, justificando su lección en los problemas desde el 18 hasta el 32.

18. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual de las acciones que el 19 de marzo se cotizaron en $43.9281 y el 3 de junio siguiente en $47.0232?

a) 36.2943% *b*) 38.6796% *c*) 35.2962% *d*) 39.4291 *e*) Otra

19. ¿En cuánto se cotizarán el 21 de agosto siguiente las acciones del problema 18 si se sostiene la tasa efectiva?

a) $50.9135 *b*) $46.0631 *c*) $45.8312 *d*) $47.1498 *e*) Otra

20. El 21 de junio de 2007 las acciones de una compañía automotriz se cotizan en $56.2321, ¿en cuánto se cotizarán el 3 de noviembre siguiente si el 12 de agosto se cotizaron en $57.1205 y se mantiene la tasa efectiva de rendimiento mensual?

a) $58.5677 *b*) $58.0963 *c*) $59.3291 *d*) $57.9803 *e*) Otra

21. ¿Cuánto gana un inversionista el 3 de noviembre si el 21 de junio anterior invirtió 2.3 millones de dólares en las acciones del problema 20?

a) $80,793.45 *b*) $101,238.63 *c*) $95,528.38 *d*) $88,765.62 *e*) Otra

22. Obtenga la tasa efectiva de rendimiento anual de los títulos que el 3 de marzo se cotizaron en $26.3245 y el 12 de mayo siguiente se cotizaron en $27.0957?

a) 17.6148% *b*) 18.0932% *c*) 15.1721% *d*) 16.2488% *e*) Otra

23. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual de las acciones que el 1 de diciembre se cotizaron en $23.0925 y el 5 de febrero siguiente, en $22.9531?

a) −4.4543% *b*) −7.2905% *c*) −5.6291% *d*) −3.2931% *e*) Otra

24. ¿Cuánto dinero perdió el señor Gutiérrez al de 5 de febrero si el 1 de diciembre anterior invirtió 1.8 millones de dólares en las acciones del problema 23?

a) $9,629.09 *b*) $13,636.08 *c*) $10,865.81 *d*) $12,329.03 *e*) Otra

25. ¿Cuánto ganará, o perderá, desde 1 de diciembre al 23 de abril del año siguiente el señor Gutiérrez del problema 24 si la tasa efectiva de rendimiento anual se incrementó en 7 puntos porcentuales en el segundo periodo con respecto al primero?

a) ganó $4,629.32 *b*) perdió $3,429.03 *c*) perdió $762.48
d) ganó $2,925.01 *e*) Otra

26. El 8 de junio de 2006 se publicó en los periódicos un anuncio de colocación de papel comercial con valor nominal de $100, vencimiento el 10 de enero de 2007 y descuento del 11.28% simple anual, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual?

a) 0.9776% *b*) 0.8023% *c*) 1.0234% *d*) 0.9015% *e*) Otra

27. En el problema 26, ¿cuál es la tasa de interés simple anual?

a) 12.0867% *b*)13.1415% *c*)11.0488% *d*) 11.9876% *e*) Otra

28. En la prensa escrita se anuncia la oferta de certificados del Tesoro con plazo de 28 días y descuento del 12.05% simple anual, ¿de cuánto será la utilidad para una persona que invierte 2.1 millones de dólares en tales certificados?

a) $19,863.09 *b*) $20,329.06 *c*) $18,648.36 *d*) $21,473.69 *e*) Otra

29. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual de los certificados del Tesoro en las condiciones del problema 28?

a) 0.8893% *b*) 1.3142% *c*) 0.9708% *d*) 1.0138% *e*) Otra

30. ¿De qué porcentaje es la tasa efectiva de rendimiento anual de los certificados del Tesoro que se ofrecen con el 9.72% de descuento simple anual y plazo de 182 días?

a) 11.6893% *b*) 10.6336% *c*) 10.0853% *d*) 9.0681% *e*) Otra

31. Se anuncia la colocación de títulos con valor nominal de $1,000, plazo de 90 días y descuento simple anual del 14.20%, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual considerando que en la colocación el tipo de cambio fue de 10.8932 por cada dólar y de 11.0293 en la fecha de vencimiento?

a) 20.60352% *b*) 21.76785% *c*) 19.90682% *d*) 22.60953% *e*) Otra

32. ¿Cuál será la tasa efectiva de rendimiento anual en el problema 31 si la paridad moneda local-dólar sostiene sin variar?

a) 16.4532% *b*) 18.9308% *c*) 16.9561% *d*) 15.7879% *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar de estudiar este capítulo, el lector estará capacitado para:

- Explicar por qué las compañías emiten acciones, bonos y obligaciones.
- Explicar brevemente las diferencias entre bonos, obligaciones y acciones.
- Explicar la diferencia principal entre obligaciones quirografarias, fiduciarias e hipotecarias.
- Explicar el propósito de los cupones.
- Describir los elementos principales de las obligaciones y los bonos.
- Calcular el precio de mercado y el precio neto de las obligaciones y los bonos.
- Encontrar la tasa de rendimiento, la tasa de interés y las utilidades que se tienen al invertir en acciones, bonos y obligaciones.
- Explicar los conceptos de prima y descuento en la adquisición de bonos y obligaciones, y calcularlos.
- Calcular el valor contable de los bonos y las obligaciones al final de cualquier periodo.
- Elaborar el cuadro de amortización de la prima y de acumulación del descuento.
- Calcular las tasas efectivas de rendimiento anual y mensual.
- Decidirse por la mejor opción al comprar títulos de inversión.

Conceptos importantes

Acciones
Bonos
Cotización de títulos con tasa efectiva de rendimiento
Cuadros de acumulación del descuento y de amortización de la prima
Cupón y fecha de cupón
Fechas de emisión, de redención y de compraventa de títulos de inversión
Obligaciones quirografaria, fiduciaria e hipotecaria
Prima y descuento en la compraventa de obligaciones y bonos
Redención a la par, con descuento y con prima de las obligaciones y los bonos
Tasa de rendimiento aproximada
Tasa efectiva de rendimiento anual y mensual
Tasas de descuento, de rendimiento y de interés
Utilidades para el inversionista que adquiere títulos en el mercado de dinero y de capitales
Valor de compraventa entre fechas de cupón
Valor de emisión o valor de redención y valor de compraventa de títulos de inversión
Valor en libros o valor contable de un título de inversión

Problemas propuestos para exámenes

Justificando su respuesta, conteste verdadero o falso, en los problemas 1 a 11.

1. Las obligaciones son emitidas por empresas del sector privado________.

2. Las empresas del sector público emiten obligaciones quirografarias________.

3. Comprar una obligación con descuento significa que se adquiere a un precio menor que su valor de redención________.

4. El precio de mercado es mayor que el precio neto________.

5. Precio neto y precio efectivo son sinónimos________.

6. Al comprar un bono se incluye el valor presente de sus cupones________.

7. Cuando una obligación se redime a la par, el valor de redención es igual al valor de emisión________.

8. El precio de mercado es siempre menor que el valor de redención________.

9. Si un bono se redime a 120 entonces se redime a la par________.

10. En algunos casos, la fecha de emisión está después que la fecha de redención de una obligación________.

11. Si el valor de compraventa es menor que el de redención entonces el bono o la obligación se compra con premio________.

En los problemas 12 al 25, complete la frase:

12. Para hallar el precio de mercado de un bono u obligación se emplea la fórmula________.

13. Si una obligación se redime a la par, entonces________.

14. Si un bono se adquiere con descuento significa que________.

15. Si un bono se redime a 112, significa que________.

16. Los cupones sirven para________.

17. El valor nominal de los certificados del Tesoro es $________.

18. El cuadro de amortización de la prima y de acumulación del descuento sirven para________.

19. La diferencia entre el precio efectivo y el precio de mercado de un bono es________.

20. La tasa de rendimiento promedio anual está dada por________.

21. La tasa efectiva de rendimiento anual está dada por________.

22. Comprar una obligación con premio significa que________.

23. Tres fechas importantes que intervienen en el mercado de bonos y obligaciones son________.

24. ¿Qué son las ganancias del capital? ________.

25. ¿Cuál es el valor de compraventa de una obligación hipotecaria con valor nominal de $200, intereses del 26.3% anual en cupones semestrales, 4 años antes de su redención, si se ofrecen con rendimientos del 25.2% anual capitalizable por semestre? ________.

26. Las obligaciones de una importante firma de refrescos por $100 cada una pagan intereses del 26.4% anual en cupones trimestrales. Encuentre el valor de compraventa el 5 de marzo si vencen el 5 de diciembre del año siguiente y se ofrecen con el 30% de rendimiento anual compuesto por trimestre.

27. ¿Cuánto gana un inversionista que adquiere obligaciones con valor nominal de $300 y pagan intereses en cupones cuatrimestrales de $13 cada uno? Suponga que invierte 2.75 millones de dólares, que la tasa de rendimiento es del 10.5% anual capitalizable por cuatrimestre y faltan 2 años para el vencimiento de las obligaciones. Obtenga la tasa de interés que paga la emisora y haga un cuadro de acumulación del descuento.

28. Determine cuál de las siguientes opciones es más rentable al invertir 1 millón de dólares:

Comprar obligaciones con valor nominal de $200, intereses en cupones trimestrales de $6.75 cada uno y rendimientos del 16% anual capitalizable por trimestre.

Adquirir certificados del Tesoro con descuento del 9.75% simple anual.

Comprar bonos con valor nominal de $100, intereses del 15% anual en cupones cuatrimestrales y rendimiento del 16.5% anual capitalizable por cuatrimestre. Suponga 2 años de plazo.

29. La compañía Aceites y Lubricantes colocó en el mercado bursátil obligaciones hipotecarias con denominación de $100.00, vencimiento a la par en 3.5 años e intereses del 11.4% en cupones semestrales. Obtenga el cuadro de acumulación del descuento o la amortización de la prima si se transfieren el día de su emisión, y ofrecen rendimientos del 9.3% nominal semestral.

30. Una obligación con valor nominal de $200 se redime a 106 cinco años después de su emisión, paga intereses del 13.9% anual en cupones trimestrales. Veinte meses después de la emisión se transfiere con un rendimiento para el comprador del 12.4% nominal trimestral. Obtenga el precio de mercado y el precio efectivo.

31. Un bono del gobierno con valor nominal de $100 se cotiza a 98 el 15 de octubre de 2006, ¿cuál es la tasa de rendimiento anual si los intereses del 11.2% anual se pagan el 15 de abril y de octubre de cada año y se redime a la par el 15 de octubre de 2010?

32. Una obligación hipotecaria de $200 al 11.8% anual con cupones que se cobran el sexto día de los meses de febrero, junio y octubre de cada año, se redime a la par el 6 de junio de 2011, ¿de cuánto es el tanto de beneficio si se negocia el 6 de febrero de 2007 en $172?

33. El 22 de enero de 2006 las acciones de una empresa editorial se cotizaron en $42.85 y el 5 de abril siguiente, en $45.03, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual? ¿La mensual?

34. ¿En cuánto se cotizan las acciones del problema 33 el 23 de febrero intermedio si se mantiene la tasa efectiva de rendimiento mensual?

35. Encuentre la tasa efectiva de rendimiento mensual de los títulos que se colocaron en el mercado de valores con la siguiente información:

Valor nominal	\$1,000
Plazo	63 días
Tasa de descuento	$d = 0.1305$ o 13.05% anual

Considere que

a) El tipo de cambio moneda local-dólar no varía.

b) En la fecha de emisión, cada dólar costaba \$10.8531 y en la de redención, \$11.0128.

En los problemas 36 al 56 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

36. Si una obligación se redime a 105 y su valor nominal es de \$100, ¿en cuánto se comercializa si se compra a 93?

a) \$9,765 *b*) \$95.43 *c*) \$89.61 *d*) \$100.05 *e*) Otra

37. Un bono se comercializa a 105 en \$154.35. ¿Cuál es el valor nominal si se redime a 98?

a) \$140.00 *b*) \$160.00 *c*) \$200.00 *d*) \$150.00 *e*) Otra

38. Se adquiere un bono en \$211.20. ¿A cuánto se redime, en porcentaje, si se compra a 96? Suponga que su valor nominal es \$200.

a) 95% *b*) 110% *c*) 105% *d*) 97% *e*) Otra

39. ¿Cuál es el valor de compraventa de una obligación con denominación de \$200 y se compra a 97?

a) \$194 *b*) \$185 *c*) \$214 *d*) \$178 *e*) Otra

40. ¿Cuál es el valor nominal de un bono que se emitió a 105 y se adquiere en \$177.66, comprándose a 94?

a) \$150 *b*) \$160 *c*) \$200 *d*) \$180 *e*) Otra

41. ¿Cuál es el valor de compraventa de una obligación el 5 de marzo de 2007 si su valor nominal es de \$150, se redime a 94 y se compra a 98?

a) \$140.65 *b*) \$135.00 *c*) \$138.18 *d*) \$142.20 *e*) Otra

42. Una importante sociedad profesional coloca en el mercado de valores obligaciones de \$100 cada una y plazo de 5 años, ¿de cuánto serán las utilidades para una persona que invierte 2.3 millones de dólares en esas obligaciones 18 meses después de la emisión? Suponga que vencen a la par, bonifican rendimientos del 13.6% anual capitalizable por trimestre y el 11.4% anual en cupones trimestrales.

a) \$986,429.61 *b*) \$1’205,429.36 *c*) \$1’124,901.95 *d*) 1’087,968.32 *e*) Otra

43. ¿De cuánto fueron la prima o el descuento con que se compran las obligaciones del problema 42?

a) prima de \$7.23 *b*) prima de \$5.68 *c*) descuento de \$6.05
d) descuento de \$7.63 *e*) Otra

44. ¿Cuál es el valor nominal de los bonos cuyo cuadro de amortización de la prima es el siguiente en sus primeras filas? Suponga que se redimen a la par y son 19 cupones cuatrimestrales

Periodo	Intereses	Cupón	Amortización	Valor contable
0	—	—	—	158.518691
1	4.914079	5.25	0.335921	158.182770
2	4.903666	5.25	0.346334	157.836436

a) \$130 *b*) \$150 *c*) \$200 *d*) \$170 *e*) Otra

45. ¿Cuál es el valor contable luego de cobrar el cupón número 12 en los bonos del problema 44?

a) \$153.724122 *b*) \$150.932171 *c*) \$154.629032 *d*) \$152.932415 *e*) Otra

46. ¿En cuánto se compran el 10 de febrero de 2007 los bonos con valor nominal de \$200, que vencen a 115 el 20 de abril de 2013, bonifican intereses del 12.3% anual en cupones bimestrales y rendimientos del 11.28% anual capitalizable por bimestre? Considere precio de mercado.

a) \$224.3242 *b*) \$223.9739 *c*) \$221.0687 *d*) \$218.8891 *e*) Otra

47. ¿De cuánto es la utilidad por cada bono en el problema 46?

a) \$163.42 *b*) \$155.29 *c*) \$160.23 *d*) \$157.73 *e*) Otra

48. ¿Con qué tasa de interés se emitieron las obligaciones con valor nominal de \$100 si 2,000 se negocian en \$207,363.69, 2.5 años antes de su vencimiento? Suponga que se rediman a 108 y se ofrecen con el 13.2% anual capitalizable por trimestre.

a) 12.2% *b*) 13.5% *c*) 11.62% *d*) 14.03% *e*) Otra

49. ¿Cuál es el precio neto de una obligación de \$200, que vence a la par el 10 de junio de 2010 y paga intereses del 10.5% en cupones que vencen el décimo día de los meses pares del año? Considérese que se compran el 23 de julio de 2007 con rendimiento del 15% efectivo.

a) \$190.0621 *b*) \$185.3959 *c*) \$188.2552 *d*) \$193.2113 *e*) Otra

50. ¿De cuánto son la prima o el descuento con que se compran las obligaciones del problema 49?

a) prima de \$15.0542 *b*) prima de \$11.7448 *c*) descuento de \$14.6041
d) descuento de \$12.2721 *e*) Otra

51. ¿Cuánto dinero reintegrará el día del vencimiento la emisora al inversionista por cada obligación que 2 años, 7 meses y 10 días antes se cotizan en \$151.3548. ¿Considere precio de mercado con intereses del 13.2% anual en cupones cuatrimestrales y rendimiento del 14.4% anual capitalizable por cuatrimestre.

a) \$157.50 *b*) \$152.94 *c*) \$163.08 *d*) \$143.93 *e*) Otra

52. ¿Cuál es la tasa de rendimiento anual capitalizable por mes si una obligación, con denominación de $150, vence a 97 el 15 de abril de 2009, paga intereses en cupones mensuales de $3.50 cada uno y el 15 de enero de 2006 se ofreció en $218.50

a) 11.21325% *b*) 12.41327% *c*) 10.06391% *d*) 10.56079% *e*) Otra

53. ¿A cuánto asciende la prima o descuento de cada obligación del problema 52?

a) prima de $73.00 *b*) descuento de $68.50 *c*) prima de $68.50
d) descuento de $72.50 *e*) Otra

54. El 4 de mayo se emitió papel comercial con valor nominal de $100, vencimiento al 17 de junio siguiente y descuento del 12.24% simple anual, ¿cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual?

a) 13.31911% *b*) 12.62581% *c*) 11.6258% *d*) 12.2400% *e*) Otra

55. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento mensual de las acciones que el 23 de marzo se cotizaron en $48.2135 y el 13 de junio siguiente en $49.6891?

a) 0.9065% *b*) 0.9508% *c*) 1.0531% *d*) 1.1090% *e*) Otra

56. Con valor de $1,000 y plazo de 91 días, se ofrecen en el mercado de valores bonos con descuento del 10.44% simple anual. ¿Cuál es la tasa efectiva de rendimiento anual si en la emisión cada dólar costaba $10.9875 y $11.0532 en el vencimiento?

a) 13.2963% *b*) 14.8433% *c*) 14.0178% *d*) 12.0931% *e*) Otra

Capítulo 9

Anualidades contingentes

Contenido de la unidad

En el capítulo 5 se dijo que una anualidad es *cierta* si se conocen las fechas de inicio y de terminación del plazo, es decir, el número de rentas, en tanto es *contingente* si se desconoce por lo menos una de las dos fechas. En este capítulo abordaremos tal clase de anualidades, con las que se llaman rentas *vitalicias*, que se denominan así porque se reciben o se pagan únicamente durante el tiempo en que la persona vive.

9.1 Probabilidad de un evento

¿Por qué cuando se lanza un dado algunas veces cae con el 3 en la cara superior y otras no? ¿Por qué al llegar a un crucero el semáforo está en luz verde y otras está en rojo o en color ámbar? ¿Por qué al participar en una rifa algunas veces se obtiene un premio y muchas otras no?

Se dice que situaciones como éstas se rigen por el azar, pero, ¿qué es realmente el azar? Para algunos, el azar es considerado como la interacción de muchos factores que influyen en un resultado, argumentando que al llegar a un crucero, por ejemplo, que el semáforo esté en siga depende de circunstancias o factores como la velocidad del automóvil antes de llegar al crucero, si está o no sincronizado con los semáforos anteriores, si es el primero que está en el trayecto a la oficina o el trabajo, pero sobre todo del tiempo programado para cada uno de los tres colores.

Aunque en principio la probabilidad es un concepto vago, el cálculo de probabilidades es una poderosa herramienta para todo aquel que necesita determinar y medir qué tan probable es un evento por ocurrir. Es necesario comenzar con algunas definiciones importantes.

Definición 9.1

Evento es cada uno de los resultados posibles de una acción, es decir, de un *experimento*, en tanto que al conjunto de todos los resultados que pueden ocurrir se le llama *espacio muestral*.

Ejemplo 1

Arrojar al aire una moneda es un experimento con dos resultados posibles, es decir, dos eventos o sucesos, A de cara y S de cruz. El espacio muestral es el conjunto {cara, cruz}.

Procurando una mejor comprensión, el estudio y la didáctica de las probabilidades se fundamenta principalmente en experimentos tan simples como lanzar una moneda o un dado, extraer una carta del mazo de la baraja o sacar una esfera de una caja que contiene varias y de diferentes colores.

Existen tres enfoques al considerar o calcular la probabilidad de un evento cualquiera: el *clásico* o matemático, el *empírico* o estadístico y el subjetivo.

En el clásico se considera que todos los eventos del espacio muestral, es decir, todos los resultados son igualmente probables y por ello la probabilidad de cada uno es simplemente el cociente del número de veces en que incide el evento A entre el total de resultados posibles. La probabilidad del evento A se denota como $p(A)$, donde en el paréntesis se escribe cualquier letra que puede ser la inicial del evento o la palabra completa; también se simboliza simplemente como p. Entonces la probabilidad del evento A es:

$$p(A) = \text{número de veces en que ocurre } A/\text{total de resultados posibles.}$$

Ejemplo 2

La probabilidad de que al tirar un dado normal caiga en 5 es:

$$p(C) = 1/6, \qquad p(C) = 0.166667 \qquad \text{o} \qquad p(C) = 16.6667\%$$

ya que la probabilidad de cualquier evento puede expresarse en porcentaje.

Ejemplo 3

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado resulte un número impar?

solución

Puesto que son tres las caras con número impar, la probabilidad es:

$$p(I) = 3/6, \qquad p(I) = 0.5 \qquad \text{o} \qquad p(I) = 50\%$$

En el enfoque empírico o estadístico, la probabilidad se mide con base en datos históricos, es decir, de acuerdo con el número de veces en que se tuvo un resultado, luego de repetir muchas veces el experimento. Si, por ejemplo, al tirar 100 veces un dado o, lo que es lo mismo, lanzar 100 dados, en 21 cayó el número 5, entonces la probabilidad de que en el siguiente lanzamiento caiga también un 5 será:

$$p(C) = 21/100, \qquad p(C) = 0.21 \qquad \text{o} \qquad p(C) = 21\%$$

siempre y cuando se mantengan, claro, las mismas condiciones del experimento.

Con este enfoque, la probabilidad del evento E será en general

$$p(E) = \frac{\text{número de veces que ocurrió } E}{\text{número total de observaciones o ensayos}}$$

Es oportuno señalar que en el enfoque estadístico:

- Cuanto más grande es el número de veces que se repita el experimento, mayores serán la precisión y confiabilidad al calcular la probabilidad del evento.
- Como se verá después, las probabilidades que se requieren evaluar en este capítulo se fundamentan en este enfoque, lo cual lo convierte en el más importante.
- Al igual que el enfoque matemático, éste es un método objetivo.

Ejemplo 4

La profesora Laura sabe que de 30 veces que llega al primer semáforo rumbo a su trabajo, 9 está en siga, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente vez alcance el verde en dicho semáforo? Utilice el enfoque empírico.

solución

La probabilidad que se cuestiona es:

$$p(V) = 9/30 \qquad 3/10 \qquad \text{o} \qquad 30\%$$

En el enfoque subjetivo, que no es objetivo, las probabilidades se calculan a puro sentimiento de quienes hacen la evaluación. Por supuesto que influye de manera importante su experiencia personal. Un médico, por ejemplo, utiliza satisfactoriamente este enfoque cuando diagnostica alguna enfermedad y decide prescribir un tratamiento o proceder con la cirugía en el paciente.

Se emplea también este enfoque cuando se adquiere un boleto para participar en el sorteo de la Lotería Nacional por ejemplo; una de sus desventajas es que suelen ser difíciles de comprobar si se cuestionan los resultados.

Los números en las probabilidades

- La probabilidad de cualquier evento E estará siempre entre 0 y 1, es decir, entre 0 y 100%, esto es:

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

- La probabilidad de un evento imposible es nula, esto es:

$$p(E) = 0 \qquad \text{si} \qquad E \qquad \text{no puede suceder}$$

- Contrariamente, la probabilidad de un evento que ocurre con toda seguridad es 1. Así, la probabilidad del espacio muestral es 1.
- La probabilidad de que no ocurra un evento E es complementaria a la de que el evento ocurra, es decir:

$$p(E') = 1 - p(E) \qquad \text{donde } p(E) \text{ es la probabilidad de que suceda el evento } E.$$

- Como se dijo, la probabilidad de un evento puede expresarse como un cociente, en decimales o como un porcentaje.

Ejemplo 5

Suponiendo que hoy es viernes, ¿cuál es la probabilidad de que mañana sea sábado? ¿De qué ayer haya sido martes?

solución

Si hoy es viernes, con toda seguridad mañana es sábado, esto es $p(S) = 1$ o 100%; contrariamente, es imposible que ayer haya sido martes si hoy es sábado, por eso $p(M) = 0$.

Ejemplo 6

A propósito, ¿cuál es la probabilidad de que hoy sea viernes?

solución

En virtud de que es igualmente probable que hoy sea cualquiera de los 7 días de la semana, la probabilidad de que sea viernes es:

$$p(V) = 1/7 = 0.142857143 \quad \text{o} \quad 14.2857\% \text{ aproximadamente.}$$

Probabilidad de dos o más eventos

Definición 9.2

Se dice que dos eventos son *mutuamente excluyentes* si no pueden ocurrir al mismo tiempo.

Ejemplo 7

Si ganar una partida de ajedrez es el evento G y perderla es el evento P, entonces G y P son mutuamente excluyentes, porque un ajedrecista no puede ganar y perder la misma partida.

Note que empatar no es lo mismo que no ganar, ¿por qué?

Ejemplo 8

Llueve y hace frío no son dos eventos mutuamente excluyentes, porque puede sentirse frío cuando está lloviendo, es decir, sí pueden ocurrir al mismo tiempo.

La probabilidad de que ocurra cualquiera de dos o más eventos mutuamente excluyentes es simplemente igual a la suma de las probabilidades, e decir:

$$p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B)$$

Ejemplo 9

¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja de 52, resulte ser as o una carta con número par?

solución

La probabilidad de extraer un as es $p(A) = 4/52$ o $p(A) = 1/13$, porque son cuatro ases, y la probabilidad de sacar una carta marcada con número par es $p(B) = 26/52$ o $p(B) = {}^1/_2$, porque 26 tienen número par. Entonces, la probabilidad de sacar un as o una carta con número par, puesto que son mutuamente excluyentes, es:

$$\begin{aligned} p(A \text{ o } B) &= 1/13 + 1/2 \\ &= 0.576923077 \text{ o } 57.6923\% \text{ aproximadamente.} \end{aligned}$$

Note que si los eventos no son excluyentes, entonces de la suma de las dos probabilidades se resta la probabilidad de que ambos ocurran, es decir:

$$p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ y } B)$$

Ejemplo 10

Los registros de tránsito de la entidad indican que en el 36% de los accidentes el conductor no llevaba puesto su cinturón de seguridad, que el 30% manejaban a exceso de velocidad y el 8% de los que iban a velocidad excesiva no tenían puesto su cinturón, ¿cuál es la probabilidad de que en un accidente vial el conductor no llevaba puesto su cinturón o manejaba a exceso de velocidad?

solución

La probabilidad de que el conductor no llevaba puesto su cinturón es $p(N) = 0.36$, $p(E) = 0.30$ es la probabilidad de que manejaba con exceso de velocidad y $p(N \text{ y } E) = 0.08$, la de manejar a exceso de velocidad sin llevar puesto el cinturón; por lo tanto, la probabilidad que se pide es:

$$p(N \text{ o } E) = 0.36 + 0.30 - 0.08 \qquad p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ y } B)$$

$$p(N \text{ o } E) = 0.58 \quad \text{o} \quad 58\%$$

Definición 9.3

Se dice que dos o más eventos son *independientes* cuando la ocurrencia de uno cualquiera no afecta la ocurrencia de los otros.

Ejemplo 11

Al lanzar una moneda tres veces, o lanzar tres monedas, que en la primera caiga cara en nada afecta el resultado de las otras dos, por eso son tres eventos independientes.

La probabilidad de que ocurran dos eventos independientes es igual al producto de sus probabilidades, es decir:

$$p(A \text{ y } B) = p(A)p(B)$$

Ejemplo 12

¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos canicas de una caja que contiene 5 rojas, 3 verdes y 2 negras, las dos sean rojas? Considere que la primera se regresa a la caja antes de sacar la segunda.

solución

La probabilidad que la primera sea roja es $p(R_1) = 5/10$ o $1/2$, ¿por qué?, en tanto que de la segunda también lo sea, puesto que la primera se ha regresado, es también $p(R_2) = 1/2$, entonces la probabilidad de que las dos sean rojas es:

$$p(R_1 \text{ y } R_2) = (1/2)(1/2) = 1/4 \quad \text{o} \quad 25\%$$

Note que si la primera no se regresa, entonces los eventos se vuelven dependientes y la probabilidad de que la segunda sea roja es $P(R_2) = 4/9$, porque al sacarla quedaban 4 rojas y 9 en total en la caja. La probabilidad de que ambas sean rojas es por consecuencia

$$\begin{aligned} p(R_1 \text{ y } R_2) &= (5/10)(4/9) \\ &= 2/9 \quad \text{o} \quad 22.22222\% \quad \text{o} \quad 22.\overline{2}\% \end{aligned}$$

La probabilidad en eventos dependientes se conoce como *probabilidad condicional*.

Ejercicios 9.1

1. ¿Cómo explica usted el azar?
2. Explique brevemente los conceptos de *evento*, *espacio muestral* y *experimento*.
3. Mencione tres eventos cuando saca una carta de la baraja.
4. ¿Cuál es el espacio muestral al tirar tres monedas al aire?

5. ¿Cuál es el espacio muestral al lanzar un par de dados? ¿Tres dados?
6. Para el resultado de un partido de fútbol sóccer, ¿cuál es el espacio muestral? ¿Para un partido de béisbol?
7. ¿Cómo son dos eventos complementarios?
8. ¿Cuál es el evento complementario del evento “hoy es martes”?
9. ¿Ganar o perder una partida de ajedrez son dos eventos complementarios?
10. ¿Cuál es el evento complementario de acreditar un examen?
11. Describa dos enfoques objetivos en el cálculo de las probabilidades.
12. ¿Por qué es errónea la afirmación “la probabilidad de obtener un premio en una rifa con 1000 números es 0.005”, habiendo 7 premios?
13. ¿Es posible que la probabilidad de un evento sea 1.005? ¿1.00038%?
14. ¿Cuál es la probabilidad de que el 20 de junio llueva en la ciudad si los registros indican que en esta fecha el 28.5% de los días no ha llovido?
15. Sin tomar en cuenta otros factores, ¿cual será la probabilidad de alcanzar un semáforo en luz verde si está programado para permanecer 3 minutos en rojo, 1.5 minutos en verde y 5 segundos en preventiva?
16. Si de 50 veces que se tiró un dado en 32 cayó con un número par en la cara superior, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente vez que se lanza, en las mismas condiciones, caiga un número impar según el enfoque empírico? ¿Según el clásico? ¿Según el subjetivo?
17. En el problema 16, ¿cuál será la probabilidad de que caiga un número menor o igual a 4 con el enfoque clásico?
18. Resuelva el problema 17 con el enfoque estadístico si se sabe que de las 50, 4 veces cayó en 5 y 8 veces cayó en 6.
19. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un par de monedas las dos caigan con igual cara? ¿Con cara diferente?
20. Si se tiran 3 dados, ¿cuál es la probabilidad de que los 3 sean cuatros?
21. ¿Qué factores tomaría usted en cuenta para calcular la probabilidad de que su equipo favorito de fútbol gane su siguiente compromiso?
22. Se sabe que el 15% de los que inician una carrera profesional no la concluyen, ¿qué probabilidad tiene usted de terminarla si recién la comenzó?
23. Si la probabilidad de que usted acredite el curso de matemáticas financieras es 0.92, ¿cuántos de 125 alumnos la acreditaron en condiciones semejantes?
24. De 50,000 personas de 30 años de edad, 43,750 celebraron su 65 aniversario, ¿cuál es la probabilidad de que Juan López, de 30 años y del mismo grupo de personas, haya llegado a los 65?
25. La probabilidad de acreditar estadística es 0.75 y la de acreditar administración es 0.87, ¿cuál es la probabilidad de acreditar las dos? ¿Exactamente una de las dos? ¿De acreditar al menos una de las dos? Considere que el 5% reprueba sólo administración. Sugerencia: use teoría de conjuntos, diagramas de Venn en particular.

26. En el problema 25, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante continúe sus estudios si sabe que si reprueba las dos no continuará?

27. ¿Cuál es la probabilidad de que el día de mañana sea viernes?

28. ¿Cuál es la probabilidad de que hoy sea 15 de enero?

29. Teresa participa en una interesante promoción de conocida marca de higiénicos y desechables, la cual consiste en acertar el número de artículos que caben en un automóvil compacto. El premio es el propio automóvil. ¿Cuál es la probabilidad de llevárselo si sabe que el número de artículos está entre 375 y 725, inclusive, y sólo participó con 3 números, uno por cada boleto de compra?

30. ¿Con cuántas notas de compra deberá participar Teresa del problema 29 para asegurar quedarse con el automóvil si no hay otro ganador?

31. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as al tomar una carta de una baraja de 52?

32. En el problema 31, ¿cuál es la probabilidad de extraer un rey de bastos?

33. Si se sacan 2 cartas de la baraja de 52, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean nueves? Suponga que la primera se regresa antes de sacar la segunda y después, que la primera no regresa.

34. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo 24 de junio llueva en la ciudad si se sabe que de los 40 años que se tienen registros, 35 ha llovido en esa fecha?

35. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 43 años de edad celebre su 45 aniversario si se sabe que de 95,106 en el mismo conglomerado social, 93,694 lo han logrado?

36. De 24 veces que el campeón nacional de ajedrez se ha enfrentado con su acérrimo rival, en 15 lo ha derrotado, ¿cuál es la probabilidad de que en el siguiente enfrentamiento no lo derrote?

37. En el problema 36, ¿cuál es la probabilidad de que empaten si el campeón ha perdido sólo tres de sus enfrentamientos con el susodicho rival?

38. Si de los 129 días que llueve en la ciudad, en 25 hace frío, ¿cuál es la probabilidad de que mañana llueva y no haga frío? Considere que el año tiene 365 días. Vea la sugerencia del problema 25.

39. Una caja contiene 4 canicas de color azul, 5 de color verde y 7 de color blanco, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar 2 canicas:

a) las dos sean blancas?
b) una sea azul y la otra sea blanca?
c) las dos sean de igual color?
d) la primera sea roja y la segunda sea blanca?
e) una sea blanca y la otra sea verde?

40. Si de un grupo de 90 alumnos de primer ingreso, 25 estudian contaduría, 35 son de ingeniería, 18 de medicina y el resto de actuaría, uno de ellos obtuvo una beca del 100% para continuar sus estudios, ¿cuál es la probabilidad de que ese alumno:

a) estudia ingeniería?
b) no estudia medicina?
c) estudia contaduría o actuaría?
d) es de actuaría o no es de ingeniería?
e) no es de ingeniería ni de medicina?

41. Diga si los cuatro eventos en el problema 40 son:

a) mutuamente excluyentes.
b) eventos independientes. Justifique sus respuestas.

42. Al lanzar al aire una moneda tres veces se presentan las siguientes probabilidades $P(N)$, donde N es el número de caras.

$p(0) = 0.125$ $p(1) = 0.375$ $p(2) = 0.375$ y $p(3) = 0.125$

Determine la probabilidad de que caigan:

a) una o tres caras.
b) más de dos caras.
c) dos o tres cruces.
d) tres y dos caras.
e) al menos una cruz.

43. Suponiendo que $p(A) = 0.75$, $p(B) = 0.60$ y $p(A \text{ y } B) = 0.45$, determine:

a) A y B son mutuamente excluyentes? Vea la sugerencia del problema 25.
b) $p(A \text{ o } B)$
c) $p(A' \text{ y } B)$
d) $p(A \text{ y } B')$

En los problemas del 44 al 60, seleccione la respuesta correcta, justificando su elección.

44. La probabilidad de que al sacar una carta de la baraja de 52 sea roja es:

a) 1/13 *b*) 1/4 *c*) 1/2 *d*) 1/26 *e*) Otra

45. La probabilidad de que mañana sea el decimotercer día del mes de 30 días es:

a) 13/30 *b*) 1/7 *c*) 17/30 *d*) 1/30 *e*) Otra

46. La probabilidad de que al sacar una esfera de una caja que contiene 8 blancas, 5 negras y 4 rojas, sea negra es:

a) 5/12 *b*) 5/17 *c*) 5/8 *d*) 12/17 *e*) Otra

47. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar al mismo tiempo 2 esferas de la caja del problema 46, las dos sean blancas?

a) 7/34 *b*) 15/33 *c*) 64/289 *d*) 8/17 *e*) Otra

48. Las probabilidades de que no haya accidentes automovilísticos entre la 1:30 y las 4:30 de la mañana en un fin de semana son 0.01, y de que haya 1, 2, 3, 4, 5 o 6 accidentes son, respectivamente, 0.08, 0.11, 0.19, 0.18, 0.17 y 0.07. ¿Cuál es la probabilidad de que un fin de semana cualquiera en ese horario de la madrugada haya más de 4 accidentes?

a) 11% *b*) 18% *c*) 36% *d*) 43% *e*) Otra

49. En el problema 48, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 6 accidentes?

a) 19% *b*) 81% *c*) 23% *d*) 0% *e*) Otra

50. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 3 o menos accidentes con los datos del problema 48?

a) 39% *b*) 45% *c*) 26% *d*) 19% *e*) Otra

51. Con los datos del problema 48, determine la probabilidad de que haya de 3 a 5 accidentes.

a) 46% *b*) 18% *c*) 35% *d*) 54% *e*) Otra

52. ¿Cuál es la probabilidad de que sucedan exactamente 4 accidentes en el problema 48?

a) 0% *b*) 17% *c*) 18% *d*) 82% *e*) Otra

53. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran accidentes con los datos del problema 52?

a) 99% *b*) 8% *c*) 13% *d*) 81% *e*) Otra

54. El Instituto Meteorológico informa que existen probabilidades del 43% de que el fin de semana llueva en la ciudad. Carlos considera que tiene 78% de probabilidad de acreditar un examen de matemáticas básicas el siguiente lunes. ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos acredite el examen habiendo llovido el fin de semana?

a) 29.61% *b*) 35% *c*) 33.54% *d*) 47.43% *e*) Otra

55. Si en el problema 54 se considera que el 10% de los alumnos que presenten examen el lunes lo reprueben si llovió el fin de semana anterior, ¿cuál es la probabilidad de que Carlos lo repruebe o no haya llovido el fin de semana, es decir, $P(L' \text{ o } A')$?

a) 69% *b*) 23.54% *c*) 7.9% *d*) 79.25% *e*) Otra

56. Si la probabilidad de que una quinceañera cumpla los 45 años de edad es 0.95 y la probabilidad de tener un buen empleo en esos tiempos es 0.78, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla los 45 teniendo un buen empleo?

a) 173% *b*) 74.10% *c*) 17% *d*) 64.83% *e*) Otra

57. Resuelva el problema 56 considerando que de 250 quinceañeras 225 llegan a los 45 años de edad y solamente 175 logran un buen empleo.

a) 63% *b*) 37% *c*) 80% *d*) 75% *e*) Otra

58. En el problema 57, ¿cuál es la probabilidad que tiene una quinceañera de lograr un buen empleo o cumplir los 45 años de edad? Suponga que el 63% cumple los 45 años y tiene buen empleo.

a) 97% *b*) 1.6% *c*) 27% *d*) 160% *e*) Otra

59. Se lanzan dos monedas y un dado juntos, ¿cuál es la probabilidad de que caigan dos caras y un 3?

a) 1/10 *b*) 1/24 *c*) 1/12 *d*) 3/10 *e*) Otra

60. En el problema 59, ¿cuál es la probabilidad de que resulten las monedas con cara diferente y el dado en un número menor que 3?

a) 1/12 *b*) 1/6 *c*) 1/10 *d*) 3/8 *e*) Otra

9.2 Esperanza matemática

Supóngase que la universidad otorga un premio, digamos de $25 mil dólares, a uno de los 20 profesores del departamento de matemáticas, precisamente el que acumule el mayor número de puntos logrados durante el semestre por su buen desempeño académico. Considerando que todos tienen las mismas posibilidades, la probabilidad que tiene cada profesor de ganar el premio es $p(G) = 1/20$, 0.05 o 5%. Al multiplicar este resultado por el valor del premio, se obtendrá lo que se conoce como *esperanza matemática* o *valor esperado*, que en este supuesto caso es:

$$V = 0.05(25{,}000) \quad \text{o} \quad \$1{,}250$$

Definición 9.4

Esperanza matemática es el *precio* de un evento aleatorio, por eso deberá expresarse en unidades monetarias.

Puede decirse que la esperanza matemática es el *precio justo* que debe pagarse al esperar la realización de un suceso aleatorio o sujeto al azar, está dada por la multiplicación de la probabilidad de tal evento incierto $p(E)$ o p y la cantidad de dinero M que se espera recibir si se realiza, es decir

$$V = (p)(M) \qquad \text{o} \qquad V = [\,p(E)](M)$$

Ejemplo 1

¿Cuál es el valor esperado para cada uno de los 118 empleados de una distribuidora de automóviles, que los premia con un automóvil de $168,750?

solución

La probabilidad que cada empleado tiene de sacarse el automóvil es $p(A) = 1/118$; la esperanza matemática es, por lo tanto:

$$V = (1/118)(168{,}750)$$
$$V = (0.008474576)(168{,}750)$$
$$V = 1{,}430.084746 \quad \text{o} \quad \$1{,}430.08 \quad \text{redondeando}$$

Cuando son varios premios o cantidades de dinero $M_1, M_2, \ldots, M_n,$ con sus respectivas responsabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la *esperanza matemática* está dada por la suma de productos:

$$V = p_1(M_1) + p_2(M_2) + \ldots + p_n(M_n)$$

Ejemplo 2

En el ejemplo 1, ¿cuál es la esperanza matemática de cada empleado si además del automóvil, la empresa los premia con 30 televisores de \$6,450 y 50 hornos de microondas de \$1,140 cada uno? Considere que cualquier empleado puede lograr más de un premio.

solución

La probabilidad de ganarse un televisor es 30/118 y un horno es 50/118, entonces la esperanza matemática para el empleado es:

$$V = (1/118)(168{,}750) + (30/118)(6{,}450) + (50/118)\ (1{,}140)$$
$$V = 1{,}430.0847 + 1{,}639.8305 + 483.058$$
$$V = 3{,}552.966 \quad \text{o} \quad \$3{,}552.97$$

Ejemplo 3

El Instituto para la Prevención y el Tratamiento de Adicciones organiza una rifa con un premio principal de medio millón de dólares, dos de 150 mil y cinco de \$25,000 cada uno, ¿cuál es la esperanza matemática, es decir, el precio justo, por cada boleto si se emitieron 100,000?

solución

La probabilidad de obtener el primer premio es:

$$p(A) = 1/100{,}000$$

Para uno de los premios de 150 mil deberá ser 2/99,999 y para los cinco de 25,000, la probabilidad debería ser 5/99,997, ¿por qué?; pero para efectos prácticos, cuando el espacio muestral, el número de resultados posibles es muy grande, las probabilidades se calculan con el mismo denominador, todos con 100,000. Así, el precio justo, en miles de dólares, es:

$$V = (1/100{,}000)500 + (2/100{,}000)150 + (5/100{,}000)25$$
$$V = 0.005 + 0.003 + 0.00125$$
$$V = 0.00925 \quad \text{o} \quad \$9.25$$

Quiere decir que con este precio para cada boleto las utilidades para el Instituto serán nulas, no tendría razón de ser la rifa, pero por cada dólar en que se incremente este precio sus utilidades crecerán, claro.

Ejemplo 4

Un inversionista tiene 45% de probabilidades de ganar \$600,000 y 55% de perder \$175,000 en sus inversiones, ¿cuál es la utilidad esperada?

solución

Puesto que las pérdidas son ganancias negativas, la esperanza matemática, es decir, la utilidad esperada para el inversionista es:

$$V = 0.45(600{,}000) + 0.55(-175{,}000)$$

$$V = 270{,}000 - 96{,}250 \quad \text{o} \quad V = \$173{,}750$$

Ejemplo 5

En un juego de azar con dos dados, un jugador gana \$750 si al tirarlos la suma da 5 puntos o menos y pierde \$150 en cualquier otro resultado, ¿cuál es la esperanza matemática?

solución

Las combinaciones posibles para que las dos caras caigan sumando cinco o menos puntos son 10; éstas son:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

y el total de resultados posibles es 36, porque si el primer dado es 1 el segundo puede ser cualquiera de los 6 y lo mismo sucede si el primero es 2, 3, 4, 5 o 6, entonces la probabilidad de obtener 5 o menos puntos es:

$$p(G) = 10/36 \quad \text{o} \quad 5/18$$

y ésta es la probabilidad que el jugador tiene de ganar, en tanto que la de perder es el complemento, es decir:

$$p(G') = 1 - 5/18 \quad \text{o} \quad p(G') = 13/18$$

Entonces la esperanza matemática es:

$$V = (5/18)750 + (13/18)(-150)$$

$$V = 208.33 - 108.33 \quad \text{o} \quad V = \$100.00$$

Ejemplo 6

¿Cuál es la esperanza matemática para un cliente que por cada \$500 de compra participa en la rifa de una computadora portátil con valor de \$18,350? Considere que se gana con las cuatro últimas cifras del premio mayor de la Lotería Nacional.

solución

La probabilidad de ganar es $p(G) = 1/10{,}000$, ya que se emitieron 10 mil boletos, ¿porqué?, y la de perder es $p(G') = 9{,}999/1000$, entonces el valor esperado es:

$$V = (1/10{,}000)(18{,}350) + (9{,}999/10{,}000)(0)$$
$$V = \$1.835$$

ya que el comprador no pierde, porque los \$500 los gastó en mercancía.

Ejercicios 9.2

1. ¿Qué otro nombre recibe la esperanza matemática?
2. ¿En qué unidades se expresa la esperanza matemática?
3. ¿De qué elementos o valores depende la esperanza matemática?
4. La probabilidad de recibir \$50,000 es 78.3%, ¿cuál es el valor esperado?
5. La probabilidad que Lupita tiene de lograr el primer lugar en el maratón de la ciudad es del 35.6%, ¿cuál es el valor esperado si se ofrece un premio de \$175,000 al ganador?
6. ¿Cuál es la esperanza matemática para la Lupita del problema 5 si la probabilidad que tiene de llegar en la primera posición es de sólo el 5.03%?
7. El señor González recibirá una bonificación de \$25,000 si llega a los 5 años en la compañía donde labora. ¿Cuál es la esperanza matemática si se sabe que de cada 25 empleados 22 lo logran?
8. ¿Cuál es el valor esperado para quien adquiere un boleto para una rifa de \$35,000 si se emitieron 1000?
9. Un padre de familia premia a sus hijos que logran un promedio mínimo de 9.5 al final del semestre con \$15,000, ¿cuál es la esperanza matemática?

Considere que el 70.3% de los estudiantes alcanzan este promedio.

10. ¿Qué probabilidad tiene una persona de lograr un premio de \$75,000 si el valor esperado es de \$33,500?

11. ¿Con cuánto bonificarán a un empleado si el valor esperado con una probabilidad del 47% es de $12,105.50?

12. ¿Qué probabilidades tiene el empleado del problema 11 si el valor esperado fuera de $5,922.50?

13. La universidad premia a sus profesores con un automóvil de $253,000, 20 artículos electrónicos de $5,300 cada uno, 40 de $1,500 y 75 de $450. ¿Cuál es el valor esperado si son 4,200 docentes?

14. En el problema 13, ¿cuál será el valor esperado si hubiese 100 premios de $5,000 cada uno además del automóvil?

15. El Instituto de Investigación Oncológica organiza una rifa de $250,000. ¿Cuál es el valor esperado para quien participa con un boleto si son 1,000 y cada uno tiene un costo de $500?

16. En el problema 15, ¿cuál es el valor esperado para el Instituto?

17. ¿Qué significa que el valor esperado sea negativo?

18. Un inversionista tiene el 42% de probabilidades de ganar $350,000 y 58% de perder $125,000. ¿Cuál es su valor esperado?

19. ¿Cuál es la esperanza matemática para un jugador que gana $200 si al tirar dos dados la suma resulta de 9 puntos o más, y pierde $75 en caso contrario?

20. ¿Cuál es la probabilidad de perder $50 para un participante en juegos de azar si la probabilidad de ganar $175 es 40% y el valor esperado es de $47.50?

21. El valor esperado para una persona que tiene probabilidades de ganar $75,000 es de $28,875. ¿Cuál es la probabilidad de lograrlo?

22. Un par de amigos hacen una apuesta tirando una moneda; el que pierde le dará $20 al que gane. ¿Cuál es el valor esperado para el que gana?

23. La nueva generación de ingenieros civiles está conformada por 20 alumnos, quienes organizan un sorteo rifando $20,000 para sus gastos de graduación, emitiendo mil boletos de $100 cada uno para sus gastos de graduación. Determinar:

a) La esperanza matemática para el comprador de un boleto.

b) El valor esperado para un compañero que se quedó con todos sus boletos. Considere que se los repartieron en partes iguales.

c) El valor esperado para otro que vendió sólo el 60% de sus boletos.

d) Si Sergio, otro compañero, se queda con los mil boletos, ¿cuál será la esperanza matemática?

24. Treinta amigos organizan una rifa con un premio de $40,000, dos de $10,000 y cinco de $5,000 cada uno, ¿cuál es la esperanza matemática para cada uno? ¿Cuánto debe aportar cada uno de los perdedores? ¿Cuál debe ser el precio del boleto? Suponga, claro, que la rifa es entre ellos mismos.

25. Una distribuidora de vinos y licores organiza una rifa, entre sus 20 mejores clientes, con un premio de $20,000, otro de $10,000 y dos de $5,000 cada uno. ¿Cuál es el valor esperado para cada uno de los 20 clientes?

26. El Instituto Cultural organiza un sorteo, emitiendo 10 mil boletos numerados, para rifar automóviles y camionetas, uno de $425,000, dos de $197,500 y 7 de $82,750. ¿Cuál es la esperanza matemática para el comprador de un boleto si cada uno cuesta $50?

27. En el problema 26, ¿cuál es la esperanza matemática para el Instituto?

28. ¿Cómo explica usted que la esperanza matemática resultó negativa en el problema 27? ¿Qué indicaría si fuese positiva?

29. Se tiran tres dardos a una ruleta circular, una tabla de madera que tiene 36 sectores del mismo tamaño en la feria de la ciudad, ¿cuál es el valor esperado para el propietario si ofrece un premio de $20, 2 de $10 y 3 de $5 cada uno, marcados en la ruleta? Considere que el costo para el participante es de $20 por las tres oportunidades.

30. En el problema 29, ¿cuál es el valor esperado para el que participa?

Seleccione la opción correcta, justificándola, en los problemas 31 al 56.

31. ¿Cuál es su respuesta en el problema 29 si el disco tuviera 48 sectores iguales?

a) $16.0325 *b*) $14.0625 *c*) $20.1585 *d*) $9.0825 *e*) Otra

32. Si el precio de cada tiro en el problema fuera de 5 dólares, ¿cuál es la esperanza matemática para el jugador?

a) −$8.6255 *b*) −$12.0457 *c*) −$10.875 *d*) −$9.6875 *e*) Otra

33. ¿Cuál es el valor esperado para cada empleado de la empresa de Tractocamiones si en la próxima posada serán gratificados con un premio de $30,000, tres de $15,000 y cinco de $10,000? Considere que son 30 los que participan y pueden llevarse más de un premio.

a) $4,166.67 *b*) $3,750.00 *c*) $4,233.33 *d*) $5,065.33 *e*) Otra

34. ¿Cuál es el valor esperado en el problema 33 si los 9 premios fueran de $20,000 cada uno?

a) $4,500.00 *b*) $5,250.00 *c*) $3,766.67 *d*) $4,633.33 *e*) Otra

35. ¿Qué conviene más a los empleados de la empresa camionera del problema 33, 10 premios de $20,000 cada uno o dos de $40,000, tres de $30,000, cinco de $15,000 cada uno, pero con un costo por participar de $1,000 para cada empleado? Resuelva empleando esperanza matemática.

a) la primera opción *b*) la segunda *c*) es indiferente *d*) ninguna de las dos *e*) Otra

36. ¿Cuál es el precio justo por cada uno de los 100,000 boletos que emite la Universidad del Norte en su sorteo semestral, con un primer premio consistente en una casa de $5’695,000, un segundo por un departamento de $1’425,000 y un tercer premio por un automóvil de $205,000?

a) $81.75 *b*) $68.50 *c*) $73.25 *d*) $76.98 *e*) Otra

37. ¿Cuál es la esperanza matemática para el señor Álvarez si la empresa donde labora le ofrece $30,000 si logra permanecer 7 años a su servicio? Considere que de 15 empleados, 12 lo han logrado.

a) $18,000 *b*) $24,000 *c*) $15,000 *d*) $6,000 *e*) Otra

38. La contadora Lulú tiene 65% de probabilidades de perder $75,000 y 35% de ganar $275,000 en sus inversiones. ¿Cuál es el valor esperado?

a) $47,500 *b*) $42,250 *c*) $49,500 *d*) $45,750 *e*) Otra

39. Sus amigos apuestan $500 por su equipo favorito, ¿cuál es el valor esperado para cada uno de ellos? Suponga que si empatan, ninguno gana.

a) $425 *b*) $150 *c*) $250 *d*) $500 *e*) Otra

40. ¿Qué probabilidades tiene una persona de ganar un premio de $50,000 si el valor esperado es de $8,750?

a) 43.75% *b*) 22.5% *c*) 4.375% *d*) 17.5% *e*) Otra

41. La esperanza matemática pera el señor Pérez de ganar un premio es de $7,200. ¿De cuánto es el premio si sabe que tiene 0.18% de probabilidades de ganarlo?

a) $12,960 *b*) $40,000 *c*) $65,000 *d*) $48,000 *e*) Otra

42. La Universidad otorga una beca por $250,000 para estudiar un posgrado a los alumnos que terminan su licenciatura con promedio mínimo de 9.75. ¿Cuál es la esperanza matemática si los registros indican que sólo el 2% alcanza la meta?

a) $50,000 *b*) $5,000 *c*) $12,500 *d*) $25,000 *e*) Otra

43. ¿Cuál es el precio justo que debe pagarse por un boleto para participar en el sorteo de un automóvil de $156,000, tres pantallas de plasma de $36,000 y cinco computadoras portátiles de $19,350? Suponga que se emiten 100,000 boletos.

a) $3.6075 *b*) $5.4250 *c*) $10.9650 *d*) $7.7525 *e*) Otra

44. ¿Cuál es la esperanza matemática de lograr el precio de $25,000 en una rifa que organizan 10 amigos participando con $2,500 cada uno?

a) $125 *b*) $0.00 *c*) $250 *d*) –$125 *e*) Otra

45. De 95,105 individuos de 39 años de edad, 88,008 celebran su aniversario número 54. ¿Cuál es la esperanza matemática para una persona de 39 años de cobrar un seguro por $350,000 al cumplir los 54?

a) $323,882.03 *b*) $122,429.05 *c*) $225,350.00 *d*) $175,000.00 *e*) Otra

46. En el problema 45, ¿cuál es el monto del seguro si la esperanza matemática es de $138,806.58?

a) $176,429.65 *b*) $223,295.61 *c*) $150,000 *d*) $348,693.75 *e*) Otra

47. La Secretaría de Gobernación autoriza un sorteo si la esperanza matemática para el comprador de un boleto no es menor de –$100.00. Una institución emite 10,000 boletos para sortear una camioneta de $225,000 y computadoras de $17,750 cada una. ¿Cuántas debe rifar para cumplir con el registro suponiendo que cada boleto tiene un costo de $300

a) 150 *b*) 90 *c*) 100 *d*) 120 *e*) Otra

48. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un premio de $169,650 si el valor esperado es de $17,440.02?

a) 10.28% *b*) 9.63% *c*) 12.48% *d*) 8.23% *e*) Otra

49. La esperanza matemática de obtener un automóvil de $95,000 en un sorteo es de –$231. ¿Cuántos boletos se emitieron si cada uno tiene un costo de $250?

a) 4,000 *b*) 5,000 *c*) 10,000 *d*) 2,500 *e*) Otra

50. ¿Cuál es la utilidad esperada para el contador Campos si la probabilidad de ganar $450,000 en su inversión es del 38% y de perder $95,000 es de 62%?

a) $112,100 *b*) $125,200 *c*) $40,050 *d*) $95,360 *e*) Otra

51. Tres estudiantes tiran al aire una moneda de tal manera que aquel que logre una cara diferente a las otras dos paga la comida para los tres, cuyo costo es de $450. ¿Cuál es el valor esperado para el perdedor?

a) –$300 *b*) –$225 *c*) –$150 *d*) –$450 *e*) Otra

52. Un padre de familia concede en premio un automóvil a uno de sus 4 hijos, el que obtenga el mejor promedio en el semestre. ¿Cuál es la esperanza matemática si el precio del automóvil es de $108,250?

a) $36,083.33 *b*) $54,125.00 *c*) $21,650.00 *d*) $27,062.560 *e*) Otra

53. Obtenga el precio justo para cada boleto de los 1,000 que se emitieron para un sorteo de una camioneta de $328,000 y un automóvil de $123,450.

a) $451.45 *b*) $902.90 *c*) $425.00 *d*) $250.000 *e*) Otra

54. El Instituto de Estudios Superiores del Sur premia con $35,000 al docente que alcanza la mayor puntuación en su desempeño académico del semestre. ¿Cuál es el valor esperado si son 65 profesores?

a) $538.46 *b*) $629.45 *c*) $463.08 *d*) $505.95 *e*) Otra

55. La utilidad esperada para una persona que tiene 29% de probabilidades de ganar $1’100,000 y de perder x dólares es de $212,500.00. ¿Cuál es el valor de x?

a) $150,000 *b*) $120,000 *c*) $138,929.43 *d*) $165,000.00 *e*) Otra

56. ¿Cuál es la esperanza matemática del señor Luna para cobrar un seguro de $750,000 si cumple 55 años de edad? Suponga que tiene 29 años y que de cada 8,000 personas que tienen esa edad, 7,250 llegan a los 55.

a) $605,928.61 *b*) $598,708.33 *c*) $679,687.50 *d*) $563,429.45 *e*) Otra

9.3 Valor presente de un pago contingente

Una de las aplicaciones de la esperanza matemática, la que aquí nos interesa, sirve para calcular el valor presente de una cantidad de dinero, o monto M, que después de cierto tiempo es probable se reciba. El cálculo de la prima de un seguro de vida es un claro ejemplo de esta situación.

Teorema 9.1

Si p es la probabilidad de recibir o pagar una cantidad de dinero M, después de n años, entonces su valor actual es:

$$C = p(M)(1 + i)^{-n}$$

donde i es la tasa de *interés técnico* anual

Observe usted que esta ecuación es una adecuación de la fórmula del interés compuesto

$$M = C(1 + i/p)^{np} \quad \text{o} \quad C = M(1 + i/p)^{-np}$$

donde la frecuencia de conversión es $p = 1$, y el monto M que algunos llaman **dotal puro** es afectado por un factor p, que es la probabilidad de recibir, u otorgar, el monto M en un futuro.

La tasa de interés i es determinada por las aseguradoras, en el caso de los seguros de vida, y es determinante en el valor actual del pago contingente, M, porque, como es evidente, mientras menor sea esta tasa, mayor será dicho valor actual y más alta será la prima del seguro.

Ejemplo 1

La universidad premia con $60,000 a cada profesor que cumple 15 años a su servicio, ¿cuál es el valor presente al ser contratado si se estima que el dinero reditúa con el 8.4% efectivo y sólo el 65% de los docentes celebran ese tiempo en la institución?

solución

Puesto que $M = 60,000$ es el monto, $p = 0.65$ es la probabilidad de que un profesor se mantenga en la institución, $n = 15$ es el plazo en años e $i = 0.084$ es la tasa de interés, el valor actual es:

$$C = 0.65(60,000)(1.084)^{-15} \qquad C = p(M)(1 + i)^{-n}$$

$$C = 39,000(0.298236482)$$

$$C = 11,631.22278 \quad \text{o} \quad \$11,631.22\text{, redondeando}$$

Ejemplo 2

El padre de un estudiante le ofrece un incentivo adicional de \$85,000 si logra terminar su carrera profesional en 8 semestres, ¿cuál es el valor presente al iniciar los estudios universitarios si las estadísticas revelan que sólo el 73% de los estudiantes que comienzan, terminarán una carrera y los intereses se consideran del 13.3% efectivo?

solución

Los valores a reemplazar en la ecuación del teorema 9.1 son:

$i = 0.133$, la tasa de interés efectivo.

$p = 0.73$, l probabilidad de terminar la carrera.

$M = 85{,}000$, el monto, es decir el premio al final de los estudios.

$n = 4$, el plazo en años, equivalente a 8 semestres.

El valor presente es entonces:

$$C = 0.73(85{,}000)(1.133)^{-4}$$
$$C = 62{,}050(0.606848609)$$
$$C = 37{,}654.95616 \quad \text{o} \quad \$37{,}654.96$$

Como siempre, puede cuestionarse cualquiera de los valores o las literales que componen una fórmula, dados los restantes.

Ejemplo 3

¿Qué porcentaje de estudiantes logra concluir una carrera profesional si el valor presente de los \$150,000 con los que el Instituto de Promoción y Desarrollo premia al mejor estudiante para continuar sus estudios de posgrado es de \$61,361.00? Considere un tipo de interés técnico anual del 8.5% y que la carrera dura 9 semestres.

solución

Ahora la incógnita es p, la probabilidad, que se despeja de la ecuación siguiente, la que resultó de sustituir los datos en el teorema 9.1.

$$61{,}361 = p(150{,}000)(1 + 0.085)^{-4.5}$$
$$61{,}361 = p(150{,}000)(0.692733481)$$

de donde

$$p = 61{,}361/103{,}910.02221$$
$$p = 0.590520517 \quad \text{o} \quad 59.052\% \text{ aproximadamente}$$

Ejemplo 4

¿Cuál es el valor presente de los $125,000 que una compañía de la industria de la computación, otorga a sus empleados que sobreviven y se mantienen fieles hasta los 50 años de edad, si se sabe que sólo el 45% lo logra? Considere el caso de un empleado que tiene 32 años de edad y un tipo de interés técnico del 10.2% anual.

solución

El plazo es la diferencia 50 – 32 = 18 años y el valor presente es

$$C = 0.45(125{,}000)(1.102)^{-18}$$
$$C = 56{,}250(0.174072954)$$
$$C = 9{,}791.603651 \quad \text{o} \quad \$9{,}791.60$$

Es importante señalar que, en el ámbito de los seguros de vida, en la fórmula del teorema 9.1

$$C = p(M)(1 + i)^{-n} \quad \text{o} \quad C = M[p(1 + i)^{-n}]$$

Al factor que está entre los paréntesis, le llaman *factor de actualización demográfico-financiero,* que es menor que el llamado *factor de actualización financiera pura*, $(1 + i)^{-n}$, porque p, la probabilidad, es siempre menor que la unidad.

Ejemplo 5

¿Cuál es el factor de actualización demográfico-financiero para una tasa de interés técnico del 6.5% a 13 años de plazo y una probabilidad de 62.7% de lograr un monto?

solución

Este factor es:

$$FADF = 0.627(1 + 0.065)^{-13} \qquad FADF = p(1 + i)^{-n}$$
$$= 0.627(0.441016765)$$

o $$FADF = 0.276517512$$

Ejemplo 6

El valor presente de un monto M de $450,000 es C = 12,981.23, ¿cuál es la tasa de interés técnico anual si el plazo es de 45 años y la probabilidad de lograr el monto dado es del 69.3%? ¿Cuál es el factor de actualización demográfico-financiero? ¿Cuál es el de actualización financiera pura?

solución

a) Si $C = M[p(1 + i)^{-n}]$, entonces al sustituir los valores que se dan queda:

$$12{,}981.23 = 450{,}000(0.693)(1 + i)^{-45}$$

de donde

$$(1 + i)^{-45} = 12{,}981.23/(450{,}000)(0.693)$$
$$(1 + i)^{-45} = 0.041626519$$
$$(1 + i)^{45} = 24.02314727 \text{ ¿Por qué?}$$
$$i = \sqrt[45]{24.02314727} - 1$$
$$i = 0.073200001 \quad \text{o} \quad 7.32\%$$

b) El factor de actualización demográfico financiera es

$$FADF = 12{,}981.23/450{,}000 \qquad \text{es igual a } C/M, \text{ ¿Por qué?}$$
$$= 0.028847178$$

Se deja como ejercicio comprobarlo con $p(1 + i)^{-n}$

c) El factor de actualización financiera pura es:

$$(1 + i)^{-n} = (1.0732)^{-45} \quad \text{o} \quad 0.041626652$$

que, como se dijo, es mayor que el primero.

Ejercicios 9.3

1. ¿Cómo se evalúa el valor actual de un pago contingente?

2. ¿De qué factores depende el valor presente de un pago contingente?

3. ¿Cómo se denomina el tipo de interés para un pago contingente?

4. ¿Qué pasa con el valor actual de un pago contingente si aumenta la tasa de interés anual?

5. ¿A cuál de las dos opciones corresponde menor pago contingente considerando que el plazo es de 5 años y el monto es de $15,250?

a) Tasa de interés del 8.2% anual y probabilidad de 21.3%.

b) Probabilidad del 23.5%, y el 10.5% de interés técnico anual.

6. ¿Cuál es el valor del pago contingente en las opciones del problema 5 si su valor actual fuera de $22,000 en los dos casos?

7. El Instituto Superior de Estudios Computacionales otorga un premio de $75,000 al profesor que permanece durante 15 años a su servicio. ¿Cuál es el valor presente si se sabe que de 200 docentes sólo 78 lo logran? Considere un tipo de interés técnico del 10.8% anual.

8. En el problema 7, ¿qué monto se daría al docente si el valor actual es de $9,250?

9. En el problema 7, ¿por cuántos años de servicio en el Instituto un profesor logra el premio si el valor actual es de $3,761.24?

10. ¿De cuánto es el premio que una compañía ofrece a sus empleados que logran permanecer en la empresa hasta los 56 años de edad si el valor presente para uno que tiene 27 años de edad es de $939.22 Considere un 11.4% de interés técnico anual y que el 43% permanecen hasta esa edad teniendo los mismos 27 años.

11. En el problema 10, ¿cuál es el valor presente del incentivo para un empleado que tiene 35 años si se sabe que el 47.3% llega a los 56 en la compañía?

12. Las estadísticas revelan que el 79.3% de los estudiantes de ingeniería que inician una carrera la terminan. ¿De que precio será el automóvil que su familia dará a Rebeca si el valor presente al comenzar los 9 semestres es de $86,275 suponga el 9.8% de interés técnico anual.

13. En el problema 12, ¿de cuánto es el valor actual del premio si se sabe que de 250 estudiantes sólo 210 terminan?

14. En el problema 12, ¿cuál será el porcentaje de estudiantes que terminan la carrera si el valor actual del precio del automóvil es de $75,069?

15. ¿De cuánto es la prima que una persona de 28 años debe pagar por un seguro de $425,000, que cobrará cuando cumpla los 61 años de edad, si los cumple, sabiendo que el 82.21% de los que tienen su edad alcanzan los 61 años? Suponga interés técnico del 6.5% anual.

16. ¿Cuál es el monto del seguro si el valor actual es de $78,713.46 en el problema 15?

17. El testamento del señor Zamora estipula que el 30% de su herencia, estimada en 2.3 millones de dólares, sea para su hija menor, al cumplir los 25 años si está viva. ¿Cuál es el valor actual ahora que la niña tiene 12 años de edad? Supóngase que, de 10 mil personas de esa edad, 9,802 llegan a los 25 años y una tasa de interés técnico del 7.6 anual.

18. ¿De cuánto será la herencia del señor Zamora si el valor actual es de $145,000 en el problema 17?

19. La beneficiaria de un seguro de vida recibirá $750,000 cuando su cónyuge muera, ¿cuál es el valor presente 28 años antes si la probabilidad de fallecer al final de ese lapso es del 13.5%? Considere un tipo de interés técnico del 9.53% anual.

20. ¿Qué efectos produce el factor de actualización demográfico-financiero sobre un monto de dinero M?

21. De qué factores depende el factor de actualización demográfico-financiero?

22. ¿Cuál es el factor de actualización de un monto si el plazo es de 13 años, la tasa de interés del 13% anual y la probabilidad es del 57.3%?

23. ¿Cuál será la probabilidad si el factor de actualización demográfico-financiero es 0.20 para un interés del 5.8% y un plazo de 10 años?

24. El factor de actualización, el plazo y la probabilidad son, respectivamente 0.1502211, 18 años y 69.7%. ¿Cuál es la tasa de interés técnico anual?

25. Resuelva el problema 24 suponiendo que el factor corresponde a un plazo de 27 años y la probabilidad es del 83.8%.

26. ¿Cuál es la tasa de interés técnico anual si el valor presente de un monto de $65,000 con probabilidades para hacerlo efectivo del 91.08%, es $535.44? Considere 48 años de plazo.

27. ¿Cuál es el factor de actualización demográfico-financiero y de actualización pura en el problema 26?

En los problemas del 28 al 42, justificando su elección, seleccione la opción correcta.

28. ¿Cuál es el mayor, el factor de actualización puro o el factor de actualización demográfico-financiero?

a) el primero *b*) el segundo *c*) son iguales *d*) no se puede saber *e*) Otra

29. Obtenga el factor de actualización demográfico-financiero si la probabilidad de lograr un monto dado en un plazo de 20 años, con una tasa del 9.05% técnico anual es 57.3%.

a) 0.1013074 *b*) 0.1829327 *c*) 0.0123475 *d*) 0.2105391 *e*) Otra

30. ¿De cuánto es el premio que la Universidad Autónoma otorga a sus empleados que permanecen 25 años si su valor presente es de $2,258.94 al inicio de ese lapso, con una tasa de interés técnico del 6.8%? Se sabe que sólo el 39% de los profesores logran permanecer ese tiempo en la universidad.

a) $35,000.00 *b*) $30,000.00 *c*) $32,000.00 *d*) $26,000.00 *e*) Otra

31. ¿Cuál es el valor actual si el premio que otorga la Universidad del problema 30 es de $45,000 y la tasa es del 7.5%?

a) $3,126.48 *b*) $3,929.43 *c*) $4,005.62 *d*) $2,877.83 *e*) Otra

32. ¿Cuál es el monto que una aseguradora paga a una persona si está viva a los 55 años de edad si la prima que pagó cuando tenía 29 años fue de $50,485.50? Considere el 7.55% de interés anual y que de 97,682 personas de 29 años, sólo 87,195 cumplen los 55.

a) $375,000 *b*) $270,000 *c*) $410,000 *d*) $425,000 *e*) Otra

33. ¿De cuánto es la prima actual que una persona de 32 años paga por un seguro de 850,000 a los 65 años de edad si es que aún está con vida? Considere que el 77.44% de los que tienen 32 años alcanzan los 65, y que la tasa de interés técnico es del 9.81% anual.

a) $37,629.35 *b*) $28,903.75 *c*) $30,005.57 *d*) $32,549.60 *e*) Otra

34. El valor actual de un pago contingente de $275,000 es $13,880.23. ¿Cuál es la probabilidad de cobrarlo si el plazo es de 23 años y la tasa de interés técnico es del 11.6% anual?

a) 63% *b*) 52% *c*) 49% *d*) 65% *e*) Otra

35. ¿De cuánto es el valor actual de un monto de $140,000 si la tasa de interés es del 8.3% y la probabilidad de lograrlo 15 años después es del 82.45%?

a) $39,693.22 *b*) $31,695.45 *c*) $34,905.34 *d*) $38,296.43 *e*) Otra

36. ¿Cuánto debe pagar una persona de 27 años por un seguro de $275,000 que cobrará, si vive, cuando cumpla los 52 años de edad? Considere que el tipo de interés técnico es del 6.7% anual y que de 150,000 personas de 27 años, 136,517 alcanzan los 52.

a) $65,493.29 *b*) $43,298.65 *c*) $49,467.24 *d*) $53,260.30 *e*) Otra

37. ¿De qué cantidad es el premio que una distribuidora de electrodomésticos ofrece a los empleados que cumplan los 56 años de edad a su renuncia si el valor actual es de $33,998.20 para uno que tiene 29 años de edad? Considere un tipo de interés técnico del 7.7% y que de 5,000 individuos de 29 años, el 85.4% logran alcanzar los 56?

a) $310,000 *b*) $260,000 *c*) $230,000 *d*) $295,000 *e*) Otra

38. ¿Cuál es el valor presente de $1’250,000 pagaderos al cabo de 49 años a una persona que cumple 72 años de edad? Considere que las que tienen 23 años llegan a los 72 con una probabilidad del 61.95% y que la tasa de interés técnico es del 11.25% anual.

a) $4,171.10 *b*) $4,928.43 *c*) $5,079.42 *d*) $3,998.33 *e*) Otra

39. ¿Cuál es el valor del dotal puro si 19 años antes su valor presente es de $31,451.87, suponiendo que la probabilidad de lograrlo es del 86.29% y el tipo de interés técnico es del 13.8% anual?

a) $440,000 *b*) $425,000 *c*) $385,000 *d*) $310,000 *e*) Otra

40. Calcule la probabilidad si con interés del 5.8% anual el valor actual de un dotal puro de $275,000 es de $28,758.20 para un individuo que a los 67 años lo cobrará teniendo ahora 31 años de edad.

a) 80.40% *b*) 72.25% *c*) 79.96% *d*) 79.60% *e*) Otra

41. ¿Cuál es el valor actual de un monto de $75,000 pagadero a una persona 18 años después, si está viva, suponiendo que la probabilidad de lograrlo es de 78.9% y una tasa de interés técnico del 6.75%?

a) $23,925.43 *b*) $27,968.41 *c*) $21,362.42 *d*) $18,260.66 *e*) Otra

42. ¿Cuál es el plazo aproximado si el valor presente de un dotal puro de $205,000 es de $7,248.04? Supóngase que la probabilidad de cobrarlo es del 85.43% y los intereses son del 11.2% anual.

a) 25 años *b*) 28 años *c*) 37 años *d*) 30 años *e*) Otra

9.4 Tablas de mortalidad

En los ejemplos de las secciones que preceden, el valor de la probabilidad *p*, para la esperanza matemática, ha sido un valor, es decir, un dato ciertamente ficticio, pero es evidente que hay formas para considerar este número de manera más científica, con mayor precisión y más cercana a la realidad. Tales fórmulas se enuncian con los registros numéricos que tienen las compañías aseguradoras con respecto al número de pólizas, es decir, con respecto al número de personas que, teniendo una edad x, sobreviven n años, o sea, alcanzan los $x + n$ años de edad y han sido contabilizadas por un tiempo más o menos largo. Se resumen en lo que se conoce como *tabla de mortalidad*, pero antes de definirla es conveniente señalar que sus valores no dejan de ser teóricos, porque se obtuvieron con información que de alguna manera es obsoleta, ya que por ejemplo la edad promedio del ser humano se ha incrementado y sigue haciéndolo por diferentes circunstancias, entre las que se puede mencionar, sólo por referirnos a una, el notable avance de la ciencia médica, porque la cantidad de gente que sobrevive a casi cualquier enfermedad es mucho mayor que antes.

También es cierto que los valores de dicha tabla pueden variar de acuerdo con el volumen y las características de los individuos que se tomaron en cuenta para hacerla y son los organismos de control de cada país los que autorizan o no a las aseguradoras, para su aplicación en el cálculo de primas, por ejemplo.

Definición 9.5

Tabla de mortalidad es el registro estadístico de sobrevivientes de un grupo de personas de x años de edad, es decir, es una serie cronológica que expresa la forma en que se reduce, por fallecimiento, el número de individuos que tienen la misma edad.

¿Cuáles son los valores que contiene una tabla de mortalidad?

En el apéndice C, está la tabla de mortalidad de la experiencia mexicana con registro del periodo comprendido desde 1982 hasta 1989. En ella se han incluido los valores de conmutación D_x y N_x para tasas de interés, llamadas de interés técnico, del 4%, 6.5% y 8%, siendo evidente que puede ampliarse para que incluyan otras tasas, pues todas las columnas, desde la tercera, dependen de los valores de las primeras dos.

En la primera columna está la edad x, que comienza con los 12 años, aunque pudiera iniciar con 15 o 20 años o cualquier otro valor, incluyendo la edad cero, pero en todos los casos terminan en los 99.

La columna segunda contiene el valor l_x, que representa el número de personas que se mantienen o mantuvieron con vida hasta los x años de edad, de las que había en una muestra original de 10 millones, cantidad que también llega a variar pudiendo ser de 100 mil, un millón o cualquier otro valor relativamente grande. Sólo como referencia, y tal vez para recordarlo más fácilmente, se utiliza el símbolo l_x, por la inicial de *life*, *living* o *live*, del idioma inglés.

La tercera columna contiene al número de individuos, de los 10 millones originales, que fallecieron a la edad x, esto es el número de personas de x años cumplidos y no llegan a cumplir los $x + 1$ años. Se denota con d_x, por la inicial de *death* o *dead*, es igual a la diferencia entre dos valores consecutivos de l_x y está dado por $d_x = l_x - l_{x+1}$,* esto es, el número de personas que alcanzaron la edad x menos las que alcanzaron los $x + 1$ años de edad.

---

* Note que l_{x+1} siempre será menor que l_x, aunque por la notación parezca lo contrario.

Ejemplo 1

En la última tabla del apéndice C, se ve que de 10 millones de personas de 12 años, 9’711.424 alcanzan los 32 años de edad y 9’690,642 llegaron con vida a los 33 años; entonces:

$$d_{32} = 9’711{,}424 - 9’690{,}642 \quad \text{o} \quad d_{32} = 20{,}782$$

es el número de los que fallecieron cuando tenían 32 años cumplidos, según los registros de dicha tabla de mortalidad. En la tercera columna y el renglón para $x = 32$, se encuentra este valor.

En la cuarta columna está el valor de p_x, la probabilidad que tiene una persona de x años de edad de alcanzar un año más de vida, es decir, de llegar a la edad $x + 1$. Tal probabilidad está dada por el cociente del número de personas vivas de edad $x + 1$, entre las que alcanzaron los x años de vida, o sea:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Ejemplo 2

Con los valores del ejemplo 1, se concluye que la probabilidad de llegar a los 33 años, teniendo 32, es:

$$p_{32} = 9’690{,}642/9’711{,}424$$
$$p_{32} = 0.997860046 \quad \text{o} \quad 99.786\% \quad \text{aproximadamente}$$

tal como se observa en la cuarta columna.

La probabilidad de que un individuo de x años de edad no cumpla los $x + 1$ se denota con q_x, que son los valores que están en la quinta columna de la tabla de mortalidad. Como esta probabilidad es complementaria a la de sí cumplir los $x + 1$ años, origina la diferencia entre p_x y el 100%, es decir:

$$q_x = 1 - p_x$$

Así, la probabilidad que tiene una persona de 32 años de edad de no alcanzar los 33 es:

$$q_{32} = 1 - 0.99786 \qquad p_x = 0.99786$$
$$q_{32} = 0.00214 \quad \text{o} \quad 0.214\%$$

como también puede verse en la tabla.

Antes de continuar con las columnas de letras mayúsculas, D_x y N_x, que se denominan *valores* o *símbolos de conmutación*, veamos algunas aplicaciones relacionadas con lo que se ha explicado de la tabla de mortalidad, basándonos en la teoría de probabilidades que se estudió en la primera sección de este capítulo.

Probabilidad de que una persona de *x* años, viva *n* años más

Las probabilidades de que se alcancen $x + n$ años, teniendo x años de edad, se denota con ${}_np_x$ y está dada por la multiplicación de las probabilidades p_x, p_{x+1}, ... $p_{x+n,}$ que representan, respectivamente, la probabilidad de alcanzar un año más de vida, teniendo x años, $x + 1$, $x + 2$, y así sucesivamente hasta $x + n$. Entonces:

$${}_np_x = \left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)\left(\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\right)\left(\frac{l_{x+3}}{l_{x+2}}\right)\cdots\left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}\right), \text{ ya que } p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \text{ etcétera.}$$

Para simplificar, nótese que todos los numeradores, desde el primero hasta el penúltimo, se cancelan con los denominadores, desde el segundo, quedando

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Ejemplo 3

¿Qué probabilidades hay de alcanzar los 65 años de edad, teniendo 32?

solución

Vimos que $l_{32} = 9'711{,}424$, mientras que en la tabla de mortalidad se aprecia que:

$$l_{65} = 7'520{,}523$$

Entonces:

$${}_{33}p_{32} = 7'520{,}523/9'711{,}424 \qquad {}_{33}p_{32} = l_{65}/l_{32} \text{ Note que } x + n = 32 + 33 = 65$$

$$= 0.774399614 \quad \text{o} \quad 77.44\%$$

Probabilidad de que teniendo *x* años no se cumplan los *x* + *n*

Esta probabilidad, que se denota con ${}_nq_x$, es complementaria a ${}_np_x$; en consecuencia, está dada por

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x$$

$${}_nq_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

o

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \qquad \text{se efectúa la resta.}$$

Ejemplo 4

¿Cuál es la probabilidad de que un individuo de 65 años no cumpla los 85 años de edad?

solución

En este caso, $x = 65$, $x + n = 85$ y $n = 20$. en la segunda columna de la tabla de mortalidad se ve que:

$$l_{85} = 2'386{,}780 \text{ y como } l_{65} = 7'520{,}523\text{, se tiene que}$$

$$\begin{aligned} {}_{20}q_{65} &= (7'520{,}523 - 2'386{,}780)/7'520{,}523 \\ &= 5'133{,}743/7'520{,}523 \\ &= 0.682631115 \quad \text{o} \quad 68.263\% \text{ redondeando} \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio comprobar este resultado con la ecuación ${}_nq_x = 1 - {}_np_x$.

Probabilidad de que una persona de *x* años fallezca entre los *x* + *m* y los *x* + *m* + *n* años de edad

Ésta es la probabilidad de fallecer en un periodo de n años, contados desde los $x + m$ años de edad, teniendo edad x, y deben cumplirse dos eventos que son independientes y tienen que ocurrir en un orden dado. El primero es que se deben cumplir $x + m$ años, teniendo una edad x, y el segundo es que habiendo llegado a los $x + m$ años se fallezca antes de cumplir los $x + m + n$ años. La probabilidad del primero es:

$${}_mp_x = \frac{l_{x+m}}{l_x}$$

y la del segundo es:

$${}_nq_{x+m} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} \qquad \text{¿Por qué?}$$

Entonces la probabilidad que se busca es ${}_{m/n}q_x$, así se expresa, y está dada por el producto de las dos probabilidades:

$${}_{m/n}q_x = \left(\frac{l_{x+m}}{l_x}\right)\left(\frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}}\right)$$

o

$${}_{m/n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} \quad \text{dado que se cancela } l_{x+m}$$

Ejemplo 5

¿Qué probabilidad tiene de fallecer entre los 65 y los 85 años de edad una persona que ahora tiene 32?

solución

De los 2 últimos ejemplos y la tabla de mortalidad, se tiene que l_{32} = 9’711,424, l_{65} = 7’520,523 y l_{85} = 2’386,780, además de que $x = 32$, $m = 33$, porque $m = 65 - 32$ y $n = 20$, ya que $n = 85 - 65$.

Entonces la probabilidad que se pide, se denota y está dada por:

$$_{33/20}q_{32} = \frac{l_{65} - l_{85}}{l_{32}} \qquad _{m/n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x}$$

$$= (7'520{,}523 - 2'386{,}780)/9'711{,}424$$

$$= 5'133{,}743/9'711{,}424$$

$$= 0.528629272 \quad \text{o} \quad 52.863\%$$

Note usted que si $n = 1$, la ecuación anterior quedará como

$$_{m/1}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} \quad \text{o} \quad _{m/1}q_x = \frac{d_{x+m}}{l_x}$$

considerando que $x + m$ hace las veces de x, en la fórmula $d_x = l_x - l_{x+1}$.

Ejemplo 6

¿Cuál es la probabilidad de que Alberto, de 25 años de edad, fallezca cuando tenga entre 60 y 61 años?

solución

En este ejemplo: $x = 25$, $x + m = 60$ y $m = 35$; además, en la tabla de mortalidad se ve que l_{25} = 9’833,689 y d_{60} = 122,599, entonces la probabilidad pedida es:

$$_{35/1}q_{25} = 122{,}599/9'833{,}689 \qquad _{35/1}q_{25} = d_{60}/l_{25}$$

$$= 0.012467244 \quad \text{o} \quad 1.2467\% \quad \text{aproximadamente}$$

Note usted que esto es diferente a q_{60}, que es la posibilidad de fallecer a los 60 años antes de cumplir los 61, pero teniendo 60 años de edad.

Símbolos o valores de conmutación

En las columnas de la 6 a la 11 de la tabla de mortalidad están los valores de conmutación D_x y N_x, que no obedecen a concepto alguno, sino que son símbolos o relaciones matemáticas que, combinados con factores financieros a determinada tasa o tipo de interés técnico del 4, 6.5 y 8% en esta tabla, facilitan los cálculos y el uso de fórmulas actuariales, particularmente para las anualidades contingentes.

Se ha visto que el capital o valor presente C de un monto M, n años antes con una tasa de interés compuesto anual, está dado por:

$$C = M(1 + i)^{-n} \quad \text{ya que} \quad M = C(1 + i)^n$$

donde el factor $(1 + i)^{-n}$, que algunos llaman **factor de actualización pura**, provoca que el capital sea menor que el monto, dependiendo del plazo n y de la tasa de interés i. Si además esto se multiplica por la probabilidad, ${}_np_x$, de que una persona cumpla $x + n$ años, teniendo x años de edad, entonces el monto se reduce aún más, ya que la probabilidad, se dijo, es menor que la unidad. Quedará entonces un capital dado por:

$$C = M({}_np_x)(1 + i)^{-n}$$

donde al coeficiente de M, denotado por ${}_nE_x$, le llaman, se dijo, **factor de actualización demográfico-financiero**, que en general estará dado por:

$${}_nE_x = ({}_np_x)(1 + i)^{-n}$$

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}(1 + i)^{-n} \quad \text{porque} \quad {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Si el lado derecho se multiplica por y divide entre $(1 + i)^{-x}$, no se altera y queda:

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}(1 + i)^{-n}\frac{(1+i)^{-x}}{(1+i)^{-x}}$$

$$= \frac{l_{x+n}}{l_x}\frac{(1+i)^{-n-x}}{(1+i)^{-x}} \qquad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(A) \quad \text{o} \qquad {}_nE_x = \frac{(l_{x+n})(1+i)^{-(x+n)}}{(l_x)(1+i)^{-x}} \qquad \text{ya que } -a - b = -(a + b)$$

Precisamente el denominador de esta función es lo que se denota como D_x, es decir:

$$D_x = (l_x)(1 + i)^{-x}$$

que podría "definirse" como el número de sobrevivientes a una tasa de interés técnico anual i por un tiempo equivalente a su edad.

Ejemplo 7

Comprobar que el valor de D_{35} es 1'064,406.39, tal como aparece en la columna 8 de la tabla de mortalidad para el tipo de interés del 6.5% anual.

solución

$$D_{35} = 9'645,922(1 + 0.065)^{-35}, \quad \text{ya que} \quad l_{35} = 9'645,922$$

$$= 9'645,922(0.110347812) \quad \text{o} \quad D_{35} = 1'064,406.391$$

Notando que el numerador de la ecuación (A) es equivalente al denominador, pero con $x + n$ en lugar de x, el factor de actualización ${}_nE_x$ puede expresarse más brevemente como:

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Ejemplo 8

¿Cuánto debe depositar, al 6.5% anual, una persona de 35 años de edad para disponer de $350,000 cuando cumpla 58, si vive, claro?

solución

En la multicitada tabla se ve que D_{58} = 218,778.16 y D_{35} = 1'064,406.39, para $i = 0.065$, por eso el factor de actualización es:

$$_{23}E_{35} = 218{,}778.16/1'064{,}406.39 \qquad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$_{23}E_{35} = 0.205540066$$

Entonces lo que se debe depositar, es decir, el valor actual de los $350,000, es:

$$C = 0.205540066(350{,}000) \qquad C = ({}_nE_x)M$$

$$C = 71{,}939.02314 \quad \text{o} \quad \$71{,}939.02$$

Nota:

El valor futuro M se conoce como *dotal puro*, entonces C = 71,939.02 es el valor presente del dotal puro 350,000 en las condiciones dadas.

Solución alterna

Puesto que l_{58} = 8'438,810, l_{35} = 9'645,922 y $n = 23$, se tiene que el factor de actualización es:

$$_{23}E_{35} = (8'438{,}810/9'645{,}922)(1.065)^{-23} \qquad {}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}(1+i)^{-n}$$

$$= 0.87485779(0.234941113)$$

$$= 0.205540063, \text{ que es prácticamente igual al anterior.}$$

Ejemplo 9

¿Cuál es el valor actual del dotal puro $1'750,000 al cumplir los 53 años una persona que ahora tiene 24? Considere un tipo de interés técnico del 4% anual?

solución

En la tabla de mortalidad se observa que el valor de conmutación para $x = 53$ es D_{53} = 315,298.70 y para $x = 24$ es D_{24} = 2'172,633.71, considerando, claro, que $i = 0.04$. El factor de actualización demográfico-financiero es entonces:

$$_{29}E_{24} = 315{,}298.70/2'172{,}633.71 \qquad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{53}}{D_{24}}$$

o $$_{29}E_{24} = 0.145122806$$

y el valor presente de los \$1'750,000, 29 años antes, es:

$$C = 0.145122806(1'750{,}000) \qquad C = ({}_{29}E_{24})M$$
$$C = 253{,}964.9102 \quad \text{o} \quad \$253{,}964.91$$

Ejercicios 9.4

1. ¿Qué datos contiene una tabla de mortalidad?
2. ¿Qué valores contiene la columna para d_x en una tabla de mortalidad?
3. La columna encabezada con $l_{x,}$ ¿qué valores contiene?
4. ¿Qué son los valores o símbolos de conmutación?
5. ¿Cuál es el tipo de interés técnico?
6. ¿Cuál valor es mayor l_{50} o d_{50}? ¿Por qué?
7. ¿Qué representa q_x en una tabla de mortalidad?
8. ¿Qué significa que l_{72} sea igual a 6'109,074 en la tabla de mortalidad?
9. ¿Cómo se obtiene p_{48}?
10. ¿Cómo se definiría el símbolo de conmutación D_{30}? ¿El símbolo N_{80}?
11. Compruebe que para los valores de la tabla de mortalidad del apéndice, el valor de d_{52} es 70,774, como también se aprecia en la misma.
12. Compruebe que q_{45} es igual a 0.00472, como aparece en la tabla de mortalidad.
13. Cheque usted que el valor de D_{55} es 1'008,458.16, como se ve en la tabla, para una tasa de interés del 4% anual.
14. Compruebe que para una tasa del 6.5% de interés el valor de D_{95} es el que está en la tabla de mortalidad, 890.40.
15. Obtenga el valor de conmutación D_{73} para la tasa de interés técnico del 8% y cotéjelo con el de la tabla.
16. Calcule el valor de conmutación D_{88} para un interés del 4% y cotéjelo con el de la tabla de mortalidad del apéndice.
17. Evalúe la probabilidad de llegar a los 45 años de edad, teniendo 44, y compárelo con el de la tabla.

18. En la tabla de mortalidad se aprecia que $q_{50} = 0.0068$. Compruébelo.

19. En la misma tabla se aprecia que $D_{30} = 3'006{,}135.69$ para $i = 0.04$. Compruébelo.

20. ¿Cómo simboliza la probabilidad de que una persona de 27 años cumpla los 68?

21. ¿Qué significa la expresión ${}_{38}p_{20}$?

22. ¿Cómo evalúa ${}_{15}p_{30}$? ¿A qué es igual?

23. ¿Cómo calcula la probabilidad de que una persona de 50 años no celebre los 65 años de edad?

24. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 90 años viva para celebrar los 91?

25. ¿Qué probabilidad tiene un individuo de no cumplir los 56 años de edad, teniendo 55?

26. ¿Qué probabilidad tiene Carlos Enrique de celebrar los 52 años de edad si tiene 35?

27. ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos Enrique, el del problema 26, no cumpla los 60 años de edad?

28. ¿Qué probabilidad tenía el personaje del problema 26 de llegar a la edad actual cuando su edad era de 12 años?

29. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Luis de no cumplir los 73 años si ahora tiene 40?

30. ¿Qué probabilidad se tiene de no cumplir los 65 años de vida, teniendo 42?

31. ¿Cuál es la probabilidad de morir entre los 50 y 62 años de edad de una persona que ahora tiene 20 años?

32. La probabilidad de fallecer entre los 45 y los 63 años de edad de un individuo es de 15.29849%. ¿Cuál es la edad actual?

33. ¿Cuál es la probabilidad de fallecer entre los 48 y los 65 años de edad de una persona que ahora tiene 12?

34. Jorge tiene 29 años de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que fallezca entre los 70 y 78 años de edad? Seleccione la opción correcta en los problemas 35 al 65, y utilice la tabla de mortalidad del apéndice.

35. Obtenga el valor de conmutación D_{63} para $i = 0.065$ y compruébelo en la tabla.

a) 661,172.21 *b*) 236,926.16 *c*) 148,043.61 *d*) 610,336.41 *e*) Otra

36. Encuentre el valor de q_{29} y compruébelo con la tabla del apéndice.

a) 0.185% *b*) 0.273% *c*) 0.410% *d*) 0.927% *e*) Otra

37. Calcule el valor de conmutación D_{90} para el 8% de interés técnico y chéquelo en la tabla.

a) \$4,170.73 *b*) \$2,810.98 *c*) \$1,104.57 *d*) \$9,580.73 *e*) Otra

38. Encuentre el valor de conmutación N_{87} para $i = 0.04$ y compruébelo con la tabla de mortalidad.

a) \$189,055.19 *b*) \$53,993.22 *c*) \$281,751.42 *d*) \$203,409.21 *e*) Otra

39. Calcule p_{36} y compruébelo en la tabla.

a) 99.632% *b*) 99.735% *c*) 99.561% *d*) 99.087% *e*) Otra

40. ¿Cómo simboliza la probabilidad que tiene de llegar a los 61 años de edad una persona que cuenta ahora con 31?

a) ${}_{31}p_{61}$ *b*) ${}_{31}p_{30}$ *c*) ${}_{30}p_{31}$ *d*) ${}_{61}p_{31}$ *e*) Otra

41. ¿Cómo representa la probabilidad de que teniendo *x* años de edad no se cumplan 40 años más?

a) ${}_{40}q_x$ *b*) ${}_{40}p_x$ *c*) ${}_{x}q_{40}$ *d*) ${}_{x+40}q_x$ *e*) Otra

42. ¿Cuál es la probabilidad de cumplir 61 años de edad si se tienen 25?

a) 82.3137% *b*) 80.0932% *c*) 90.1298% *d*) 81.4293% *e*) Otra

43. ¿Qué probabilidad tiene Claudia de cumplir un año más de vida si tiene 37 años?

a) 98.654% *b*) 99.029% *c*) 98.736% *d*) 99.719% *e*) Otra

44. ¿Cuál es la probabilidad de que se cumplan 90 años de edad teniendo 12?

a) 10.0591% *b*) 11.9351% *c*) 7.0635% *d*) 11.2546% *e*) Otra

45. ¿Qué probabilidad existe de que Raúl, teniendo 21 años de edad, no cumpla los 48?

a) 7.1189% *b*) 7.6385% *c*) 9.3891% *d*) 9.9342% *e*) Otra

46. Calcule la probabilidad de celebrar el aniversario número 58, teniendo 15 años de edad.

a) 87.9312% *b*) 84.6774% *c*) 81.9035% *d*) 90.0453% *e*) Otra

47. ¿Cuál es la probabilidad de no cumplir los 55 años de edad teniendo 18?

a) 12.187% *b*) 14.029% *c*) 15.253% *d*) 12.906% *e*) Otra

48. ¿Cuál es la probabilidad de que no cumpla los 60 años un individuo de 41 años de edad?

a) 11.9385% *b*) 14.0927% *c*) 15.0583% *d*) 13.3077% *e*) Otra

49. ¿Cuántos años tiene Sandra si la probabilidad de que fallezca sin cumplir un años más de vida es del 1%?

a) 51 años *b*) 62 años *c*) 55 años *d*) 46 años *e*) Otra

50. ¿Cuál es la edad de Enrique si la probabilidad de que muera en los próximos 25 años es de 33.8634156%?

a) 50 años *b*) 45 años *c*) 47 años *d*) 49 años *e*) Otra

51. ¿Cómo representa la probabilidad de que una persona de 19 años fallezca entre los 65 y los 78 años de edad?

a) ${}_{13/46}q_{19}$ *b*) ${}_{46/13}q_{19}$ *c*) ${}_{78/65}q_{19}$ *d*) ${}_{78}q_{19}$ *e*) Otra

52. ¿Qué probabilidades tiene Hortensia, de 48 años de edad, de celebrar su aniversario número 49?

a) 99.455% *b*) 99.369% *c*) 99.414% *d*) 99.628% *e*) Otra

53. ¿Cuál es la probabilidad de que Hortensia, la del problema 52, no fallezca entre los 65 y los 85 años de edad?

a) 25.2512% *b*) 23.4236% *c*) 21.6362% *d*) 22.4908% *e*) Otra

54. ¿Cómo se denota el factor de actualización demográfico-financiero?

a) ${}_nE_x$ *b*) D_x *c*) ${}_nq_x$ *d*) $({}_nE_x)M$ *e*) Otra

55. El factor de actualización demográfico-financiero se calcula mediante:

a) D_{x+n}/D_x *b*) N_{x+1}/N_x *c*) $l_x(1+i)^{-n}$ *d*) l_{x+1}/l_x *e*) Otra

56. ¿Cuál es el factor de actualización demográfica pura?

a) ${}_nE_x$ *b*) N_x/D_x *c*) $(1+i)^{-n}$ *d*) $l_x(1+i)^{-n}$ *e*) Otra

57. Numéricamente, ¿cuál es mayor, el factor de actualización financiera pura o el de actualización demográfico-financiero?

a) el segundo *b*) el primero *c*) son iguales *d*) no se sabe *e*) Otra

58. Obtenga el factor de actualización demográfico-financiero si una persona de 25 años de edad dispondrá de un dotal puro cuando cumpla los 56, si los cumple, considerando 6.9% de interés técnico anual.

a) 0.125312835 *b*) 0.110943162 *c*) 0.145138217 *d*) 0.183214592 *e*) Otra

59. ¿Cuál es el factor de actualización financiera pura en el problema 58?

a) 0.13297128 *b*) 0.12638371 *c*) 0.11681938 *d*) 0.1108963% *e*) Otra

60. ¿Cuánto deberá pagar ahora una persona de 27 años de edad para disponer de $325,000 cuando cumpla los 48 años, si los cumple? Considere el 8% de interés técnico anual.

a) $85,429.32 *b*) $60,509.49 *c*) $70,929.33 *d*) $68,923.37 *e*) Otra

61. ¿De cuánto es el dotal puro si la prima actual es de $304,647.90? Considere que se cobrará cuando una persona tenga 49 años de edad, teniendo ahora 22, y la tasa de interés técnico es del 4% anual.

a) $875,000 *b*) $950,000 *c*) $1’325,000 *d*) $760,000 *e*) Otra

62. ¿Cuánto debe depositar ahora, con intereses del 6.5% anual, el arquitecto Sánchez, de 30 años de edad, para disponer de $750,000 cuando cumpla los 53, si los cumple?

a) $116,294.06 *b*) $243,298.31 *c*) $178,923.45 *d*) $160,421.63 *e*) Otra

63. ¿Cuál es el valor presente del dotal puro, $925,000, al cumplir los 60 años de edad un individuo que ahora tiene 23, considerando intereses del 8% anual?

a) $44,685.24 *b*) $123,923.32 *c*) $75,921.08 *d*) $215,721.19 *e*) Otra

64. El valor actual de 1.5 millones de dólares es de $513,613.91, con intereses del 4%, para una persona que lo hará efectivo cuando cumpla los 52. ¿Cuántos años tiene?

a) 37 años *b*) 29 años *c*) 23 años *d*) 27 años *e*) Otra

65. ¿A qué edad cobrará $660,000, si vive, una persona que ahora tiene 31 años de edad, deposita $59,943.19 y le bonifican un tipo de interés técnico del 6.5% anual?

a) 53 años *b*) 60 años *c*) 68 años *d*) 65 años *e*) Otra

9.5 Rentas vitalicias

En el capítulo 5 se vio que *anualidad* es una serie de pagos o rentas iguales a intervalos de tiempo iguales, con interés compuesto. También se dijo que la anualidad puede ser anticipada cuando los pagos o las rentas se realizan al inicio de cada periodo o vencidas cuando las rentas están al final de cada periodo. Se insistió, además, en que la anualidad es cierta si se conocen las fechas de inicio y terminación del plazo, y es contingente, si se desconoce por lo menos una de las dos fechas; éstas son las que abordaremos ahora.

El planteamiento consiste en encontrar el valor presente de cada dotal puro, o sea, de cada renta en la fecha inicial del plazo, es decir, cuando se tiene la edad x, utilizando el factor de actualización demográfico-financiero con diferentes plazos, esto hasta que el interesado se mantenga con vida, por eso se les llama *rentas vitalicias*.

Al no conocer el año del fallecimiento, para los cálculos se considera en teoría que se estará con vida hasta la edad extrema que aparece en la tabla de mortalidad, es decir, hasta los 99 años.

Si se supone que cada renta es de un dólar, $R = 1$, el valor presente de la primera será simplemente:

$$C_1 = {}_1E_x$$

porque el plazo es de un año y la anualidad es vencida u ordinaria.

Como se aprecia en la figura 9.1, el plazo para el segundo dotal es de 2 años y su valor actual será:

$$C_2 = {}_2E_x$$

Para el tercero será de tres años, por eso $C_3 = {}_3E_x$; continuando de esta manera, se llegará hasta el último, que se adelanta $99 - x$ periodos anuales, por eso será:

$$C_n = {}_nE_x \quad \text{o} \quad C_n = {}_{99-x}E_x$$

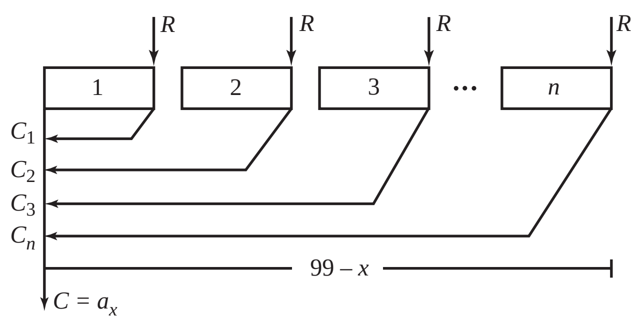


FIGURA 9.1

Note que la última renta se adelanta $99 - x$ años.

La suma de todos es igual al valor presente de la anualidad, que se ha expresado como $C = C_1 + C_2 + \ldots C_n$, aclarando que en notación actuarial se expresa como a_x. Por lo tanto:

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots + {}_{99-x}E_x \quad \text{porque } C_1 = {}_1E_x \quad \text{etcétera}$$

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots + \frac{D_{99}}{D_x}, \quad \text{ya que } {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Ecuación(B) $$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{99}}{D_x}, \; D_x \text{ es el común denominador}$$

Note que:

$$_{99-x}E_x = \frac{D_{x-(99-x)}}{D_x} \quad \text{o} \quad {}_{99-x}E_x = \frac{D_{99}}{D_x}$$

ya que se elimina x y además:

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad \text{y} \quad n = 99 - x$$

Si el último valor de la tabla de mortalidad fuera w, $x = w$, entonces el último sumando sería:

$$_{w-x}E_x = \frac{D_{x+(w-x)}}{D_x} = \frac{D_w}{D_x}$$

El numerador de la ecuación (B) es el otro símbolo de conmutación, que en este caso de denota como N_{x+1}, porque el primer sumando es D_{x+1}, pero cuando esa suma comience con D_x se expresará como N_x, valor que aparece en la séptima columna de la tabla para un tipo de interés técnico del 4%. Consecuentemente, el valor actual de la anualidad con rentas vitalicias de un dólar será, en este caso:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

y si la renta no fuera de un dólar, este valor se multiplica simplemente por el valor de la renta, R.

Es oportuno decir que cuando la primera renta se realiza a la edad x, el primer término en el numerador de la ecuación (B) es D_x y el valor presente se denota como $\ddot{a}_x$, esto corresponde a una anualidad anticipada.

Ejemplo 1

Compruebe que el valor de $2,052.11 para N_{92}, para una tasa del 8% de interés técnico anual, es el que está en la columna 11 de la tabla de mortalidad, la del apéndice C.

solución

Como se dijo, en la ecuación (B) del desarrollo anterior, la suma de todos los valores de conmutación desde D_x hasta D_{99} es igual al segundo símbolo de conmutación N_x, es decir, que en este ejemplo:

$$N_{92} = D_{92} + D_{93} + \cdots + D_{99}$$

y los 8 valores de D se obtienen de la tabla de mortalidad, los que están en la décima columna para $i = 0.08$. Entonces el valor de conmutación que se pide es:

$$N_{92} = 631.92 + 464.82 + 334.85 + 235.80 + 161.95 + 108.29 + 70.29 + 44.18$$

o

$$N_{92} = 2{,}052.11$$

tal como se comprueba en la siguiente columna de la misma tabla.

Note usted que para comprobar que, por ejemplo N_{16} es igual a 37’911,407.08, como aparece en la tabla, deberían sumarse 84 valores de conmutación, desde D_{16} hasta D_{99}, lo cual es sumamente tedioso y, como en todos los valores de la tabla, sería necesario el uso de algún programa de computadora, Excel, por ejemplo.

Ejemplo 2

¿Qué cantidad única pagaría hoy una persona de 30 años de edad en lugar de $30,000 al final de cada año mientras viva? Considere un 4% de interés técnico anual.

solución

En la tabla de mortalidad se observa que los valores de conmutación que se necesitan para $i = 0.04$ y $x = 30$ son:

$$D_{30} = 3'006{,}135.69 \quad \text{y} \quad N_{31} = 59'145{,}002.34$$

entonces el capital único que sustituye a la renta de un dólar al final de cada año es:

$$a_{30} = 59'145{,}002.34/3'006{,}135.69 \qquad a_x = N_{x+1}/D_x$$
$$a_{30} = 19.67476137$$

y para los $30,000 anuales es:

$$19.67476137(30{,}000) = \$590{,}242.84$$

Ejemplo 3

¿De cuánto podrá disponer al final de cada año, mientras viva, el arquitecto Guzmán si ahora hace un depósito único de 350 mil dólares en un fondo que bonifica un tipo de interés técnico del 6.5% anual? Considere que él tiene 33 años de edad.

solución

En la tabla se ve que los valores de conmutación para $x = 33$ e $i = 0.065$ son:

$$N_{34} = 16'484{,}691.39 \quad \text{y} \quad D_{33} = 1'212{,}873.46$$

entonces el capital para un dólar de renta es:

$$a_{33} = 16'484{,}691.39/1'212{,}873.46 \qquad a_x = N_{x+1}/D_x$$
$$a_{33} = 13.59143549$$

y para disponer de R dólares anuales es de 350,000, por eso:

$$350{,}000 = 13.59143549\ (R)$$

de donde

$$R = 350{,}000/13.59143549$$
$$R = 25{,}751.51096 \quad \text{o} \quad \$25{,}751.51 \quad \text{redondeando}$$

Ejemplo 4

¿A qué edad recuperará su inversión el arquitecto del ejemplo 3?

solución

Aplicando actualización financiera pura se obtiene n, el número de años en los que se recupera el capital nominal, lo cual se logra reemplazando los valores que se tienen en la fórmula para el capital de una anualidad vencida.

$$350{,}000 = 25{,}751.51\frac{1-(1.065)^{-n}}{0.065} \qquad C = R\frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i/p}$$

de donde

$$350{,}000(0.065)/25{,}751.51 - 1 = -(1.065)^{-n}$$
$$(1.065)^{-n} = 0.11655666$$

Como siempre que la incógnita está en el exponente, se utilizan logaritmos para despejarla:

$$ln(1.065^{-n}) = ln(0.11655666)$$
$$(-n)ln(1.065) = ln(0.11655666) \qquad \text{ya que } log_a(M^n) = (n)log_a(M)$$
$$-n = ln(0.11655666)/ln(1.065)$$
$$-n = -34.13076024 \quad \text{o} \quad n = 34 \quad \text{redondeando}$$

Significa que el arquitecto recuperará su inversión luego de estar recibiendo los $25,751.51 anuales durante 34 años, es decir, cuando celebre su 67º aniversario.

Ejemplo 5

Una persona de 35 años solicita un crédito a una institución financiera, ofreciendo amortizarlo con abonos anuales de $45,000 durante los años en que se mantenga con vida, ¿cuánto es lo más que le prestarán si se considera un tipo de interés técnico del 8% anual?

solución

El máximo capital que pueden prestarle es el valor de la anualidad vitalicia vencida con $R = 45{,}000$, la renta anual, $i = 0.08$, la tasa de interés técnico y un factor de actualización demográfico-financiero $a_{35} = 11.35593543$, que se calcula con los valores de conmutación para $x = 35$:

$$N_{36} = 7'408{,}584.11 \quad \text{y} \quad D_{35} = 652{,}397.52$$

de las columnas 10 y 11 de la tabla de mortalidad. Por lo tanto:

$$a_{35} = 7'408{,}584.11/652{,}397.52 \qquad a_x = N_{x+1}/D_x$$
$$a_{35} = 11.35593543$$

Entonces el valor actual de las rentas anuales de $45,000 es el siguiente, y por eso lo más que le pueden prestar al señor de 35 años es:

$$C = 11.35593543(45{,}000)$$
$$C = 511{,}017.0944 \quad \text{o} \quad \$511{,}017.09$$

Ejemplo 6

¿De cuánto es una prima, es decir, un pago único que una compañía debe otorgar a su empleado el día de su jubilación si su plan de pensiones prevé pagos anuales de $65,000 mientras viva? Considere que se jubila a los 55 años de edad y la tasa de interés técnico es del 6.5% anual.

solución

Los valores de conmutación para la tasa del 6.5% anual y $x = 55$, como se ve en la tabla correspondiente, son:

$$D_{55} = 273{,}062.62 \quad \text{y} \quad N_{56} = 2'916{,}757.97$$

El factor de actualización, $a_{55} = N_{56}/D_{55}$, es:

$$a_{55} = 2'916{,}757.97/273{,}062.62 \quad \text{o} \quad a_{55} = 10.681645$$

en tanto que el capital o valor actual de las rentas vitalicias es:

$$C = 10.681645(65{,}000) \qquad C = (a_x)R$$
$$C = 694{,}306.925 \quad \text{o} \quad \$694{,}306.92$$

Ejemplo 7

¿Cuánto debe depositar una compañía cada bimestre, en un fondo que bonifica intereses del 9.3% anual capitalizable por bimestre durante 9 años, para disponer del capital necesario y pensionar a uno de sus empleados con $50,000 anuales mientras viva? Suponga que se jubila a los 48 años de edad, el interés técnico es del 8% anual y el primer depósito bimestral se realiza 13 años antes de su retiro.

solución

El factor de actualización demográfico-financiero, puesto que $D_{48} = 228{,}465.16$ y $N_{49} = 2'348{,}127.47$ para $i = 0.08$ es:

$$a_{48} = 2'348{,}127.47/228{,}465.16 \qquad a_x = N_{x+1}/D_x$$

o

$$a_{48} = 10.2778361$$

Entonces el capital necesario para la jubilación del empleado es:

$$C_1 = 10.2778361(50{,}000) \qquad C = a_x R$$
$$C_1 = 513{,}891.805 \quad \text{o} \quad \$513{,}891.80$$

Este capital debe de ser igual al monto acumulado de las 54 rentas bimestrales de una anualidad diferida; además, como se aprecia en la figura 9.2, debe anticiparse cuatro años para obtener el monto M.

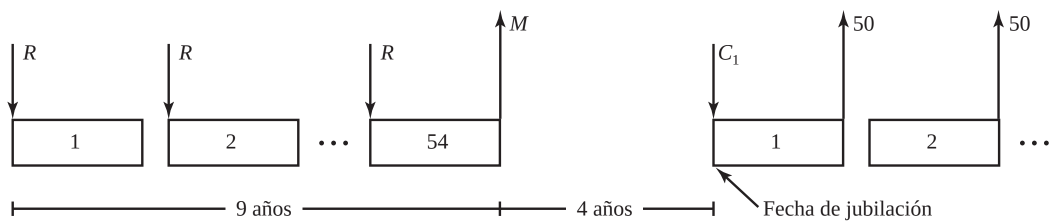


FIGURA 9.2

El valor presente de C, es decir, el monto M de la anualidad anticipada 24 bimestres antes es:

$$C = 513{,}891.80(1 + 0.093/6)^{-24} \qquad C = M(1 + i/p)^{-np}$$
$$C = 513{,}891.80(0.691324159)$$
$$C = 355{,}265.8167$$

Finalmente, para hallar R, el depósito bimestral, en la fórmula para el monto de una anualidad anticipada, teorema 5.1 se reemplazan

M por 355,265.8167, el monto acumulado.
i por 0.093, la tasa de interés nominal bimestral.
n por 9, los años del plazo.
p por 6, la frecuencia de conversión y de pagos por año.

R, es la incógnita.

$$355{,}265.8167 = R\,(1 + 0.093/6)\,\frac{(1.0155)^{54} - 1}{0.0155} \qquad M = R(1 + i/p)\,\frac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}$$

$$355{,}265.8167 = R\,(1.0155)(83.52568561)$$

de donde

$$R = 355{,}265.8167/84.82033374 \quad \text{o} \quad R = \$4{,}188.45$$

Rentas vitalicias anticipadas

En la ecuación (B) de la página 513 se estableció que el valor presente de una anualidad vitalicia con rentas vencidas de $1.00 está dado por:

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{99}}{D_x}$$

pero si la primera renta se realiza cuando se tienen x años de edad, entonces la anualidad es anticipada y el primer término en el numerador será D_x, en lugar de D_{x+1}, y su valor presente, que se denota, se dijo, como $\ddot{a}_x$, será:

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{99}}{D_x} \quad \text{o} \quad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Esta fracción puede descomponerse en:

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{99}}{D_x} \text{ y por eso}$$

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \qquad a/a = 1$$

Esto significa que el valor presente de la anualidad anticipada, vitalicia, puede también expresarse y obtenerse con:

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

Ejemplo 8

¿Cuánto recibe cada año un empleado desde el día en que se jubiló, a los 42 años de edad, considerando que la compañía destinó $365,000 con ése propósito y la tasa de interés técnico anual es del 6.5%?

solución

En la tabla de mortalidad se ve que, para una tasa del 6.5% los valores de conmutación correspondientes a $x = 42$, son:

$$D_{42} = 670{,}636.12 \quad \text{y} \quad N_{42} = 9'178{,}094.97$$

Entonces, el factor de actualización es:

$$\ddot{a}_{42} = 9'178{,}094.97/670{,}636.12 \qquad \ddot{a}_x = N_x/D_x$$

$$\ddot{a}_{42} = 13.6856556$$

Puesto que el valor presente de la anualidad anticipada es $C = (\ddot{a}_x)R$, al sustituir queda la ecuación siguiente, de donde se despeja la incógnita R dividiéndola entre su coeficiente.

$$365{,}000 = 13.6856556(R)$$

$$R = 365{,}000/13.6856556 \quad \text{o} \quad R = \$26{,}670.26$$

Anualidades vitalicias diferidas

Se dijo que una anualidad es *diferida* si la primera renta se efectúa en un periodo posterior al primero. Si tal renta se realiza digamos k años después de que se tuvo la edad x, entonces en la mencionada ecuación (B) el primer término de la suma en el numerador será D_{x+k} en lugar de $D_{x+1.}$ ¿Por qué? El último seguirá siendo D_{99} y el factor de actualización demográfico-financiero para la anualidad vitalicia estará dado por el cociente de los valores de conmutación N_{x+k} y D_x, lo cual se denota como:

$$_{k}a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

Ejemplo 9

Suponiendo que un empleado tiene derecho a recibir $485,000 el día de su jubilación, a los 45 años de edad, pero acuerda que le den el 30% ese mismo día y el resto en anualidades durante el tiempo en que esté con vida, recibiendo la primera cinco años después de su retiro laboral, ¿cuánto le darán cada año considerando que la tasa de interés técnico es del 4% anual?

solución

Los valores a sustituir son $x = 45$, la edad en la que el empleado se retira, $k = 5$, los años que hay entre su retiro y la primera renta, $i = 0.04$, la tasa de interés técnico anual, $N_{50} = 20'597{,}188.28$ y $D_{45} = 1'596{,}965.49$, los valores de conmutación, que se leen en las columnas 6 y 7 de la tabla de mortalidad.

El factor de actualización es entonces:

$$_{51}a_{48} = 20'597{,}188.28/1'596{,}965.49 \qquad {}_{51}a_{48} = N_{50}/D_{45}$$

$$_{51}a_{48} = 12.89770406$$

El capital o valor presente de la anualidad al día de la jubilación es el 70% de los $485,000; esto es:

$$C = 0.70(485{,}000) \quad \text{o} \quad C = 339{,}500$$

y la renta vitalicia es R, que se despeja de la ecuación:

$$339{,}500 = 12.89770406(R)$$

de donde

$$R = 339{,}500/12.89770406 \quad \text{o} \quad R = 26{,}322.51$$

Ejercicios 9.5

1. ¿Cuáles son las anualidades contingentes?
2. ¿Cómo se expresa el valor actual de las anualidades con rentas vitalicias de $1.00?
3. ¿Cómo se obtiene el valor actual de rentas vitalicias cuando la primera se realiza al final del primer año, es decir, un año después de la edad x?
4. ¿Cuál es la característica de las anualidades contingentes anticipadas?
5. ¿Cómo se obtiene el valor actual de las anualidades de la pregunta 4?
6. ¿Qué características tienen las anualidades contingentes diferidas?
7. ¿Cuál es el símbolo para el capital o valor actual de una anualidad contingente anticipada y $1.00 de renta?
8. En la tabla de mortalidad está el valor 53,993.22 para N_{85}, con una tasa del 6.5% anual. Compruébelo.
9. Considerando un tipo de interés del 4% anual, determine qué cantidad de dinero debe pagar ahora una persona de 33 años de edad, en sustitución de $45,000 al final de cada año, mientras viva.
10. El contador González deposita hoy $350,000, con una tasa de interés del 6.5% anual, ¿qué cantidad puede retirar al finalizar cada año mientras esté con vida? Suponga que el contador acaba de celebrar su aniversario número 29.
11. ¿A qué edad recuperará su inversión el contador del problema 10?
12. ¿Cuánto debe depositar ahora el contador del problema 10 si fuesen rentas vitalicias anticipadas?
13. ¿Cuánto es lo máximo que prestarían a una persona de 30 años de edad si sus recursos financieros le ajustan para abonar $50,000 al final de cada año mientras se mantenga con vida? Suponga el 4% de interés técnico anual.
14. Resuelva el problema 13 si se tienen 35 años de edad y pueden abonarse hasta $45,000 anuales.
15. ¿Cuál es su respuesta en el problema 13 si la tasa fuese del 8% de interés anual?
16. Un profesor solicita un préstamo de $300,000 para pagarlo con $37,500 al final de cada año mientras viva, con cargos o intereses del 8% anual. ¿Le prestarán ese capital si tiene 26 años de edad?
17. Resuelva el problema 16 considerando que la edad del docente es de 37 años.
18. En el problema 16, bajo este criterio, ¿cuánto es lo más que pueden prestarle al profesor?

19. ¿De qué cantidad es la prima, es decir, el pago único que una empresa transportadora debe dar a su empleado si se retira a los 52 años de edad y su plan de pensiones prevé pagos de \$60,000 al final de cada año mientras viva? La tasa de interés técnico es del 6.5% anual.

20. Si en el problema 19 el empleado se jubila a los 50 años de edad, ¿cuál es su respuesta?

21. Resuelva el problema 19 considerando el 8% de interés técnico anual.

22. ¿Cuánto deposita cada mes una empresa en una cuenta que bonifica intereses del 8.7% anual capitalizable por mes, para que cuando uno de sus empleados se jubile a los 60 años de edad, obtenga \$150,000 y después disponga de \$48,000 al final de cada año mientras se mantenga con vida? Considere que la primera renta mensual anticipada se realiza cuando el empleado tiene 35 años de edad y suponga que la tasa de interés técnico es del 6.5% anual.

23. Resuelva el problema 22 si el empleado se jubila a los 52 años de edad.

24. Resuelva el problema 22 considerando un interés técnico del 8% y que el primer pago se efectúa cuando el empleado tiene 30 años de edad.

25. Resuelva el problema 22 suponiendo que la anualidad contingente es anticipada.

26. Para jubilar a uno de sus empleados, una compañía realiza 25 pagos bimestrales en una cuenta que le paga intereses del 10.5% nominal bimestral. ¿Cuánto dinero le entrega el día de su jubilación a los 55 años de edad si además le darán una pensión de \$43,500 al final de cada año mientras viva? Considere un tipo de interés técnico del 6.5% y que el primer depósito bimestral de \$3,500 se efectúa cuando el empleado cumple los 32 años de edad.

27. Resuelve el problema 26 si el empleado se retira a los 50 años de edad.

En los problemas del 28 al 53 seleccione la opción correcta, justificando su elección.

28. ¿Cómo se denota el valor presente de una anualidad contingente ordinaria o vencida?

a) $\ddot{a}_x$ *b*) N_x *c*) ${}_nE_x$ *d*) D_x *e*) Otra

29. El valor presente de una anualidad contingente anticipada de \$1.00 está dado por

a) a_x *b*) ${}_nE_x$ *c*) $\ddot{a}_x$ *d*) N_x *e*) Otra

30. El valor de N_{56} con una tasa del 6.5% anual es:

a) \$2'916,757.97 *b*) \$1'188,136.61 *c*) \$959,972.67 *d*) \$2'662,925.12 *e*) Otra

31. El valor de conmutación N_{71} para una tasa de interés técnico del 4% es:

a) 391,733.78 *b*) 588,709.78 *c*) 3'671,606.43 *d*) 391,733.78 *e*) Otra

32. ¿Cuánto pagará hoy el señor Hernández, de 34 años de edad, en sustitución de \$65,000 al final de cada año mientras esté con vida, considerando un interés técnico del 8% anual?

a) \$658,429.32 *b*) \$741,881.76 *c*) \$702,968.09 *d*) \$853,903.75 *e*) Otra

33. ¿Cuál sería la respuesta en el problema 32 si la renta vencida anual fuera de \$48,500 y el interés del 6.5% anual?

a) \$548,963.21 *b*) \$655,114.76 *c*) \$803,925.75 *d*) \$962,097.35 *e*) Otra

34. En el problema 32, ¿cuánto pagaría el señor Hernández al final de cada año, mientras viva, si en sustitución hoy paga $958,000?

a) $95,927.08 *b*) $83,935.21 *c*) $105,008.95 *d*) $90,789.95 *e*) Otra

35. ¿De cuánto podrá disponer al final de cada año, mientras viva, una persona de 35 años de edad que ahora realiza un pago único de $1’125,000 en un fondo que bonifica un tipo de interés técnico del 4% anual?

a) $26,120.85 *b*) $40,785.08 *c*) $38,921.01 *d*) $63,940.95 *e*) Otra

36. Resuelva el problema 35 considerando un pago único de $800,000 con intereses del 6.5% anual.

a) $70,897.95 *b*) $52,288.83 *c*) $63,095.43 *d*) $58,993.08 *e*) Otra

37. Resuelva el problema 35 si la persona tuviese 40 años de edad.

a) $60,968.09 *b*) $63,588.89 *c*) $97,809.93 *d*) $119,693.32 *e*) Otra

38. ¿Cuánto es lo más que pueden prestarle a una persona con 28 años de edad si estima que tiene y tendrá capacidad económica para abonar $75,000 al final de cada año mientras viva? Suponga cargos o intereses del 8% anual.

a) $563,983.93 *b*) $1’098,329.42 *c*) $877,560.60 *d*) $750,981.75 *e*) Otra

39. ¿De cuánto sería el préstamo en el problema 38 si el individuo tiene 38 años de edad y le cargan un interés técnico del 4%?

a) $968,316.95 *b*) $1’500,093.08 *c*) $1’158,309.91 *d*) $1’360,061.03 *e*) Otra

40. ¿Cuánto le prestarían a la persona del problema 38 si puede abonar $100,000 al final de cada año con intereses del 6.5% anual?

a) $1’198,493.48 *b*) $969,369.48 *c*) $1’313,158.16 *d*) $1’593,098.43 *e*) Otra

41. ¿De cuánto es la prima única que la Distribuidora de Automóviles del Centro debe otorgar a un empleado a su retiro a los 50 años de edad si en su plan de pensiones están contemplados pagos de $70,000 al final de cada año, mientras viva, con intereses del 4% anual?

a) $1’059,052.80 *b*) $1’263,921.03 *c*) $993,870.48 *d*) $1’198,935.31 *e*) Otra

42. Resuelva el problema 41 suponiendo que el empleado se jubila a los 54 años de edad y los intereses son del 6.5% anual.

a) $825,429.30 *b*) $760,713.24 *c*) $963,278.45 *d*) $1’069,785.43 *e*) Otra

43. En el problema 41, ¿de cuánto serán los 60 abonos mensuales en un fondo si los intereses que bonifica son del 9.6% nominal mensuales, el primero se realiza 8 años antes del retiro y la tasa de interés técnico es del 8%?

a) $9,629.48 *b*) $15,643.60 *c*) $10,292.33 *d*) $11,697.00 *e*) Otra

44. ¿Cuándo debe comenzar a depositar $11,045 al inicio de cada bimestre con intereses del 11.53% anual, capitalizable por bimestre, una empresa para jubilar a uno de sus empleados cuando cumpla 56 años de edad si tiene contemplados $60,000 al final de cada año mientras viva, con un tipo de interés técnico del 8% anual

a) 35 bimestres antes *b*) 28 bimestres antes *c*) 6 años antes *d*) 39 bimestres antes *e*) Otra

45. En el problema 44, ¿cuándo comenzaría si los depósitos son trimestrales y el pago al final de cada año es de $70,000 con un tipo del 6.5% anual?

a) 35 trimestres antes *b*) 37 trimestres antes *c*) 10 años antes *d*) 31 trimestres antes *e*) Otra

46. ¿Cuánto recibirá cada mes, al final, el empleado del problema 44 si el día de su retiro le dan $100,000?

a) $4,257.61 *b*) $5,008.07 *c*) $4,098.62 *d*) $3,955.50 *e*) Otra

47. Resuelva el problema 44 considerando que la anualidad contingente es anticipada y que se hace un pago menor al comenzar.

a) 35 bimestres antes *b*) 38 bimestres antes *c*) 6 años antes *d*) 40 bimestres antes *e*) Otra

48. ¿Cuánto dinero está recibiendo cada año, al final, desde el día de su retiro a los 60 años de edad un empleado si la compañía destinó $725,000 para tal propósito y la tasa de interés técnico anual es del 4%?

a) $65,921.36 *b*) $60,158.43 *c*) $63,207.48 *d*) $61,508.91 *e*) Otra

49. En el problema 48, cuánto recibirá el empleado si el interés fuera del 6.5%?

a) $80,063.93 *b*) $75,664.03 *c*) $74,910.98 *d*) $70,921.33 *e*) Otra

50. El señor Flores recibió el 25% de los $485,000 que le correspondían por su jubilación a los 43 años de edad y el 75% restante en anualidades, la primera cuando contaba con 50 años de edad, hasta su fallecimiento. ¿Cuánto le dan cada año si el tipo de interés es del 8% anual?

a) $58,493.67 *b*) $61,429.31 *c*) $63,095.38 *d*) $62,908.27 *e*) Otra

51. Resuelva el problema 50 suponiendo que el señor Flores se retira a los 45 años de edad y los intereses son del 4% anuales.

a) $29,375.23 *b*) $30,627.40 *c*) $32,337.16 *d*) $28,202.69 *e*) Otra

52. A un empleado le corresponden $463,000 el día de su retiro, a los 46 años de edad, pero la empresa le ofrece $60,000 anuales a partir de cuando cumpla los 53. ¿Qué le conviene más si los intereses son del 6.5% anuales?

a) la primera *b*) la segunda *c*) son iguales *d*) es indiferente *e*) Otra

53. Resuelva el problema 52 suponiendo que la compañía le ofrece $50,000 anuales a partir de los 50 años de edad.

a) la primera *b*) la segunda *c*) son iguales *d*) es indiferente *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar con el estudio de este capítulo, usted estará capacitado para:

- Calcular la probabilidad de un evento.
- Obtener la probabilidad de la unión y conjunción de dos o más eventos.
- Distinguir los enfoques clásico, empírico y subjetivo en el cálculo de probabilidades.
- Evaluar la esperanza matemática o el valor esperado, y el precio justo.
- Calcular el valor presente de un pago contingente.
- Leer e interpretar los valores de una tabla de mortalidad.
- Utilizar los valores de una tabla de mortalidad para hallar el valor actual de un pago contingente y para evaluar probabilidades de vida.
- Obtener el valor presente de rentas vitalicias en las anualidades contingentes, vencidas y diferidas.

Conceptos importantes

Esperanza matemática, o valor esperado, y precio justo.

Eventos independientes y mutuamente excluyentes.

Experimento, espacio muestral y evento.

Factor de actualización demográfico-financiero y de actualización financiera pura.

Probabilidad de un evento.

Rentas vitalicias y anualidades contingentes.

Tabla de mortalidad, probabilidad de estar con vida en el futuro y valores o símbolos de conmutación.

Valor presente de un pago contingente.

Problemas propuestos para exámenes

En los problemas del 1 al 20, conteste verdadero o falso.

1. La probabilidad es siempre menor que la unidad _____.

2. La probabilidad de un evento imposible es negativa _____.

3. La probabilidad de algunos eventos es mayor que la unidad _____.

4. Evento y espacio muestral son sinónimos _____.

5. La probabilidad de un evento con enfoque clásico es siempre menor que con el enfoque empírico _____.

6. La probabilidad de un evento con el enfoque subjetivo es fácil de comprobar si se cuestiona _____.

7. La probabilidad estadística es sinónimo de empírica _____.

8. En el enfoque clásico, las probabilidades de todos los eventos son iguales _____.

9. La probabilidad matemática se evalúa por el sentimiento de la persona _____.

10. Si la probabilidad de que gane su equipo favorito en el fútbol es 0.7, entonces de que pierda es 0.3 _____.

11. La probabilidad de todos los eventos del espacio muestral es siempre menor que 1 _____.

12. Si dos eventos, A y B, son mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad $P(A \text{ o } B)$ está dada por $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$ _____.

13. La probabilidad de que ocurra un evento 100% seguro es 1 _____.

14. La probabilidad de sacar un 6 de una baraja de 52 cartas es 6/52 _____.

15. El precio justo de un boleto para una rifa de $24,000, si se emitieran 7,500 boletos, es de $3.20 _____.

16. Una tabla de mortalidad es útil para pronosticar cuando morirá una persona _____.

17. La esperanza matemática se expresa en unidades monetarias _____.

18. El valor de conmutación D_{53} es igual a 216,985.36 _____.

19. El factor de actualización demográfico-financiero se representa con ${}_nE_x$ _____.

20. La prima única que pagaría hoy una persona de 35 años en sustitución de $45,000 al final de cada año, mientras viva, con intereses del 6.5% anual, es de $625,350.48 _____.

21. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar al mismo tiempo 2 cartas de la baraja de 52, las 2 sean reyes?

22. ¿Cuál es la probabilidad de lograr el premio mayor de la Lotería Nacional si se emiten 50,000 boletos al participar con un solo boleto?

23. ¿Cuál es la probabilidad de que hoy sea 21 de junio si no se sabe qué día es hoy, claro?

24. Al revisar el examen de 35 alumnos se ve que 29 lo acreditaron y 6 lo reprobaron, ¿cuál es la probabilidad de que el siguiente lo repruebe?

25. Al revisar 25 bolsas de chocolates, 23 resultaron con un dólar menor al estipulado, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente también esté incompleta?

26. De 9,750 personas de 45 años de edad sólo 9,645 celebraron su aniversario número 56. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo del mismo grupo social y de 45 años cumpla los 56?

27. Si la probabilidad de que Roberto repruebe administración o contaduría es del 35%, que repruebe administración es del 22%, que repruebe contaduría es del 17%, ¿cuál es la probabilidad de que repruebe las dos?

28. ¿Cuál es la esperanza matemática de cada uno de los 23 profesores del departamento de matemáticas para lograr un premio de $30,000 por fin de curso?

29. En el problema 28, ¿de cuánto es la esperanza matemática si hay un segundo premio de $10,000?

30. ¿Cuál es la utilidad esperada para el Instituto de Beneficencia Pública si organiza un sorteo emitiendo 10,000 boletos de $250 cada uno, con 28 premios, uno de $350,000, dos de $75,000, cinco de $20,000 y 20 de $5,000?

En los problemas 31 a 79 seleccione la opción correcta justificando su elección.

31. Al lanzar 50 veces una moneda al aire, 27 cayó con cara en la cara superior y 23 en la inferior, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente caiga con cruz en la cara superior en el enfoque empírico?

a) 23% *b*) 46% *c*) 54% *d*) 27% *e*) Otra

32. Resuelva el problema 31 con el enfoque clásico o matemático.

a) 25% *b*) 50% *c*) 75% *d*) 23% *e*) Otra

33. En el problema 31, ¿cuál es su respuesta si utiliza el enfoque objetivo?

a) cualquier valor entre 0 y 100% *b*) 50% *c*) 46% *d*) 54% *e*) Otra

34. ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado caiga con un número menor que 5?

a) 83.33% *b*) 16.67% *c*) 66.67% *d*) 50% *e*) Otra

35. ¿Cuál es la probabilidad de que los resultados sean iguales al tirar una moneda tres veces?

a) 12.5% *b*) 50% *c*) 25% *d*) 33.33% *e*) Otra

36. ¿Cuál es la probabilidad de que mañana sea sábado?

a) 14.2857% *b*) 3.3333% *c*) 6.66674% *d*) 0.2778% *e*) Otra

37. De 35 veces que Manuel llamó a su casa entre las 5 y 6 de la tarde, en 7 recibió la señal de ocupado. ¿Cuál es la probabilidad de que si hoy llama en ese horario logre comunicarse?

a) 20% *b*) 80% *c*) 25% *d*) 75% *e*) Otra

38. De una muestra de 50 tornillos, resultaron 3 defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente también esté defectuoso?

a) 94% *b*) 5.66% *c*) 6.38% *d*) 6% *e*) Otra

39. Considerando que si Laura reprueba matemáticas y contabilidad no podrá seguir en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de continuar si se sabe que de cada 50 estudiantes 13 reprueban matemáticas, 12 reprueban contabilidad y 20 reprueban al menos una de las dos?

a) 10% *b*) 90% *c*) 74% *d*) 96% *e*) Otra

40. ¿Cuál es el precio justo por un boleto para participar en un sorteo de una casa de $1'750,000, un departamento de $825,000 y un automóvil de $216,000 si se emiten 10,000?

a) $256.90 *b*) $279.10 *c*) $321.30 *d*) $301.23 *e*) Otra

41. ¿Cuál es la utilidad esperada para quien organiza la rifa del problema 40 si el precio de cada boleto es $425.00, suponiendo que se venden todos?

a) $2'025,000 *b*) $965,320 *c*) $1'459,000 *d*) $1'323,000 *e*) Otra

42. ¿De cuánto es la esperanza matemática para uno de los 65 empleados de una empresa que los beneficiará con cinco premios de $35,000, $25,000, $15,000, $10,000 y $5,000, respectivamente? Suponga que todos tienen la opción de llevarse más de un premio.

a) $1,384.62 *b*) $1,098.35 *c*) $1,525.00 *d*) $1,275.00 *e*) Otra

43. ¿Cuál es la esperanza matemática para el jugador que gana $50 si al tirar dos dados la suma resulta de 3 puntos o menos y pierde $10.00 en cualquier otro resultado?

a) $5.00 *b*) –$3.50 *c*) –$15.00 *d*) –$5.00 *e*) Otra

44. ¿Cuál es el valor presente de un monto de $250,000 que se recibirá 15 años después, si se está con vida, considerando que la probabilidad de vivir ese tiempo más, es del 26.75% y la tasa de interés es del 10.5% anual?

a) $10,973.45 *b*) $14,956.49 *c*) $21,382.05 *d*) $16,047.32 *e*) Otra

45. ¿Cuánto dinero recibirá el licenciado Núñez 20 años después, si aún está vivo, por un seguro por el que ahora pagó $30,275, suponiendo intereses del 8.3% anual y tiene el 85.23% de probabilidades de vivir para cobrarlo?

a) $165,323.45 *b*) $175,009.17 *c*) $163,006.40 *d*) $178,905.00 *e*) Otra

46. El Instituto de Enseñanza Media Superior ofrece una beca de $175,000 para estudiar un posgrado a los estudiantes que logren terminar su carrera profesional con promedio mínimo de 9.7. ¿Cuál es el valor actual único cinco años antes si se consideran intereses del 10.75% anual y se sabe que de cada 150 estudiantes sólo 15 logran dicho promedio?

a) $48,929.32 *b*) $35,673.27 *c*) $10,503.15 *d*) $25,968.73 *e*) Otra

47. En el problema 46, ¿de cuánto será la beca si 8 años antes el Instituto paga %15,000?

a) $339,501.06 *b*) $295,968.23 *c*) $185,409.33 *d*) $110,975.21 *e*) Otra

48. ¿De cuánto es el monto con que una empresa del ramo automotriz premia a sus empleados que cumplen los 45 años de edad a su servicio si para uno de ellos, que ahora tiene 27 años, depositó $29,350? Tómese en cuenta que las estadísticas muestran que sólo el 42% lo logra y los intereses son del 13.8% anual.

a) $73,058.37 *b*) $72,751.99 *c*) $75,423.81 *d*) $85,923.06 *e*) Otra

49. ¿Cuál es el factor de actualización demográfico-financiero, con una tasa de interés técnico anual del 7.5%, 23 años de plazo y el 63.58% de probabilidades de lograr un monto?

a) 0.25384025 *b*) 0.12048302 *c*) 0.20713275 *d*) 0.15583215 *e*) Otra

50. Si el factor de actualización demográfico-financiero es 0.119643295 para una tasa de interés del 9.85% anual y 71.3% de probabilidades de lograr un monto dado, ¿cuál es el plazo aproximado en años?

a) 19 años *b*) 25 años *c*) 22 años *d*) 21 años *e*) Otra

51. ¿Cuál es la tasa de interés anual si la probabilidad de cobrar un seguro, 18 años después, es del 49.71% y el factor de actualización demográfico-financiero es 0.092385?

a) 10.3% *b*) 8.6% *c*) 7.9% *d*) 9.8% *e*) Otra

52. ¿Cuál es el factor de actualización demográfico-financiero para un tipo de interés del 11.64% si la probabilidad de cobrar $1’275,000, 12 años después, si se está con vida, es del 62.8%?

a) 0.23159234 *b*) 0.167541234 *c*) 0.154321618 *d*) 0.13931543 *e*) Otra

En los problemas del 53 al 79 utilice los valores de la tabla de mortalidad, la última del apéndice C, que viene al final del libro.

53. ¿Cuántas personas fallecieron cuando tenían 63 años de edad?

a) 149,199 *b*) 823,750 *c*) 165,382 *d*) 529,318 *e*) Otra

54. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo de 51 años de edad cumpla los 52?

a) 7.91% *b*) 99.209% *c*) 7.33% *d*) 99.267% *e*) Otra

55. ¿Cuántos años tiene la señora Villaseñor si la probabilidad de cumplir un año más es del 98.731%?

a) 50 años *b*) 47 años *c*) 63 años *d*) 58 años *e*) Otra

56. ¿Qué probabilidades hay de que Ignacio no cumpla un año más de vida si tiene 56?

a) 1.953% *b*) 1.082% *c*) 10.820% *d*) 2.093% *e*) Otra

57. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo de 31 años de edad llegue a los 75?

a) 50.43217% *b*) 53.60921% *c*) 54.87648% *d*) 49.09835% *e*) Otra

58. ¿Qué probabilidades tiene Javier de llegar a los 68 años de edad si hoy cuenta con 35?

a) 59.09343% *b*) 68.32453% *c*) 72.37725% *d*) 69.09321% *e*) Otra

59. ¿Qué probabilidades hay de que Lupita celebre su cumpleaños número 60 si hoy tiene 27 años?

a) 80.96153% *b*) 82.09364% *c*) 83.82934% *d*) 78.63123% *e*) Otra

60. ¿Cuál es la probabilidad de que una pareja celebre sus bodas de plata, 25 años de casados, si se casaron cuando ella tenía 23 y el 25?

a) 89.9345 % *b*) 83.1417% *c*) 81.2132% *d*) 80.0638% *e*) Otra

61. ¿Qué probabilidades tiene la pareja del problema 60 de celebrar sus bodas de oro, 50 años de casados?

a) 34.9321% *b*) 39.4459% *c*) 33.0932% *d*) 30.9387% *e*) Otra

62. ¿Cuál es la probabilidad de que Liliana esté con vida para cobrar un seguro dentro de 18 años si ahora tiene 35 años de edad?

a) 89.7654% *b*) 92.0254% *c*) 90.2345% *d*) 80.4587% *e*) Otra

63. ¿Qué probabilidades existen de que Liliana, del problema 62, no cumpla los 60 años de edad?

a) 85.1871% *b*) 83.2936% *c*) 80.9321% *d*) 82.9532% *e*) Otra

64. Si la probabilidad de fallecer antes de los 57 años de edad, teniendo 32, es de 87.9262%, ¿cuál es la probabilidad de mantenerse con vida ese lapso?

a) 16.9395% *b*) 13.2351% *c*) 14.3245% *d*) 12.0738% *e*) Otra

65. ¿Cuál es la probabilidad de fallecer entre los 51 y 68 años de edad de un individuo que ahora tiene 15 años?

a) 18.9321% *b*) 19.8493% *c*) 17.9395% *d*) 20.3905% *e*) Otra

66. ¿Qué probabilidad tiene José de morir entre los 60 y 75 años de edad si ahora tiene 37?

a) 25.3210% *b*) 26.9889% *c*) 28.3232% *d*) 29.9797% *e*) Otra

67. ¿Cuánto debe pagar una persona de 31 años de edad para disponer de $375,000 cuando cumpla los 54, si los cumple, considerando intereses del 6.5% anual?

a) $76,109.75 *b*) $81,923.41 *c*) $79,679.59 *d*) $82,428.32 *e*) Otra

68. ¿De cuántos dólares puede disponer un individuo, cuando cumpla 48 años de edad, si ahora deposita $20,500, con interés del 4% anual? Suponga que tiene 24 años.

a) $46,629.92 *b*) $50,635.95 *c*) $56,334.04 *d*) $53,295.35 *e*) Otra

69. ¿De cuántas unidades monetarias dispondría la persona del problema 68 si la cotización actual el dólar es de $10.7835 y aumenta a razón del 0.013% cada semana?

a) $695,604.73 *b*) $714,473.23 *c*) $750,814.35 *d*) $725,814.35 *e*) Otra

70. ¿Cuál es el valor actual del dotal puro $1’050,325 al cumplir los 52 años de edad una persona que ahora tiene 27, considerando un tipo de interés técnico del 6.5% anual?

a) $165,929.40 *b*) $198,592.35 *c*) $225,723.41 *d*) $305,684.35 *e*) Otra

71. ¿Cuál es el dotal puro a los 60 años de edad si su valor actual es de $125,000? Suponga intereses del 8% anual y 25 años de edad actual.

a) $2’211,773.21 *b*) $1’788,943.06 *c*) $2’103,268.91 *d*) $1’963,067.42 *e*) Otra

72. ¿De cuánto es el capital único que una persona de 31 años de edad pagará ahora en lugar de $47,500 al final de cada año mientras viva, considerando intereses del 8% anual?

a) $549,526.25 *b*) $468,908.32 *c*) $725,041.25 *d*) $629,321.27 *e*) Otra

73. Resuelva el problema 72 suponiendo que se tienen 37 años de edad y los intereses son del 6.5% anuales.

a) $628,510.68 *b*) $715,727.77 *c*) $867,921.12 *d*) $903,903.90 *e*) Otra

74. ¿De cuánto dinero podrá disponer al final de cada año, mientras viva, una persona que cuando tiene 34 años de edad deposita $565,000 con intereses del 6.5% anual?

a) $41,828.55 *b*) $38,729.29 *c*) $45,209.83 *d*) $46,975.23 *e*) Otra

75. Cuando su hija cumple 15 años de edad, el señor Mendoza le deposita en una cuenta $150,000. ¿De cuánto podrá disponer al final de cada año mientras viva si la tasa de interés técnico es del 4%?

a) $8,127.40 *b*) $9,089.48 *c*) $15,267.22 *d*) $6,912.75 *e*) Otra

76. ¿De qué monto dispondrá la hija del señor Mendoza, del problema 75, a partir de que cumple los 45 años de vida?

a) $36,498.03 *b*) $30,512.36 *c*) $40,923.08 *d*) $29,730.49 *e*) Otra

77. En el problema 75, ¿cuánto se dispondrá anualmente si el depósito se hace cuando la hija tiene 20 años de edad?

a) $9,497.90 *b*) $7,097.54 *c*) $10,329.35 *d*) $8,433.61 *e*) Otra

78. ¿Cuál es el capital mínimo que la doctora Idalia debe depositar ahora que tiene 35 años de edad para contar con una renta anual de $75,000 desde que cumpla los 50? Suponga intereses del 8% anual.

a) $245,765.64 *b*) $307,667.47 *c*) $375,923.32 *d*) $268,724.42 *e*) Otra

79. En el problema 78, ¿de qué monto anual puede disponer la doctora si el capital lo deposita cuando tiene 40 años de edad y la tasa de interés es del 6.5%?

a) $40,905.49 *b*) $38,500.64 *c*) $45,923.32 *d*) $35,235.53 *e*) Otra

Capítulo 10

Depreciación de activos

Contenido de la unidad

Con excepción de los terrenos y algunos otros bienes, el valor de casi todos los activos se reduce con el tiempo desde el momento cuando son adquiridos o se ponen en servicio. Esta pérdida del valor se conoce como *depreciación* y es causada principalmente por el uso, la insuficiencia o la obsolescencia del propio bien.

Desde el punto de vista fiscal o impositivo, los cargos por depreciación son determinados por el gobierno, pero no obsta para que las empresas destinen partidas de dinero, de forma periódica, para no descapitalizarse en el momento de reponer sus activos, es decir, cuando dejan de ser útiles, o su mantenimiento y sus reparaciones resultan muy costosas al final de su *vida útil*. De aquí que es conveniente, y de gran utilidad, disponer de los diferentes métodos para depreciar los activos y estimar su valor real en cualquier momento.

En este capítulo se exponen los métodos más usuales para calcular los cargos por depreciación, teniendo presente que generalmente se evalúa en periodos anuales.

En cada uno de los métodos de depreciación que aquí se estudian se ha involucrado el incremento que se da en el valor de los activos, a causa de la inflación y otros factores que dan lugar a que, con el paso del tiempo, el bien se cotice a un precio más alto que el que se estipula en la factura, aun considerando los efectos de la depreciación.

Un claro ejemplo de lo anterior se presenta cuando compramos un automóvil usado.

10.1 Definiciones y conceptos

Los siguientes son definiciones y conceptos importantes concernientes a la depreciación de activos.

Definición 10.1

La pérdida de valor de un activo fijo y tangible, a consecuencia de su insuficiencia, uso u obsolescencia, se denomina ***depreciación***.

La depreciación constituye un gasto periódico, generalmente anual, por lo que constituye una renta y se denota con R.

Definición 10.2

La ***vida útil*** de un activo es el tiempo que hay entre su compra y su retiro.

La vida útil se expresa con n y se mide en años, unidades de servicio o número de piezas producidas.

Definición 10.3

El ***valor de rescate*** de un activo es el que supuestamente tiene o tendrá al final de su vida útil.

El valor de rescate, que también se conoce como *valor de desecho* o *valor de salvamento*, en este libro se expresa con C_n.

Puede ser *positivo*, cuando se vende para otros usos a otros clientes, por lo que representa alguna recuperación económica para el propietario; puede ser *negativo*, si requiere un gasto adicional para su remoción; por ejemplo, la inversión que se hace al demoler un edificio luego de
(eliminación)

haber culminado su vida de servicio. También llega a ser *nulo*, si se convierte en un total y absoluto desperdicio.

Para los cálculos de la depreciación de algunos bienes específicos —los automóviles usados, por ejemplo— el valor de compraventa puede ser considerado como su valor de rescate para quien lo vende.

Otros conceptos y valores que participan con la depreciación de activos, con su respectiva nomenclatura, son los siguientes:

El ***precio original*** es el valor de arranque para la depreciación; se expresa con C.

La ***depreciación acumulada***, que se obtiene sumando la de un año cualquiera con la de los anteriores.

El ***valor contable*** o ***valor en libros*** es el que tiene el activo al final del año k-ésimo, luego de depreciarse. Se denota con C_k, donde $k = 1, 2, \ldots, n$.

Es evidente que, al comenzar la vida útil del activo, el valor en libros es igual a su precio original y está cambiando acorde con la depreciación anual, hasta el final en que deberá coincidir con el valor de rescate.

El capital total en que se deprecia un activo se llama ***base de depreciación*** y es igual a la diferencia entre el precio original y el valor de rescate, es decir, $C - C_n$.

En algunos casos se manejan adicionalmente dos tasas, la de inflación, que aquí se denota con i, y la de *depreciación*, que se expresa con d.

Como se dijo, la depreciación se evalúa por año y, si es necesario estimarla en alguna fecha intermedia, bastará con encontrar la parte proporcional correspondiente planteando una regla de 3. Por ejemplo, si se asume una depreciación lineal, la depreciación hasta el séptimo mes del año, se obtiene multiplicando la anual por la fracción 7/12.

Métodos

Los métodos más usuales para calcular la depreciación son los siguientes, que se clasifican en tres grupos:

Con promedios

- De la línea recta o lineal.
- De horas de servicio o unidades de producción.

Con cargo decreciente

- De suma de dígitos.
- De tasa fija.

Con interés compuesto

- De fondo de amortización.
- De anualidad ordinaria.

Con excepción del último método, que es semejante al de *fondo de amortización,* en seguida se analizan cada uno de los métodos. Dependiendo del método, y de si se considera la inflación, los cargos anuales pueden ser todos iguales o diferentes entre sí, pero en todo caso llega a hacerse un ***cuadro de depreciación*** para ilustrar el comportamiento de dichos cargos y el ***valor contable,*** que puede ser útil para el pago de impuestos.

10.2 Método de la línea recta

En este método, el cargo anual es el mismo para todos los años de la vida útil del activo, es decir, ofrece el mismo servicio durante cada uno de los periodos de operación. El cargo por año se obtiene dividiendo la *base de depreciación* entre el total de años de servicio, es decir:

Teorema 10.1

En el ***método* de la *línea recta***, la depreciación anual está dada por:

$$R = \frac{C - C_n}{n} \text{ donde:}$$

C, el precio original del activo C_n, el valor de rescate n, la vida útil del activo en años.

Como en todas las fórmulas, pueden cuestionarse cualquiera de las cuatro literales que aparecen en ésta; bastará con reemplazar los tres que se conozcan, para luego, con álgebra básica, hallar el que falta.

Ejemplo 1

Depreciación con el método de la línea recta, cuadro

La Constructora del Sureste, S. A., compró una máquina para hacer block-ladrillo en $121,000. Se estima que ésta tendrá 5 años de vida útil y $13,200 como valor de rescate. Empleando el método de la línea recta, obtenga la depreciación anual y haga el cuadro de depreciación.

solución

Los valores para sustituir en el teorema 10.1 son:

C = $121,000, el precio original.

C_n = $13,200, el valor de rescate.

n = 5, la vida útil del activo en años.

La depreciación por año es, entonces:

$$R = \frac{121{,}000 - 13{,}200}{5} \quad \text{o} \quad R = \$21{,}560$$

Significa que la máquina de hacer ladrillos disminuirá su valor, en esta cantidad, cada uno de los 5 años en los que estará dando servicio.

Cuadro de depreciación

La tabla de depreciación es la siguiente, que se inicia escribiendo la depreciación anual en todos los renglones de la segunda columna, y el precio original del activo, en el primer renglón de la última.

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	\$121,000
1	\$21,560	\$21,560	\$99,440
2	\$21,560	\$43,120	\$77,880
3	\$21,560	\$64,680	\$56,320
4	\$21,560	\$86,240	\$34,760
5	\$21,560	\$107,800	\$13,200

Nótese que:

- En la tercera columna está la *depreciación acumulada*, que es igual a la suma de las depreciaciones anuales hasta ese periodo.
- En la cuarta columna se encuentra el valor contable, que se obtiene de restar la depreciación anual, del valor en libros anterior o restando del precio original la depreciación acumulada.
- El valor contable es el valor del activo al término de cualquier periodo; sería el precio de compraventa si en ese momento se vendiese, que, como se dijo, puede ser útil también para cargos fiscales.

Este valor contable al final del k-ésimo año, en el método de la línea recta, está dado por:

$$C_k = C - k(R)$$

Al término del tercer año, por ejemplo, es:

$$\begin{aligned} C_3 &= 121{,}000 - 3(21{,}560) \\ &= \$56{,}320 \end{aligned}$$

tal como se ve en el cuadro anterior.

También es cierto que la suma de los valores de las columnas 3 y 4, en cualquier renglón o periodo, es igual al precio original del activo.

Por otro lado, puede suceder que el valor de rescate del activo sea más bien un gasto, y en ese caso será negativo tal como se aprecia en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2

Depreciación anual en el método de la línea recta

¿De cuánto es la depreciación anual de una máquina que costó $150,000, será utilizada durante 6 años, y al final se gastarán $18,600 en su remoción y cambio por otra más moderna?

solución

En la ecuación 10.1 se reemplazan:

C por $150,000, el precio original.

n por 6 años, la vida útil de la máquina.

C_n por – $18,600 el valor de rescate; negativo, porque es un gasto. Entonces, la depreciación por año es:

$$R = \frac{150{,}000 - (-18{,}600)}{6} = \frac{168{,}600}{6}$$

$$R = \$28{,}100$$

Depreciación con inflación en el método de la línea recta

Si bien es cierto que el valor en libros o valor contable de un activo es independiente de su valor comercial, este valor puede ser considerado para estimar los costos por depreciación anual del activo, manejándolo como su valor de rescate C_n.

Es posible que, por ejemplo, al comprar un automóvil seminuevo el precio de compraventa sea mayor que el consignado en la factura original, lo cual se debe a que la inflación y otros factores producen un efecto mayor que el que ocasiona la depreciación haciendo que el precio se incremente. A continuación se desarrolla una fórmula que puede ser utilizada en casos como el presente.

Ejemplo 3

Valor de rescate, deducción de fórmula

¿Cuál será el valor de rescate de un activo que costó $100,000, se deprecia de manera constante $9,500 cada año, durante cinco años, y su valor aumenta 12% anual por inflación y otros factores?

solución

El procedimiento consiste en incrementar el valor del activo de acuerdo con la inflación del primer año de vida, para luego restar el valor de la depreciación, es decir, al finalizar el primer año de servicio el valor será:

$$C'_1 = 100{,}000 + 0.12(100{,}000)$$
$$C'_1 = 100{,}000(1.12) \qquad c + ca = c(1 + a)$$
$$C'_1 = \$112{,}000$$

Con la depreciación de $9,500 el valor neto o efectivo será:

$$C_1 = 112{,}000 - 9{,}500$$
$$C_1 = 102{,}500$$

Al término del segundo año, este valor crece un 12%

$$C'_2 = 102{,}500(1.12)$$
$$C'_2 = 114{,}800$$

Restando la depreciación del año, queda:

$$C_2 = 114{,}800 - 9{,}500$$
$$C_2 = 105{,}300$$

Al concluir el tercer periodo, el costo sin considerar la depreciación es:

$$C'_3 = 105{,}300(1.12)$$
$$C'_3 = 117{,}936$$

Con depreciación:

$$C_3 = 117{,}936 - 9{,}500$$
$$C_3 = 108{,}436$$

Al finalizar el cuarto se tiene:

$$C'_4 = 108{,}436(1.12)$$
$$C'_4 = 121{,}448.32$$

Entonces $C_4 = 121{,}448.32 - 9{,}500$

$$C_4 = 111{,}948.32$$

Al término de los 5 años, el valor de rescate del activo será:

$$C'_5 = 111{,}948.32(1.12)$$
$$C'_5 = 125{,}382.1184$$

y por eso $C_5 = 125{,}382.1184 - 9{,}500$

$C_5 = \$115{,}882.12$, redondeando.

Esto significa que, a pesar de haberse depreciado, el activo aumentó su valor original en $15,882.12 durante los 5 años.

Para generalizar lo anterior, adviértase lo siguiente:
El valor al final del primer año es:

$$C'_1 = C + C(i)$$

$C'_1 = \mathrm{C}(1 + i)$, donde i es la tasa de inflación anual.

Se resta la depreciación por año, R.

$$C_1 = C(1 + i) - R$$

Al final del segundo año, esto crece otro 12%

$$C'_2 = C_1 + C_1(i)$$
$$C'_2 = C_1(1 + i)$$
$$C'_2 = [C(1 + i) - R](1 + i) \qquad \text{ya que} \qquad C_1 = C(1 + i) - R$$

Restando la depreciación correspondiente queda:

$$C_2 = [C(1 + i) - R](1 + i) - R$$

Considerando la inflación y luego la depreciación, se llega a que al final del tercer año el valor es:

$$C'_3 = ([C(1 + i) - R](1 + i) - R)(1 + i)$$
$$C_3 = ([C(1 + i) - R](1 + i) - R)(1 + i) - R$$

Para quitar los paréntesis, se efectúa la multiplicación por $(1 + i)$ y luego el corchete.

$$C_3 = [C(1 + i) - R](1 + i)(1 + i) - R(1 + i) - R$$
$$C_3 = C(1 + i)(1 + i)(1 + i) - R(1 + i)(1 + i) - R(1 + i) - R \qquad \text{o}$$
$$C_3 = C(1 + i)^3 - R(1 + i)^2 - R(1 + i) - R$$

Procediendo de manera semejante, se verá que al final del cuarto año el valor del activo será:

$$C_4 = C(1 + i)^4 - R(1 + i)^3 - R(1 + i)^2 - R(1 + i) - R \qquad \text{o}$$
$$C_4 = C(1 + i)^4 - \mathrm{R}[(1 + i)^3 + (1 + i)^2 + (1 + i) + 1]$$
$$= C(1 + i)^4 - \mathrm{R}[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3] \qquad a + b = b + a$$

Es evidente que al término del enésimo año el valor del activo será:

$$C_n = C(1 + i)^n - R[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{n-1}]$$

La suma entre corchetes corresponde a una serie geométrica con $a_1 = 1$, el primer término, $r = 1 + i$, la razón común, y n términos. Puede evaluarse, por lo tanto, con la ecuación del teorema 2.4.

$$S_n = (1)\,\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} \qquad S_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_n = \frac{1-(1+i)^n}{-i} \qquad \text{o}$$

$$S_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad a - b = -(b - a)$$

Al sustituir esto por el contenido de los corchetes, resulta que el valor de rescate del activo estará dado por la ecuación del siguiente teorema.

Teorema 10.2

El valor del rescate o de compraventa de un activo que se deprecia con el *método de la línea recta* después de n años y considerando la inflación es:

$$C_n = C(1+i)^n - R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

donde: C es el precio original, i es la tasa de inflación anual, R la depreciación por año y es constante. Si n se sustituye por K, resulta el valor contable, o de compraventa, K años después de su adquisición.

Ejemplo 4

Resuelva el ejemplo 3 con la ecuación del teorema 10.2.

solución

Los valores para sustituir son:

C = \$100,000, el precio original.

R = \$9,500, la depreciación por año.

i = 0.12, la tasa de inflación anual.

n = 5, la vida útil en años.

Entonces el valor de rescate es:

$$C_5 = 100{,}000(1.12)^5 - 9{,}500\left[\frac{(1.12)^5 - 1}{0.12}\right]$$

$$C_5 = 100{,}000(1.762341683) - 9{,}500(6.352847358)$$

$$C_5 = 176{,}234.17 - 60{,}352.05$$

$$C_5 = \$115{,}882.12$$

que es igual al que se obtuvo en el ejemplo 3.

Ejemplo 5

Depreciación anual, valor contable, cuadro de depreciación

Encontrar la depreciación anual de un edificio cuya construcción ha costado 84 millones de dólares, se considera que estará en servicio durante 40 años, que al final será necesario invertir un cierto capital para su demolición y limpieza del terreno. Se estima, además, que la inflación será del 8% anual en promedio y que las obras de demolición de un edificio semejante actualmente tienen un costo de 1.25 millones de dólares.

Calcular el valor contable al final del año 30 y hacer el cuadro en sus primeros 3 renglones y el último.

solución

a) El valor de rescate es el costo de la demolición, y 40 años después con incrementos del 8% anual, será.

$C_n = 1.25(1.08)^{40}$

$C_n = 1.25(21.7245215)$ o

$C_n = 27.15565188$, que puede redondearse en 27.2 millones, dado que es un estimado.

La depreciación anual R se despeja de la igualdad siguiente, que resulta de sustituir en la ecuación 10.2 los valores:

$C = 84$ millones, el valor original.

$C_n = -27.2$, el valor de rescate, negativo; es un gasto.

$i = 0.08$, la tasa de inflación anual.

$n = 40$, la vida útil del edificio.

$$-27.2 = 84(1.08)^{40} - R\left[\frac{(1.08)^{40}-1}{0.08}\right]$$

$$-27.2 = 84(21.7245215) - R(259.0565188)$$

de donde $R(259.0565188) = 1{,}824.859806 + 27.2$

$$R = 1{,}852.059806/259.0565188 \quad \text{o} \quad R = 7.149249957 \text{ millones}$$

b) El valor en libros, al final del año 30, se obtiene sustituyendo n por 30 en la ecuación 10.2

$$C_{30} = 84(1.08)^{30} - 7.149249957\left[\frac{(1.08)^{30}-1}{0.08}\right]$$

$$C_{30} = 84(10.06265689) - 7.149249957(113.2832111)$$

$$C_{30} = 845.2631788 - 809.8899921$$

$$C_{30} = 35.3731867$$

c) Con respecto al cuadro de depreciación del ejemplo 1, ahora se agrega la columna: *Valor con inflación* al inicio de cada periodo, que se obtiene multiplicando el valor en libros anterior por 1.08. El cuadro es el siguiente, con las cantidades en millones de dólares.

Fin del año	Valor con inflación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	84.00000000
1	90.72000000	7.149249957	7.149249957	83.57075004
2	90.25641004	7.149249957	14.29849991	83.10716008
3	89.75573289	7.149249957	21.44774987	82.60648293
. . .				
39		7.149249957	278.8207483	–18.56550930
40	–20.05075004	7.149249957	285.9699983	–27.20000000

Para el último renglón, observe que:

- En la última columna está el valor de rescate: –27.2.
- En la cuarta, está la depreciación total 40(7.149249957) = 285.969993.
- La tercera contiene la depreciación anual, que es constante. Para el valor con inflación que va en la primera columna, nótese que es igual a $(1.08)X$, donde X es el valor contable en el renglón 39; como se ve en los primeros renglones, debe cumplirse que:

$$X + 0.08(X) - 7.149249957 = -27.2$$

de donde:

$$X = -20.05075004/1.08$$

$$X = -18.5655093$$

y $1.08(X) = -20.05075004$ es el último valor con inflación.

Ejercicios 10.2

1. ¿Qué es la *depreciación* de un activo?
2. ¿Qué es el *valor en libros* y qué relación tiene con la *depreciación acumulada* en el método lineal?
3. ¿Qué entiende usted por *vida útil* de un activo?
4. ¿Con qué otros calificativos se conoce el *valor de rescate?*
5. ¿Cuáles son los métodos que aquí se mencionan para depreciar un activo?
6. Escriba la fórmula que se utiliza para depreciar un activo con el método de la línea recta.
7. ¿Qué característica tiene el método lineal?

8. ¿Qué diferencias observa usted en el método lineal con y sin inflación?

En los siguientes problemas utilice el método lineal.

9. Obtenga la depreciación anual de una rotativa que costó 2.3 millones de dólares, tiene 8 años de vida útil y al final se rescatan $600,000.

10. ¿Cuál es el valor de desecho de un automóvil al final de 5 años si costó $165,000 y se deprecia $7,150 anuales?

11. La refacción de una trilladora cuesta $45,300, tiene vida útil de 4 años y al final se gastan $3,500 para removerla. Calcule la depreciación anual.

12. Se compra una guillotina eléctrica en $325,000 con 7 años de vida útil, según el fabricante. ¿De cuánto es el valor de desecho si se deprecia $35,000 por año?

13. Un agricultor compró un tractor en $350,000 y a los 6 años lo vende en $125,000. ¿Cuál es el cargo por depreciación anual?

14. ¿Cuánto se rescata por un automóvil que costó $180,000, se deprecia $8,000 anuales durante 5 años y aumenta su valor con la inflación del 5.4% anual?

15. El laboratorio de química de la universidad compró balanzas de precisión en $126,840, ¿de cuánto es la depreciación anual durante 5 años si al final se recuperan $19,000? Suponga que su valor aumenta 6.3% por año por inflación y otros factores.

16. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que 10 años antes costó $1’345,000, se deprecia $130,000 cada año y aumentó su valor con la inflación y otros factores un 8.5% anual?

17. ¿Cuál será la vida útil de un activo que costó $175,000, se deprecia $25,000 anuales y tiene un valor de rescate de $34,560? Suponga que su valor aumenta con la inflación del 6.25% anual.

18. Un edificio costó 2.5 millones de dólares, aumenta su valor con la inflación del 6% anual y se deprecia $160,000 cada año durante 30 años. ¿Cuál es el valor de rescate?

19. En el problema 18 encuentre el valor contable al final del año 20 y al final del quinto.

20. Se estima que el valor de rescate de un activo que costó $120,000 será de $23,000, ¿cuánto se deprecia cada año si su valor crece con la inflación del 14% anual? Suponga 8 años de vida útil y haga el cuadro de depreciación.

21. ¿En cuántos años el valor de rescate de un activo que costó $187,500 será de $38,050, si se deprecia $35,200 por año y se considera que su valor crece con la inflación del 10.5% anual?

22. ¿Cuál es la depreciación anual de un activo durante 7 años para que su valor de rescate sea igual al 75% de su costo original de $240,000, suponiendo que aumenta por inflación y otros factores un 9.6% anual?

23. ¿Cuál es el precio original de un automóvil que se deprecia $10,500 anuales durante 5 años, al final se obtienen $162,000 y su valor crece 11.3% anual? Haga el cuadro de depreciación.

En los problemas del 24 al 36, seleccione la opción correcta justificando su elección.

24. ¿Cuál es la depreciación anual de una máquina que costó 1.53 millones de dólares, tiene 7 años de vida útil y $520 como valor de rescate?

a) $144,285.14 *b*) $105,693.09 *c*) $93,229.78 *d*) $116,463.73 *e*) Otra

25. Obtenga el valor de compraventa, es decir, de rescate de un automóvil al final de 6 años si se compró en $190,500 y se deprecia $8,250 anuales.

a) $156,390.00 *b*) $148,088.75 *c*) $135,490.00 *d*) $141,000 *e*) Otra

26. Un tractor se deprecia $21,000 en cada uno de los 6 años de servicio. ¿En cuánto se compró si al final se vende en $106,000?

a) $210,400 *b*) $225,300 *c*) $232,000 *d*) $198,000 *e*) Otra

27. ¿De cuántos años es la vida de un activo que costó $129,500, se deprecia $8,150 cada año y al final se rescatan $48,000?

a) 11 *b*) 7 *c*) 10 *d*) 8 *e*) Otra

28. ¿Cuánto se rescata al final de 7 años si una guillotina que costó $278,000 se deprecia $14,000 anuales?

a) $180,000 *b*) $175,000 *c*) $168,000 *d*) $160,000 *e*) Otra

29. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que 9 años antes costó $965,000 y se deprecia $35,000 cada año? Considere que su valor aumentó con la inflación y otros factores 0.4% cada bimestre.

a) $849,811.85 *b*) $789,963.61 *c*) $910,793.45 *d*) $965,768.30 *e*) Otra

30. Se estima que el valor de rescate de una máquina suajadora que costó $190,000 será de $69,300, luego de 7 años de su adquisición. ¿Cuál es la depreciación anual si su valor crece con la inflación del 9.3% anual?

a) $30,668.78 *b*) $35,049.03 *c*) $29,793.98 *d*) $32,908.63 *e*) Otra

31. ¿Cuál fue el precio original de un automóvil que se deprecia $12,250 anuales durante 6 años, al final se vende en $175,000 y su valor crece 8.65% anual?

a) $161,910.62 *b*) $170,843.08 *c*) $158,929.37 *d*) $165,165.65 *e*) Otra

32. ¿De cuánto es la depreciación anual de un activo durante 8 años si su valor de rescate es igual al 70% de su costo original de $275,000, suponiendo que su valor crece con el 7.28% anual?

a) $28,824.47 *b*) $26,429.35 *c*) $27,980.38 *d*) $30,202.25 *e*) Otra

33. ¿En cuántos años el valor de rescate de un activo que costó $246,606.00 será de $35,000 si se deprecia $32,350 por año y se considera que su valor crece con el 6.8% anual?

a) 7 *b*) 10 *c*) 9 *d*) 8 *e*) Otra

34. ¿Cuál fue el precio original de un activo que se deprecia $20,300 cada año, su valor crece con el 10.5% anual y se vende en $263,750.00 después de 8 años?

a) $203,305.73 *b*) $225,012.75 *c*) $214,412.43 *d*) $165,063.85 *e*) Otra

35. Considerando que el valor de una máquina tortilladora crece con el 3.2% semestral, ¿cuál será su valor de desecho si costó $160,000 y se deprecia $15,000 anuales durante 5 años?

a) $98,709.63 *b*) $102,997.79 *c*) $107,335.60 *d*) $115,702.72 *e*) Otra

36. ¿En cuánto se venderá la máquina del problema 35, ocho años después de que se compró, si después de los primeros cinco años se deprecia $18,350 anuales y su valor crece 2.8% por año?

a) $60,000.81 *b*) $96,429.33 *c*) $87,608.63 *d*) $70,003.08 *e*) Otra

10.3 Método de unidades de producción o de servicio

Este método es en realidad una variante del anterior, por eso se puede utilizar la fórmula del teorema 10.1, pero con n representando el número de unidades que se producen o las unidades que da servicio el activo que se deprecia.

Puede suceder que con este método la depreciación sea diferente para cada uno de los años de su vida útil. Generalmente la capacidad de producción o de horas de servicio es determinada por el fabricante de la maquinaria o el equipo que se deprecia, o con los históricos que se tengan de bienes semejantes.

Ejemplo 1

Depreciación con el método de las unidades producidas

Obtenga la depreciación anual de la máquina de ladrillos del ejemplo 1 de la sección 10.2, que costó \$121,000, al final de sus 5 años de vida útil se rescatan \$13,200 y se considera que se producen 10 millones de piezas distribuidas de la forma siguiente:

Año	Producción
1	1.80 millones
2	2.15 millones
3	2.50 millones
4	1.95 millones
5	1.60 millones
Total	10.00 millones

solución

En la ecuación 10.1 se reemplazan.

C por \$121,000, el precio original.

C_5 por \$13,200, el valor de rescate.

n por 10 millones, la producción total.

Entonces por cada millón de piezas la depreciación es:

$$R = \frac{121{,}000 - 13{,}200}{10} \qquad \text{o}$$

$$R = \$10{,}780$$

Consecuentemente, la depreciación por año será igual a la multiplicación de este factor por la producción anual, es decir:

Año	Depreciación
1	1.80(10,780) = $19,404
2	2.15(10,780) = $23,177
3	2.50(10,780) = $26,950
4	1.95(10,780) = $21,021
5	1.60(10,780) = $17,248
	Total: $ 107,800

Note que la suma de los cinco valores es igual a la base de depreciación, es decir, la depreciación total, 121,000 – 13,200.

El cuadro de depreciación se comienza escribiendo la depreciación anual en la tercera columna y la producción por año en millones en la segunda.

Fin del año	Producción anual	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	121,000
1	1.80	19,404	19,404	101,596
2	2.15	23,177	42,581	78,419
3	2.50	26,950	69,531	51,469
4	1.95	21,021	90,552	30,448
5	1.60	17,248	107,800	13,200

Valor contable

La depreciación acumulada al final de cualquier año se obtiene sumando las anteriores, o multiplicando la producción hasta ese año por la depreciación unitaria, la que corresponde a un millón de piezas. Por ejemplo, la depreciación acumulada hasta el tercer año es:

$$(1.80 + 2.15 + 2.50)10,780 = \$69,531$$

El valor contable es igual a la diferencia entre el precio original del activo y la depreciación acumulada hasta ese año. En este caso, por ejemplo al final del tercer año, es:

$$\begin{aligned} \text{Valor en libros} &= 121,000 - 69,531 \\ &= \$51,469 \end{aligned}$$

tal como se aprecia en la última columna del cuadro anterior.

Ejemplo 2

Depreciación anual, valor contable

Una compañía editorial adquirió en 1.90 millones de dólares una rotativa para producir 20 millones de ejemplares periodísticos durante 7 años, distribuidos de la forma siguiente, en miles.

Primer año: 2,350; segundo: 2,500; tercero: 3,600; cuarto: 3,500; quinto: 3,450; sexto: 2,500 y séptimo: 2,100.

Se estima que luego de pagar por el desmantelamiento de la maquinaria, al final de los 7 años, se rescatan $400,000. Calcule la depreciación de cada año y el valor en libros al final del quinto periodo anual.

solución

a) La depreciación por cada ejemplar se obtiene sustituyendo, en la ecuación del teorema 10.1, los valores:

$$C = \$1'900{,}000, \text{ el costo original}$$

$$C_n = \$400{,}000, \text{ el valor de rescate}$$

$$n = 20'000{,}000 \text{ la producción total}$$

Entonces:

$$R = \frac{1'900{,}000 - 400{,}000}{20'000{,}000}$$

$$R = \$0.075 \quad \text{o} \quad ¢7.5$$

Significa que cada ejemplar que se produce deberá tener un cargo de 7.5 centavos por "consumo" de la rotativa; por lo tanto, la depreciación anual en miles de dólares en cada uno de los 7 años es, respectivamente:

$$2{,}350(0.075) = 176.25$$
$$2{,}500(0.075) = 187.50$$
$$3{,}600(0.075) = 270.00$$
$$3{,}500(0.075) = 262.50$$
$$3{,}450(0.075) = 258.75$$
$$2{,}500(0.075) = 187.50$$
$$2{,}100(0.075) = 157.50$$

Total: $1,500 miles o $1'500,000.

b) Para el valor en libros al final del quinto año, se resta del costo original, la depreciación acumulada hasta ese año, es decir:

$$C_5 = 1{,}900 - (176.25 + 187.50 + 270 + 262.50 + 258.75)$$

$$C_5 = 1{,}900 - 1{,}155 = 745 \text{ miles} \quad \text{o} \quad C_5 = \$745{,}000$$

Se deja como ejercicio comprobar este resultado con el cuadro de depreciación.

Depreciación con inflación

La ecuación del teorema 10.2, contempla el efecto de la inflación en la depreciación de un activo, cuando ésta es igual para todos los años de vida del activo. En el ejemplo siguiente se analiza el efecto inflacionario donde la depreciación depende de las horas de servicio, es decir, es variable.

Ejemplo 3

Depreciación anual considerando inflación

Un taxista compra un automóvil en \$185,000 y lo usa durante 4,000 horas el primer año, 4,300 el segundo, 4,100 el tercero, 4,000 el cuarto y 3,800 en el quinto. ¿De cuánto son los cargos por depreciación anual si al final lo vende en \$75,000 y se considera que su valor aumenta con la inflación del 6.6% anual?

solución

Con la inflación del 6.6%, al final del primer año el valor del automóvil en miles de dólares, será:

$$185(1.066) = 197.21$$

La depreciación en este primer año es 4,000(X), donde X es la depreciación por hora; por lo tanto, el valor contable, en miles de dólares, es:

$$C_1 = 185(1.066) - 4(X)$$

Al terminar el segundo año, esto crece otro 6.6%

$$[185(1.066) - (4)X]1.066 = 185(1.066)^2 - 4(1.066)(X)$$

y el valor en libros, restando la depreciación de ese año, en miles de dólares es:

$$C_2 = [185(1.066)^2 - 4(1.066)X] - (4.3)X$$
$$C_2 = 185(1.066)^2 - 4(1.066)X - (4.3)X$$

Al final del tercer año, esto se incrementa otro 6.6%

$$[185(1.066)^2 - 4(1.066)X - (4.3)X]\ 1.066$$

el valor contable ahora es entonces:

$$C_3 = 185(1.066)^3 - 4(1.066)^2X - 4.3(1.066)X - (4.1)X$$

Es fácil verificar que, al final de los 5 años de vida útil, el valor en libros será:

$$C_5 = 185(1.066)^5 - 4(1.066)^4\,X - 4.3(1.066)^3\,X - 4.1(1.066)^2X - 4(1.066)X - (3.8)X$$

Efectuando los productos, esto es:

$$C_5 = 254.6582509 - (5.165219836)X - (5.20882863)X - (4.6590596)X - (4.264)X - (3.8)(X)$$

o $\quad C_5 = 254.6582509 - (23.09710807)X$

Esto es igual al valor de rescate, es decir, el valor de la compraventa del automóvil, $75,000, en miles de dólares.

$$254.6582509 - (23.09710807)X = 75$$

de donde:

$$-(23.09710807)X = 75 - 254.6582509$$

$$(23.09710807)X = 179.6582509$$

$$X = 179.6582509/23.09710807$$

o $$X = \$7.778387249 \text{ por hora de servicio.}$$

La depreciación anual se obtiene multiplicando este resultado por el número de horas. Por ejemplo en el primero es:

$$R_1 = 4{,}000(7.778387249) = \$31{,}113.549$$

Esta depreciación y las siguientes se anotan en la tercera columna del cuadro de depreciación, manteniendo cuatro cifras decimales.

Fin del año	Valor con inflación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	185,000.0000
1	197,210.0000	31,113.5490	31,113.5490	166,096.4510
2	177,058.8168	33,447.0652	64,560.6142	143,611.7516
3	153,090.1272	31,891.3872	96,452.0014	121,198.7395
4	129,197.8563	31,113.5490	127,565.5508	98,084.3073
5	104,557.8716	29,557.8716	157,123.4220	75,000.0000

Nótese que para este cuadro:

- El *valor con inflación* en cada periodo es igual al valor contable del año anterior, multiplicado por 1.066, que corresponde al índice inflacionario.
- El *valor contable* de cualquier periodo es igual al valor con inflación, menos la depreciación anual.
- La *depreciación acumulada* al final del último periodo, el quinto en este caso, es igual a la depreciación total, es decir:

$$(4{,}000 + 4{,}300 + 4{,}100 + 4{,}000 + 3{,}800)(7.778387249) = 20{,}200(7.778387249) = 157{,}123.422$$

Ejercicios 10.3

1. Describa el método de las unidades de producción o de servicio para depreciar un activo y cómo se calcula la depreciación anual.
2. Obtenga la depreciación anual de un activo que costó $140,000, tiene un valor de desecho de $23,000 y la producción en sus 5 años de vida útil en miles de piezas es:

   13,500 en el primer año, 15,850 en el segundo, 13,750 en el tercero, 13,200 en el cuarto y 8,700 en el último.
3. ¿De cuánto es la depreciación anual de una computadora que costó $18,500, se estima que dará servicio 2,750 horas cada año durante cuatro años y al final se recuperarán $2,000?
4. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que costó $75,000, se deprecia $4 cada hora, el primer año da servicio durante 3,000 horas y éste se reduce un 5% cada año durante cinco años?
5. Una máquina para coser zapatos costó $88,000, tiene una vida útil de 6 años, un rescate de $20,000 y la producción anual en miles de piezas es: 35 en el primero, 32 en el segundo, 29 en el tercero, 27 en el cuarto, 26 en el quinto y 21 en el último. Obtenga la depreciación anual.
6. El fabricante de una revolvedora de concreto para la construcción recomienda hacerla trabajar 2,000 horas en el primer año y reducir este número en 100 horas, sucesivamente, cada uno de los 7 años de vida útil. ¿De cuánto es la depreciación anual si al final se rescatan $34,125 y costó $231,000?
7. El señor González compra un camión de pasajeros en 1.3 millones de dólares, lo usa durante 6 años y al final rescata $380,000. ¿Cuál es la depreciación anual si en el primer año le da 4,800 horas de servicio, 5,250 en el segundo, 4,350 en el tercero, 3,900 en el cuarto, 3,400 en el quinto y 3,300 horas en el sexto?
8. Una máquina inyectora de plásticos costó $84,000 y su valor de rescate al final de 8 años es de $10,000. ¿De cuánto es la depreciación anual si el primer año se producen 4 millones de piezas y se reduce 6% cada 2 años? Haga el cuadro de depreciación.
9. Calcule la depreciación anual de un tractor que costó $325,000, el primer año se trabaja durante 3,000 horas, y en los siguientes se reduce un 2% cada año de los 6 que tiene de vida útil. Suponga que al final se vende en un 20% de lo que costó. Haga el cuadro de depreciación.
10. Obtenga la depreciación acumulada y el valor en libros, al final de los 5 años, de una máquina que se compró en $130,000, tiene 8 años de vida útil: el primer año se producen 725,000 piezas y al final se recuperan $45,100 por la máquina. Suponga que la producción se reduce en 5,000 piezas por año.
11. Encuentre la depreciación anual de una fotocopiadora que costó $175,000 y tiene un valor de salvamento de $40,000. Considere que se obtienen 1.5 millones de copias distribuidas de la forma siguiente, durante los 6 años de vida útil.

primero: 250 mil	tercero: 300 mil	quinto: 220 mil
segundo: 270 mil	cuarto: 260 mil	sexto: 200 mil

12. Una pizzería compró una flotilla de motocicletas en $28,000 cada una. Se estima que las utilizará en 12 mil kilómetros cada año, durante los 4 años de vida útil. ¿Cuál es el valor de rescate si la depreciación por kilómetro recorrido es de 35 centavos.

13. Resuelva el problema 13, considerando que el kilometraje recorrido es de 13,000 kilómetros el primer año y éste se reduce en 5% anual.

14. Obtenga la depreciación anual de un aparato de rayos X que costó $375,000. El primer año se obtienen 4,500 radiografías, el segundo 4,300, 4,000 el tercero, 3,500 el cuarto y 3,000 el quinto. Su valor de rescate es de $85,500 y su valor aumenta con la inflación del 10% anual. Haga el cuadro.

Seleccione la opción correcta en los problemas del 15 al 25, justificando su elección.

15. Una máquina para producir artículos de plástico costó $123,200, ¿de cuánto es la depreciación del tercer año si se producen 25,000 piezas durante el primero y ésta crece a razón del 7.5% cada año? Considere 7 años de vida útil y un rescate de $48,000.

a) $11,329.63 *b*) $10,523.61 *c*) $9,889.38 *d*) $11,046.40 *e*) Otra

16. Resuelva el problema 15 si la producción anual se reduce sucesivamente 1,140 piezas.

a) $12,087.83 *b*) $9,693.45 *c*) $11,310.37 *d*) $10,429.63 *e*) Otra

17. La producción de refacciones para automóvil de un equipo que costó $425,000, en sus 6 años de vida útil es la siguiente en cientos de piezas.

Año	Producción
1	20,000
2	19,325
3	19,050
4	18,595
5	16,923
6	15,097
	Total: 108,990

¿Cuánto se deprecia en el cuarto año si el valor de rescate es de $103,385?

a) $54,871.37 *b*) $49.963.39 *c*) $57,098.03 *d*) $51,629.92 *e*) Otra

18. ¿Cuál es el valor de salvamento, es decir, de rescate, de una máquina para hacer ladrillo si costó $265,000, tiene 7 años de vida útil y el primer año se depreció $24,030 con 135,000 piezas producidas? Considere que la producción aumenta 2.3% cada año.

a) $87,603.25 *b*) $78,429.31 *c*) $80,629.33 *d*) $84,728.00 *e*) Otra

19. Resuelva el problema 18 si la producción se reduce 0.8% cada año.

a) $100,773.64 *b*) $98,729.60 *c*) $103,929.18 *d*) $108,648.86 *e*) Otra

20. ¿De cuánto es la depreciación en el segundo año, de los 10 de vida útil de una máquina para hacer tornillos, si costó $275,000, se rescatan $63,000 y la producción se incrementa 2% cada año? Considere que la producción en el último año fue de 4.5 millones de piezas.

a) $19,748.45 *b*) $20,623.40 *c*) $21,043.91 *d*) $22,329.93 *e*) Otra

21. ¿En cuánto se adquirió una fotocopiadora si el primer año se depreció $6,440.66, habiendo generado 45,000 copias? Suponga que luego de 4 años de servicio se vendió en $135,000 y el número de copias se redujo en 2% cada año.

a) $160,000 *b*) $175,400 *c*) $165,350 *d*) $182,950 *e*) Otra

22. ¿De cuánto es la depreciación en el cuarto año de un tractor que costó $375,000, el primer año se trabajó 2,950 horas y en los siguientes se reduce 3.5% cada año de los 7 que tiene de vida útil? Suponga que al final se vendió en $150,000.

a) $32,061.65 *b*) $30,625.33 *c*) $29,039.41 *d*) $31,593.09 *e*) Otra

23. El propietario de un restaurante de tortas ahogadas compró una flotilla de motocicletas para dar servicio a domicilio, con una inversión de $18,000 por cada una. Estimando que cada una hará un recorrido de 11,000 kilómetros por año durante los 3 de vida útil, ¿cuánto será el valor de rescate si la depreciación por kilómetro recorrido es de 32 centavos?

a) $6,998.00 *b*) $9,325.00 *c*) $8,160.00 *d*) $7,440 *e*) Otra

24. Resuelva el problema 23 considerando que el valor de cada unidad aumenta 3.98% anual por inflación y otros factores.

a) $11,529.62 *b*) $12,048.77 *c*) $9,903.93 *d*) $10,363.87 *e*) Otra

25. Resuelva el problema 23 suponiendo una vida de servicio de 5 años, el recorrido de cada moto se reduce 1.8% anual, y en el primero éste fue de 10,750 kilómetros.

a) $1,408.15 *b*) $3,329.38 *c*) $2,783.61 *d*) $4,129.93 *e*) Otra

26. Dado el siguiente cuadro de depreciación de un activo, obtenga su valor de rescate. Suponga que la producción anual aumenta 5.3% cada año y que tiene 6 años de vida útil.

Fin del año	Producción anual	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	150,000.00
1	12,000.00	21,321.00	21,321.00	128,679.00

a) $10,876.23 *b*) $9,063.25 *c*) $3,876.53 *d*) $5,428.03 *e*) Otra

10.4 Método de la suma de dígitos

En este método, la depreciación anual es variable. ya que es mayor en el primer año y menor en el último.

Para evaluarla, la base de depreciación ($C - C_n$) se multiplica por la fracción a/b, donde b es la suma de los dígitos que corresponden a la vida útil del activo y el numerador, a, representa el año, en orden inverso, en el que se está calculando la depreciación.

Si, por ejemplo, la vida útil de un activo es de 7 años, entonces el denominador de la fracción es:

$$b = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \quad \text{o} \quad b = 28$$

Esta suma, sobre todo cuando la vida útil es relativamente grande, puede calcularse con la ecuación del teorema 2.2 para sucesiones aritméticas. Así, la suma es:

$$S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$$

En este caso es:

$$S_7 = (7/2)(1 + 7) = 28$$

Para el numerador a de la fracción, los dígitos se reordenan en orden decreciente, es decir:

$$7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

El dígito para la primera fracción es 7, para la segunda es 6 y así sucesivamente hasta la última, cuyo numerador es 1.

En los ejemplos siguientes se aprecia mejor lo anterior.

Ejemplo 1

Depreciación con la suma de dígitos

La compañía Constructora Villapart, S. A., compró una camioneta en $220,000. Calcule la depreciación anual, con el método de la suma de dígitos, suponiendo que tiene 6 años de vida útil y un valor de rescate de $73,000.

Elabore el cuadro de depreciación correspondiente.

solución

La base de depreciación es la diferencia entre el precio original y el valor de rescate.

$$C - C_n = 220{,}000 - 73{,}000$$
$$C - C_n = 147{,}000$$

La suma de los 6 dígitos es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

El numerador de la primera fracción es 6 y el cargo por depreciación en el primer año es, por lo tanto:

$$R_1 = 147{,}000(6/21) \quad \text{o} \quad R_1 = \$42{,}000$$

Para el segundo año la fracción es $a/b = 5/21$ y la depreciación es:

$$R_2 = 147{,}000(5/21) \quad \text{o} \quad R_2 = \$35{,}000$$

Puesto que la base de depreciación, 147,000, y la suma de los dígitos, 21, son constantes, cada una puede obtenerse como se ve a continuación.

$$R_1 = (147{,}000/21)6 \quad \text{o}$$
$$R_1 = 7{,}000(6) = 42{,}000$$
$$R_2 = 7{,}000(5) = 35{,}000$$

Además:

$$R_3 = 7{,}000(4) = \$28{,}000$$
$$R_4 = 7{,}000(3) = \$21{,}000$$
$$R_5 = 7{,}000(2) = \$14{,}000$$
$$R_6 = 7{,}000(1) = \$7{,}000$$

La tabla de depreciación con las cantidades en miles de dólares es:

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	220
1	42	42	178
2	35	77	143
3	28	105	115
4	21	126	94
5	14	140	80
6	7	147	73

Valor contable

Para el valor en libros al final del k-ésimo año con el método de la suma de dígitos, se tiene que la depreciación acumulada hasta el final por ejemplo, del cuarto año, en el ejercicio anterior, en miles de dólares es:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = (147{,}000/21)(6 + 5 + 4 + 3),$$

donde el factor de la izquierda es la fracción cuyo numerador es la base de depreciación, $C - C_n$ y el denominador es la suma de los dígitos S, es decir, este primer factor es, en general, $(C - C_n)/S$.

El otro factor es igual a la suma de una serie aritmética, donde el primer término es igual a la vida útil del activo $n = 6$, la diferencia común es $d = -1$ y el número de términos es $k = 4$. Por lo tanto, la suma es:

$$S_4 = (4/2)[2(6) + (4 - 1)(-1)] \qquad S_n = (n/2)[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_4 = 2(12 - 3) \quad \text{o} \quad S_4 = 18$$

y en general este segundo factor será

$$S_k = (k/2)[2(n) + (k - 1)(-1)]$$

o

$$S_k = (k/2)(2n - k + 1)$$

La depreciación acumulada es, por lo tanto:

$$[(C - C_n)/S][(k/2)(2n - k + 1) \quad \text{o} \quad \frac{k(C - Cn)}{2S}(2n - k + 1)$$

para el valor contable, esto se resta del precio original C del activo, lo que da como resultado la ecuación del siguiente teorema.

Teorema 10.3

En el método de la suma de dígitos, el *valor contable* al final del k-ésimo año es:

$$C_k = C - \frac{k(C - C_n)}{2S}(2n - k + 1) \text{ donde}$$

C, el precio original del activo.
C_n, el valor de rescate.
S, la suma de los dígitos.
n, la vida útil del activo en años.

Nótese que el segundo término de esta fórmula corresponde a la depreciación acumulada hasta el k-ésimo año.

Ejemplo 2

Valor contable de un activo que se deprecia

¿Cuál es el valor en libros al final del quinto año en el ejemplo 1?

solución

Los valores que se sustituyen en el último teorema son:

$C = 220{,}000$, el precio de la camioneta.

$C_n = 73{,}000$, el valor del rescate.

$k = 5$, se pregunta el valor en libros al final del quinto año.

$S = 21$, la suma de los dígitos de la vida útil.

Entonces el valor contable en miles de dólares es:

$$C_5 = 220 - \frac{5(220-73)}{2(21)}\,[2(6) - 5 + 1]$$

$$C_5 = 220 - \frac{5(147)}{42}(8)$$

$$C_5 = 220 - 140 = 80$$

es decir, \$80,000, igual al que se aprecia en el cuadro anterior.

Ejemplo 3

Depreciación anual, depreciación acumulada, cuadro

El Hotel Central renueva parte de su mobiliario y equipo con una inversión de \$528,000, se supone que la vida útil es de 15 años, con valor de rescate del 20% de la inversión. Con el método de la suma de dígitos, obtenga:

a) La depreciación anual.
b) La depreciación acumulada hasta el duodécimo año.
c) El cuadro de depreciación, en sus primeros tres y dos últimos renglones.

solución

a) Con la ecuación 2.2 se obtiene la suma de los 15 dígitos

$$S_{15} = (15/2)(1 + 15) \quad \text{o} \quad S_{15} = 120$$

La fracción para la primera depreciación es, en consecuencia, 15/120.

El valor de rescate es el 20% de la inversión, esto es:

$$C_n = 0.20(528{,}000) \quad \text{o} \quad C_n = 105{,}600$$

La base de depreciación es la diferencia:

$$C - C_n = 528{,}000 - 105{,}600$$
$$C - C_n = \$422{,}400$$

La depreciación en el primer año es entonces:

$$R_1 = 422{,}400(15/120)$$
$$R_1 = (422{,}400/120)15$$
$$R_1 = 3{,}520(15) \quad \text{o} \quad R_1 = \$52{,}800$$

La del segundo es:

$$R_2 = 3{,}520(14) \quad \text{o} \quad R_2 = \$49{,}280$$

Notando que la diferencia entre estos dos valores, 3,520, es igual a la que hay entre 2 años sucesivos cualesquiera, se tiene que la del tercero es:

$$R_3 = 49{,}280 - 3{,}520 \quad \text{o} \quad R_3 = \$45{,}760$$

que también es igual a:

$$3{,}520(13) = \$45{,}760$$

Así, la depreciación de cualquier año k estará dada por la del primero, menos $(k - 1)$ diferencias, es decir:

$$R_k = 52{,}800 - (k - 1)(3{,}520)$$

Por ejemplo en el cuarto año, es:

$$R_4 = 52{,}800 - (4 - 1)(3{,}520) \quad \text{o} \quad R_4 = \$42{,}240$$

que debe ser igual a 3,520(12), porque 12 es el dígito que corresponde al cuarto año.

La depreciación del año 15, el último, es:

$$R_{15} = 52{,}800 - (15 - 1)(3{,}520) \quad \text{o} \quad R_{15} = \$3{,}520$$

b) La depreciación acumulada hasta el año 12, según la ecuación 10.3, es:

$$\frac{12(528{,}000 - 105{,}600)}{2(120)}[2(15) - 12 + 1]$$
$$= 21{,}120(19) \quad \text{o} \quad \$401{,}280$$

en tanto que la acumulada al final de la vida útil según la misma ecuación, es:

$$\frac{15(528{,}000 - 105{,}600)}{2(120)}[2(15) - 15 + 1] = 26{,}400(16) = \$422{,}400$$

que es igual a la base de depreciación, claro.

c) El cuadro de depreciación es el siguiente:

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	–	–	528,000
1	52,800	52, 800	475,200
2	49,280	102,080	425,920
3	45,760	147,840	380,160
. . .			
14	7,040	418,880	109,120
15	3,520	422,400	105,600

En el último renglón de este cuadro se anotan:

- La última depreciación anual $R_{15} = 3{,}520$ en la segunda columna.
- La depreciación acumulada, es decir, la base de depreciación $422,400, en la tercera.
- El valor de rescate, $105,600, en la última.

Para los números del penúltimo renglón se tiene que:

La depreciación anual R_{14} es igual a la suma de la última y la diferencia común.

$$R_{14} = R_{15} + d$$

$$R_{14} = 3{,}520 + 3{,}520 \qquad \text{o} \qquad R_{14} = \$7{,}040$$

Para obtener la depreciación acumulada de la última, se resta la diferencia.

$$422{,}400 - 3{,}520 = \$418{,}880$$

y para encontrar el valor contable en ese penúltimo periodo, se suma la diferencia común con el último.

$$105{,}600 + 3{,}520 = \$109{,}120$$

Depreciación con inflación en el método de la suma de dígitos

También en este método pueden combinarse la inflación y la depreciación de un activo, haciendo los cálculos de manera individual, año tras año.

Ejemplo 4

Valor de rescate de un activo, cuadro de depreciación

Supóngase que un torno costó $330,000. ¿Cuál será su valor de rescate si en el primer año se deprecia $95,000, tiene 5 años de vida útil y su valor aumenta con la inflación del 12.3% anual? Use el método de la suma de dígitos y haga el cuadro de depreciación.

solución

La suma de los cinco dígitos es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Si X es la base de depreciación, entonces la del primer año es:

$$(5/l5)X = 95{,}000 \qquad \text{o} \qquad (l/3)X = 95{,}000$$

de donde

$$X = 95{,}000(3) \qquad \text{o} \qquad X = 285{,}000$$

Con la inflación del 12.3% anual, el valor del torno al final del primer año es:

$$C'_1 = 330{,}000(1.123)$$
$$C'_1 = \$370{,}590$$

Al restar la primera depreciación, resulta que el valor al concluir el primer año es:

$$C_1 = 370{,}590 - 95{,}000$$
$$C_1 = \$275{,}590$$

En el transcurso del segundo año, esto crece 12.3%

$$C'_2 = 275{,}590(1.123)$$
$$C'_2 = 309{,}487.57$$

La depreciación en este lapso es:

$$285{,}000(4/15) = \$76{,}000$$

El valor en libros será:

$$C_2 = 309{,}487.57 - 76{,}000$$
$$C_2 = \$233{,}487.57$$

Se continúa de manera semejante hasta completar los valores que se resumen en el siguiente cuadro, que a la vez sirve para comprobar resultados, y para ver que el valor de rescate del torno es:

$$C_5 = \$197{,}117.92.$$

Fin del año	Valor con inflación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	_	_		330,000.00
1	370,590.00	95,000.00	95,000.00	275,590.00
2	309,487.57	76,000.00	171,000.00	233,487.57
3	262,206.54	57,000.00	228,000.00	205,206.54
4	230,446.95	38,000.00	266,000.00	192,446.95
5	216,117.92	19,000.00	285,000.00	197,117.92

Véase el cuadro del ejemplo 3 de la sección 10.3.

Note que el valor contable crece en el último año, mientras que en los anteriores decrece. ¿Por qué?

Ejercicios 10.4

1. Describa brevemente el método de la *suma de dígitos* para depreciar un activo. ¿Qué característica tiene?
2. ¿Cómo se determina la suma de los dígitos de la vida útil de un activo, si ésta es relativamente grande?

En los siguientes problemas, utilice el método de la suma de dígitos.

3. Una pieza de refacción de una procesadora de carnes frías cuesta $2,550, tiene 4 años de vida útil y al final se pagará $360 por maniobras de reposición. Obtenga la depreciación anual.
4. Calcule la depreciación anual de un refrigerador que cuesta $7,500, su valor de rescate es de $2,400 y tiene 5 años de vida útil.
5. Una avioneta de 13.5 millones de dólares se vende en 6.465 millones de dólares, al final de sus 6 años de vida útil, ¿cuál es la depreciación anual?
6. ¿Cuál es la depreciación anual si el nuevo propietario de la avioneta del problema 5, al final de 2 años, recibe $4.215 millones por el aparato?
7. Obtenga la depreciación anual de un edificio que, sin contar el terreno, costó 70 millones de dólares, tiene 35 años de vida útil y se considera un gasto de 5.6 millones de dólares para su demolición. ¿Cuál es el valor contable al final del décimo año?
8. El señor Padilla compra un equipo de paletería en $90,000, el fabricante le garantiza 6 años de vida útil ¿Cuál será el valor de rescate si se considera una inflación del 9.6% anual y que el primer año se depreciará $21,690? Haga un cuadro de depreciación.
9. La Alianza de Camioneros adquiere una flotilla de autobuses en 30 millones de dólares. ¿Cuál será el valor de rescate al final de 5 años si la depreciación total en el primer año es de 7.8 millones de dólares y la inflación es del 10.72% anual? Haga un cuadro de depreciación y obtenga el valor en libros al final del tercer año de su vida útil.
10. Suponiendo que un automóvil se deprecia $35,000 el primer año, costó $160,000 y su valor aumenta con la inflación del 7.2% anual, ¿en cuánto se vende 4 años después?
11. ¿Cuánto debe pedirse por una motocicleta que 4 años antes se compró en $45,000, el primer año se deprecia $5,000 y aumenta su valor con la inflación del 0.9% mensual? *Sugerencia:* Obtenga la tasa de inflación anual equivalente, con la ecuación del teorema 4.2.
12. Una máquina procesadora de legumbres cuesta $82,050 y el primer año de su vida útil, que es de 6 años, se deprecia un 10%. ¿Cuál es su valor de rescate o compraventa si se considera una inflación del 3.8% semestral? Halle la depreciación acumulada al final del tercer año. Vea la sugerencia del problema 11.
13. Elabore el cuadro de depreciación de un camión que el tercer año se deprecia $21,000, costó $225,000. Considere 7 años de vida útil. ¿Cuál es su valor de rescate?

14. ¿Cuál es el valor en libros al término del sexto año de un activo que se deprecia $144,000 en sus 8 años de vida útil, si costó $200,000? ¿Cuál es su valor de rescate?

15. Un tractor que se deprecia $12,000 en el cuarto año de su vida útil, costó $325,000. ¿En cuánto se vende 5 años después de su compra si su valor crece con la inflación del 13% anual?

16. El precio original de una retroexcavadora fue de 1.65 millones de dólares; en el primer año se depreció $450,000 y su valor aumenta con la inflación del 1.4% por trimestre. ¿Cuánto debe pedirse al venderla 6 años después? ¿De cuánto es la depreciación acumulada hasta el cuarto año? *Sugerencia:* Vea el problema 11.

Justificando su elección, en los problemas 17 al 32 seleccione la opción correcta.

17. ¿Cuánto se deprecia durante su tercer año de vida útil un edificio que costó 32 millones de dólares, excluido el terreno, tiene 30 años de vida útil y se considera un gasto de 1.78 millones de dólares para su demolición?

a) $2’121,087.95 *b*) $2’034,064.52 *c*) $1’978,423.23 *d*) $1’802,728.47 *e*) Otra

18. La refacción para una procesadora de alimentos cuesta $12,750 y el primer año de su vida útil, que es de 4 años, se deprecia un 8%. ¿Cuál es su valor de rescate?

a) $9,682.00 *b*) $11,424.00 *c*) $9,800 *d*) $10,200 *e*) Otra

19. Un yate que costó 2.53 millones de dólares, se vende en 1.25 millones de dólares después de 5 años de usarlo. ¿Cuánto se deprecia durante el cuarto año?

a) $150,728.43 *b*) $170,666.67 *c*) $165,921.43 *d*) $171,428.51 *e*) Otra

20. ¿Cuánto se rescata por un refrigerador que costó $16,390 después de 8 años de usarlo? Suponga que el primer año se deprecia $1,950.

a) $9,048.00 *b*) $10,625 *c*) $8,960 *d*) $7,615 *e*) Otra

21. En el problema 20, ¿cuánto se deprecia el refrigerador durante el quinto año?

a) $975 *b*) $840 *c*) $920 *d*) $865 *e*) Otra

22. El señor Ruiz compró un tractor de $656,000, que el primer año se deprecia $74,000. ¿En cuánto deberá venderlo 6 años después?

a) $306,000 *b*) $397,000 *c*) $365,000 *d*) $428,900 *e*) Otra

23. Resuelva el problema 22, considerando que el valor del tractor se incrementa 6.8% cada año.

a) $705,429.08 *b*) $683,028.41 *c*) $649,459.85 *d*) $624,323.61 *e*) Otra

24. ¿Cuál es el valor contable al término del quinto año de un activo que se deprecia $135,000 en sus 7 años de vida útil? Suponga que costó $190,000 y su valor aumenta con la inflación un 7% anual.

a) $124,106.45 *b*) $142,035.55 *c*) $115,629.15 *d*) $130,615.92 *e*) Otra

25. ¿Cuál es el valor de desecho del activo del problema 24?

a) $126,950.19 *b*) $117,429.61 *c*) $135,129.38 *d*) $144,609.62 *e*) Otra

26. ¿En cuánto debe vender su camioneta el señor Partida cuatro años después de que la compró en $380,000? Considere que en el primer año se depreció $78,000 pero su valor aumenta 7.3% cada año.

a) $295,673.92 *b*) $278,653.14 *c*) $302,429.63 *d*) $295,968.03 *e*) Otra

27. ¿A cuánto asciende la depreciación acumulada hasta el cuarto año, de la camioneta del señor Partida, considerando que no aumenta su valor?

a) $182,000 *b*) $190,000 *c*) $203,000 *d*) $195,000 *e*) Otra

28. Para combatir a la delincuencia organizada, el gobierno del Estado compra un helicóptero en $3’750,000. ¿En cuánto lo venderá 5 años después si considera que el tercer año se deprecia $178,000 y su valor aumenta con la inflación un 0.45% cada bimestre?

a) $3’333,888.21 *b*) $2’960,429.38 *c*) $1’803,421.03 *d*) $3’560,838.92 *e*) Otra

29. La benemérita Cruz Roja compró un vehículo, es decir, una ambulancia, que el primer año se deprecia $242,000. ¿Cuánto deberá pedir por ella 7 años después si sabe que su valor original, $2’350,000, aumenta 3.8% cada semestre?

a) $2’362,429.61 *b*) $1’903,648.98 *c*) $1’788,417.42 *d*) $1’930,820.45 *e*) Otra

30. ¿De cuánto es la depreciación durante el tercer año de la ambulancia en el problema 29?

a) $201,049.62 *b*) $172,857.14 *c*) $190,486.61 *d*) $186,429.08 *e*) Otra

31. Un equipo para hacer paletas cuyo precio original fue de $75,260 se deprecia $5,190 durante el primer año. ¿En cuánto debe venderse 6 años después? Considere que su precio aumenta 2.2% cada año.

a) $66,215.16 *b*) $75,429.50 *c*) $81,329.63 *d*) $70,685.42 *e*) Otra

32. ¿Cuántos años después de que compró una camioneta en $275,000, se venderá en $137,207.00 si se considera que a 8 años de la compra se vendería en $116,946.60, el primer año se deprecia $48,800 y su valor crece un 4.3% anual?

a) 4 años *b*) 7 años *c*) 5 años *d*) 3 años *e*) Otra

10.5 Método de la tasa fija

También en este método la depreciación anual, decrece con el tiempo, ya que se evalúa mediante un porcentaje fijo sobre el valor en libros del año que precede, y éste disminuye en cada periodo.

Para llegar a una fórmula genérica, obsérvese lo siguiente:

Al precio original del activo se le ha llamado C y éste será el valor contable de un supuesto año cero. Si d en la tasa anual de depreciación, entonces en el primer año el activo se depreciará $C(d)$ dólares y el valor contable al finalizar el primer año será:

$$C_1 = C - C(d)$$

o $$C_1 = C(1 - d) \quad \text{se factoriza } C.$$

La depreciación en el segundo año depende de C_1 y está dada por $C_1(d)$, por lo que el valor contable al término del segundo año es:

$$C_2 = C_1 - C_1(d)$$

o $$C_2 = C_1(1 - d) \qquad x - xy = x(1 - y)$$

Puesto que $C_1 = C(1 - d)$, al reemplazar queda:

$$C_2 = [C(1 - d)](1 - d)$$

o $$C_2 = C(1 - d)^2$$

La depreciación en el tercer periodo anual es $C_2(d)$ y el valor contable es:

$$C_3 = C_2 - C_2(d) \quad \text{o} \quad C_3 = C_2(1- d)$$

Al sustituir el valor de C_2 por $C(l - d)^2$, queda:

$$C_3 = [C(l - d)^2](1- d)$$
$$C_3 = C(l- d)^2(1- d)$$
$$C_3 = C(1 - d)^3\text{, se suman los exponentes.}$$

Continuando de esta manera, se verá que al final del k-ésimo año, el valor contable es

$$C_k = C(1 - d)^k$$

ya que el exponente de $(1–d)$ es igual al subíndice de C.

También es cierto que el valor en libros al final de la vida útil, cuando k es igual a n, es:

$$C_n = C(1 - d)^n$$

Para despejar d, la tasa de depreciación, se dividen los dos lados de la ecuación entre C, se saca raíz enésima y se resta la unidad, es decir:

$$C_n/C = (1 - d)^n$$

$$\sqrt[n]{C_n/C} = 1 - d$$

$$\sqrt[n]{C_n/C} - 1 = -d \quad \text{o} \quad d = 1 - \sqrt[n]{C_n/C}$$

En el teorema siguiente, se formula lo anterior.

Teorema 10.4

El valor contable C_k, de un activo que se deprecia con el ***método de tasa fija***, al final del k-ésimo año, es:

$$C_k = C(1 - d)^k,$$

donde C, es el precio original

d, es la tasa de depreciación anual y está dada por $d = 1 - \sqrt[n]{C_n/C}$

Además, $R_1 = Cd$, es la depreciación del primer año y en cualquier periodo, la suma de la depreciación acumulada y el valor contable, es igual al valor original del activo.

Nótese que: Si el valor de rescate es nulo, $C_n = 0$, entonces la tasa de depreciación anual sería:

$$d = 1 - \sqrt[n]{0} \qquad \text{o} \qquad d = 1$$

Esto indica que el activo se depreciaría un 100%, es decir, totalmente, en su primer año de vida útil, lo cual no es razonable; para eludir esta situación, simplemente se considera que $C_n = 1$ en la fórmula anterior, tal como se aprecia en el segundo ejemplo. Además, el valor de rescate debe ser positivo, porque de otra manera la raíz será imaginaria cuando n sea un número par, o si es impar la tasa resultará mayor que el 100%, lo que tampoco tiene sentido.

Ejemplo 1

Depreciación anual, acumulada y cuadro de depreciación

Con el método de la tasa fija, obtenga la depreciación anual de un activo que costó \$150,000, tiene \$25,000 como valor de rescate y 8 años de vida útil. Calcule la depreciación acumulada hasta el final del sexto año y haga el cuadro de depreciación.

solución

a) En primer lugar, se obtiene la tasa de depreciación d con la segunda ecuación del teorema 10.4 y los valores siguientes:

$C = 150{,}000$, el valor original del activo

$C_n = 25{,}000$, el valor de rescate

$n = 8$ años, la vida útil del activo, entonces

$$d = 1 - \sqrt[8]{25{,}000/150{,}000}$$

$$d = 1 - 0.799339167$$

$$d = 0.200660833 \quad \text{o} \quad 20.066\%, \text{ aproximadamente}$$

La depreciación en el primer año es, por lo tanto:

$$R_1 = \$150{,}000(0.200660833) \qquad \text{o} \qquad R_1 = \$30{,}099.12492$$

que se resta del costo original para obtener el valor en libros al final del primer año, es decir:

$$C_1 = 150{,}000 - 30{,}099.12 \qquad \text{o} \qquad C_1 = \$119{,}900.88$$

La depreciación del segundo año es:

$$R_2 = 119{,}900.88(0.200660833)$$

$$R_2 = \$24{,}059.41, \text{ redondeando.}$$

Se continúa, de manera semejante, para obtener la depreciación anual y el valor en libros de los años restantes. Esto se resume en el cuadro que se presenta en el inciso *c* de este problema.

b) Para la depreciación acumulada, se encuentra primero el valor contable, al final del sexto periodo anual, con la primera ecuación del teorema 10.4

$$C_6 = 150,000(1- 0.200660833)^6 \qquad C_k = C(1- d)^k$$
$$C_6 = 150,000(0.26084743)$$
$$C_6 = \$39,127.11$$

Por lo tanto, la depreciación acumulada hasta el sexto año es.

150,000 – 39,127.11 = $110,872.89, que puede obtenerse y comprobarse con el cuadro de depreciación que sigue

c) El cuadro de depreciación es el siguiente, que se inicia anotando el costo original en la última columna, y la depreciación anual R_1, la del primer año, en la segunda y la tercera. Sirve para comprobar los resultados anteriores.

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	150,000.00
1	30,099.12	30,099.12	119,900.88
2	24,059.41	54,158.53	95,841.47
3	19,231.63	73,390.06	76,609.84
4	15,372.59	88,762.75	61,237.25
5	12,287.92	101,050.67	48,949.33
6	9,822.21	110,872.88	39,127.12
7	7,851.28	118,724.16	31,275.84
8	6,275.84	125,000.00	25,000.00

Nótese que:

a) La depreciación acumulada al final es igual a la base de depreciación $C - C_n = \$125,000$, y el último valor en libros es igual al valor de rescate.

b) En el renglón del periodo 6 están la depreciación acumulada y el valor contable que se obtuvieron antes.

Ejemplo 2

Depreciación anual y cuadro, método de tasa fija

Suponga que una caldera costó \$4’655,000, tiene 15 años de vida útil y su valor de rescate es nulo. Con el método de tasa fija, obtenga los cargos por depreciación anual y el cuadro de depreciación.

solución

Para la tasa de depreciación d, se utiliza la segunda ecuación del teorema 10.4, pero con $C_n = 1$ en lugar de cero, esto es:

$$d = 1 - \sqrt[15]{1/4'655{,}000}$$

$$d = 1 - 0.359312248$$

$$d = 0.640687752 \quad \text{o} \quad 64.069\% \text{ aproximadamente.}$$

En el primer año, la depreciación es entonces:

$$R_1 = 4'655{,}000(0.640687752)$$

$$R_1 = \$2'982{,}401.487$$

y el valor contable es:

$$C_1 = 4'655{,}000 - 2'982{,}401.487 \quad \text{o} \quad C_1 = \$1'672{,}598.513$$

Para el segundo periodo anual, la depreciación es:

$$R_2 = 1'672{,}598.513(0.640687752)$$

$$R_2 = \$1'071{,}613.382$$

y el valor en libros es:

$$C_2 = 1'672{,}598.513 - 1'071{,}613.382$$

$$C_2 = \$600{,}985.131$$

De la misma forma, se obtienen los valores restantes, y todos se escriben en el cuadro siguiente, observando que, como se hizo con el desarrollo de la fórmula del teorema 10.4, el valor contable C_k de cualquier periodo es igual al anterior, C_{k-1}, multiplicado por la diferencia $(1 - d)$, que en este ejercicio es:

$$1 - d = 1 - 0.640687752 = 0.359312248$$

Así, por ejemplo, el tercero es:

$$C_3 = C_2(1 - d)$$

$$C_3 = 600{,}985.131(0.359312248) \quad \text{o} \quad C_3 = 215{,}941.3182$$

tal como se aprecia en el mismo cuadro.

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	–	–	4’655,000.00
1	2’982,401.49	2’982,401.49	1’672,598.51
2	1’071,613.38	4’054,014.87	600,985.13
3	385,043.81	4’439,058.68	215,941.32
4	138,350.96	4’577,409.64	77,590.36
5	49,711.19	4’627,120.83	27,879.17
6	17,861.84	4’644,982.67	10,017.33
7	6,417.98	4’651,400.65	3,599.35
8	2,306.06	4’653,706.71	1,293.29
9	828.60	4’654,535.31	464.69
10	297.72	4’654,833.03	166.98
11	106.98	4’654,940.00	60.00
12	38.44	4’654,978.45	21.55
13	13.81	4’654,997.26	7.74
14	4.96	4’654,997.22	2.78
15	1.78	4’654,999.00	1.0

Dos cosas pueden apreciarse en este ejemplo:

La depreciación anual es muy alta en los primeros años de la vida útil y, por lo mismo, el valor del activo, es decir, su valor contable decrece muy rápidamente. Ambas son consecuencia de que la tasa de depreciación es elevada.

Depreciación de tasa fija con inflación

Considerar la inflación en este método es sumamente fácil, ya que para evaluar la depreciación anual, puede utilizarse la ecuación del teorema 10.4, con una tasa que sea igual a la diferencia entre las dos, la de inflación y la de depreciación. Esto es válido, porque se considera que los dos actúan simultáneamente, ya que de otra forma tendría que evaluarse año por año.

Si la tasa de inflación i es mayor que la de depreciación d, entonces el valor contable del activo crecerá con el paso de los años, y el factor $(1 - d)$ de la fórmula será mayor que 1; en caso contrario, será menor que la unidad, y el valor contable decrecerá.

También es cierto que si la tasa de inflación no se da en periodos anuales, antes deberá encontrarse la tasa anual equivalente, es decir la tasa efectiva con la ecuación del teorema 4.2.

$$e = (1+i/p)^p - 1$$

donde e corresponde a la tasa de inflación anual, equivalente a la inflación i/p que no es anual.

Ejemplo 3

Valor de rescate y cuadro considerando inflación

¿En cuánto deberá vender su automóvil la profesora Verónica 5 años después de que lo compró en $125,000 si se considera que se deprecia con un porcentaje fijo del 15% anual y la inflación ha sido del 1.5%, mensual en promedio? Haga el cuadro de depreciación.

solución

La tasa de inflación anual equivalente al 1.5% mensual es:

$$i = (1 + 0.015)^{12} - 1 \qquad i/p = 0.015 \qquad \text{y} \qquad e = (1 + i/p)^{np} - 1$$

$$i = 1.195618171 - 1$$

$$i = 0.195618171 \qquad \text{o} \qquad 19.5618\% \text{ aproximadamente.}$$

Puesto que es mayor que la de depreciación, el activo aumentará su valor con una tasa dada por:

$$0.195618171 - 0.15 = 0.045618171$$

Entonces el valor contable, es decir, el precio de compraventa 5 años después de haberlo comprado, será:

$$C_5 = 125{,}000(1 + 0.045618171)^5$$

$$C_5 = 125{,}000(1.249872203)$$

$$C_5 = \$156{,}234.03$$

El cuadro de depreciación se inicia anotando en la última columna el precio original del activo.

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	–	–	125,000.0000
1	–5,702.2714	–5,702.2714	130,702.2714
2	–5,962.3986	–11,664.6700	136,664.6700
3	–6,234.3923	–17,899.0623	142,899.0623
4	–6,518.7939	–24,417.8562	149,417.8562
5	–6,816.1693	–31,234.0254	156,234.0255

La "depreciación" del primer año es:

$$R_1 = 125{,}000(0.045618171)$$
$$R_1 = 5{,}702.271375$$

que se anota en la segunda y tercera columnas con signo negativo, porque el valor en libros crece.

$$C_1 = 125{,}000 - (-5{,}702.2714)$$
$$C_1 = 130{,}702.2714$$

La del segundo periodo anual es:

$$R_2 = 130{,}702.2714(0.045618171)$$
$$R_2 = 5{,}962.398567$$

Por lo tanto:

$$C_2 = 130{,}702.2714 - (-5{,}962.3986)$$
$$C_2 = \$136{,}664.67$$

Las restantes se obtienen de forma semejante quedando como se observa en el mismo cuadro.

Ejemplo 4

Resuelva el ejemplo 3 considerando que la inflación es del 9% anual.

solución

En este caso la inflación es menor que la depreciación, el valor del automóvil se reduce con el tiempo con la tasa:

$$d = 0.15 - 0.09 = 0.06$$

Entonces el precio de compraventa será:

$$C_5 = \$125{,}000(1 - 0.06)^5$$
$$C_5 = \$125{,}000(0.733904022) \quad \text{o} \quad C_5 = \$91{,}738$$

Note que:
El signo dentro del paréntesis $(1 - d)$ es negativo cuando el precio se reduce, es decir, cuando la inflación es menor que la depreciación, y es positivo $(1 + d)$ si el valor del activo se incrementa con el tiempo, cuando la inflación es mayor que la depreciación.

Ejemplo 5

Precio original de un activo que se deprecia

¿Cuál es el precio original de un helicóptero que el gobierno del estado vende en 10.5 millones de dólares, suponiendo que se ha depreciado 16% cada año y que su valor crece con la inflación del 3.5% por trimestre? Suponga que se compró 6 años antes.

solución

La tasa de inflación anual que corresponde al 3.5% trimestral, puesto que cuatro trimestres tiene el año, es:

$$i = (1 + 0.035)^4 - 1$$

$$i = 1.147523001 - 1$$

$$i = 0.147523001$$

Como ésta es menor que la tasa de depreciación, el activo redujo su valor con la tasa:

$$d = 0.16 - 0.147523001 = 0.012476999$$

Además: $C_k = C_6 = 10.5$ millones de dólares el precio de venta y $k = n = 6$ años, la vida útil del activo

y
$$1 - d = 1 - 0.012476999$$

$$1 - d = 0.987523001$$

La incógnita es C, el precio original. Entonces:

$$10.5 = C(0.987523001)^6 \qquad C_k = C(1 - d)^k$$

$$10.5 = C(0.927434653)$$

de donde:

$$C = 10.5/0.927434653$$

$$C = 11.32155238 \text{ millones.}$$

Lo que quiere decir que el precio original del helicóptero fue:

$$C = \$11'321,552.38$$

Ejercicios 10.5

1. Describa brevemente el método de la tasa fija para depreciar un activo.
2. ¿Cuál es la fórmula para encontrar la tasa de depreciación anual?
3. ¿Cómo afecta la inflación a la depreciación de activos en el método de la tasa fija?

En los siguientes problemas, utilice el método de la tasa fija para depreciar un activo.

4. Una planta de luz costó $48,000, tiene vida útil de 7 años y al final se rescatan $10,500; halle la depreciación anual y haga un cuadro de depreciación.
5. Obtenga la depreciación anual de un activo que costó $150,000, tiene 6 años de vida útil y un valor de rescate de $37,500.
6. Una compresora con 5 años de vida útil se deprecia un 25% anual. ¿Cuál es su valor de rescate si costó $95,000?
7. ¿Cuánto costó una lancha que 6 años después se vende en $75,000 y se deprecia con el 18% anual?
8. Encuentre la depreciación en los primeros 3 años y el último de un activo que costó $250,000 y 15 años después se vende en $75,000.
9. ¿Cuál es el valor en libros al final del quinto año de un activo cuyo precio original fue de $725,000 y 10 años después se recupera un 20% de lo que costó?
10. El administrador de un hotel vende su automóvil en $1l2,000. ¿Cuánto le costó 5 años antes si se deprecia un 18% anual y la inflación ha sido del 20% por año?
11. ¿Cuánto debe pedir por su motocicleta el señor Andrade si 4 años antes le costó $60,000, se deprecia 13% cada año y la inflación ha sido del 7% semestral en promedio? *Sugerencia:* Obtenga la tasa de inflación anual equivalente.
12. Teresa compró un refrigerador en $6,900. ¿En cuánto deberá venderlo 4 años después si se deprecia 23% anual y su valor crece con la inflación del 3% cada bimestre? *Sugerencia:* Obtenga la tasa de inflación anual equivalente.
13. Un departamento se vende en $165,000. ¿Cuál fue su precio original 12 años antes si se ha depreciado un 10% anual y su valor ha aumentado con la inflación del 2.8% por bimestre? Vea la sugerencia del problema 12.
14. Un camión que costó $425,000 se deprecia 18% anual durante 5 años. ¿Cuál es su valor de rescate considerando que su valor aumenta con la inflación del 2% mensual? Vea la sugerencia del problema 12.
15. Una compañía internacional de aseo público compró varios camiones para la recolección de basura en 6.35 millones de dólares. Obtenga la depreciación anual durante los 6 años de vida útil, suponiendo que al final rescata $750,000. ¿Cuál es el valor en libros al final del cuarto año?

16. En el problema 15, ¿cuál es la tasa de depreciación anual si la inflación es del 15% anual?

17. La Urbanizadora del Sureste compra una motoconformadora en $450,000. ¿Cuál será su valor de rescate 5 años después si se deprecia 14.3% anual y su valor crece con la inflación del 5.2% por cuatrimestre. Obtenga la tasa de inflación anual equivalente y haga un cuadro de depreciación.

18. ¿Cuál será el valor de rescate de un horno industrial 7 años después si ahora cuesta $246,000, se deprecia 13% anual y su valor crece con la inflación del 5% por semestre?

19. Ana Lilia compró un automóvil usado en $75,000. ¿En cuánto deberá venderlo 3 años después si se deprecia 19% anual, y su valor aumenta con la inflación del 1.8% por mes?

Selecciona la opción correcta en los problemas 20 al 32, justificando su elección.

20. Carlos compró una camioneta en $235,000. ¿Cuánto deberá pedir por ella 4 años después si se considera que su valor aumenta con la inflación del 1.5% bimestral y se deprecia con una tasa del 18% anual?

a) $198,763.42 *b*) $206,429.31 *c*) $163,604.10 *d*) $170,043.88 *e*) Otra

21. ¿Cuál será el valor de rescate de un torno 6 años después si ahora cuesta $275,000, se deprecia 12.5% anual y su valor se incrementa 7.2% cada semestre en promedio?

a) $317,395.39 *b*) $298,603.48 *c*) $325,618.08 *d*) $305,503.08 *e*) Otra

22. Un camión de volteo que costó $450,000 se deprecia 16% cada año durante 6 años. ¿Cuál es su valor de rescate si su valor aumenta 1.6% cada bimestre por inflación y otros factores?

a) $310,288.67 *b*) $318,831.40 *c*) $293,362.45 *d*) $312,213.53 *e*) Otra

23. La urbanizadora Construrba compra maquinaria en $4'756,000 y la vende 4 años después. Suponiendo que se deprecia 8% cada año en promedio, ¿en cuánto la vende?

a) $3'042,629.61 *b*) $3'407,164.92 *c*) $2'999,421.61 *d*) $3'693,900.32 *e*) Otra

24. ¿Cuánto debe pedir por su maquinaria la urbanizadora del problema 23 si sabe que su valor crece con la inflación del 0.7% cada mes?

a) $4'896,610.61 *b*) $4'090,368.54 *c*) $3'858,453.27 *d*) $4'425,528.09 *e*) Otra

25. ¿De cuánto será la depreciación anual en el segundo año de un camión recolector de basura, considerando que el precio original fue de $980,000 y cinco años después se vende en $350,000?

a) $140,963.31 *b*) $153,351.98 *c*) $148,440.51 *d*) $135,531.63 *e*) Otra

26. Resuelva el problema 25 considerando que el valor del camión se incrementa un 2% cada trimestre.

a) $91,066.27 *b*) $86,429.92 *c*) $113,411.12 *d*) $97,861.16 *e*) Otra

27. En $425,000 se vende un departamento, ¿cuál fue su precio original 10 años antes, considerando que se deprecia con el 5% fijo anual en promedio?

a) $709,827.59 *b*) $687,786.68 *c*) $723,372.09 *d*) $712,217.63 *e*) Otra

28. ¿Cuál será el precio actual del departamento del problema 27 si se supone que su valor aumenta 3.5% cada semestre?

a) $861,408.80 *b*) $920,693.42 *c*) $915,519.95 *d*) $875,724.00 *e*) Otra

29. ¿Cuánto debe pedir por su Pick Up el señor Valdivia si 5 años antes le costó $243,000 y se deprecia 9.3% anual en promedio?

a) $163,529.36 *b*) $128,821.43 *c*) $155,527.75 *d*) $149,156.68 *e*) Otra

30. Resuelva el problema 29 considerando que el valor de la camioneta aumenta 3.2% en promedio cada cuatrimestre.

a) $271,175.98 *b*) $243,629.98 *c*) $250,508.41 *d*) $237,731.47 *e*) Otra

31. ¿Cuánto costó un tractor que 6 años después se vendió en $195,000, depreciándose con una tasa fija del 11% anual en promedio?

a) $392,368.90 *b*) $405,514.41 *c*) $387,795.09 *d*) $400,968.93 *e*) Otra

32. ¿En cuánto se venderá el tractor del problema 31 si su valor crece un 4% cada semestre en promedio?

a) $312,243.57 *b*) $330,080.31 *c*) $296,697.61 *d*) $322,508.83 *e*) Otra

10.6 Método del fondo de amortización

En este método se presentan dos valores para la depreciación, la *depreciación anual R* (que es constante y se deposita, se supone, en un fondo que se constituye para reemplazar el activo al terminar su vida útil) y la *depreciación neta* (que es variable, porque incluye los intereses de *R*, se acumula y está directamente relacionada con el valor contable al final de cualquier periodo).

A diferencia de otros sistemas, en éste los intereses se evalúan con base en la depreciación acumulada y no en el valor en libros.

Se parte del supuesto de que el valor acumulado de los *n* depósitos de *R* dólares cada uno es igual a la depreciación total, $C - C_n$, es decir, la *base de depreciación*, y es igual al acumulado en el fondo para la reposición del activo.

La gráfica de la figura 10.1, donde cada rectángulo es un periodo anual, ilustra la situación. Ahí se aprecia que se trata de una anualidad ordinaria, con rentas anuales *R* y el monto acumulado igual a $C - C_{n.}$

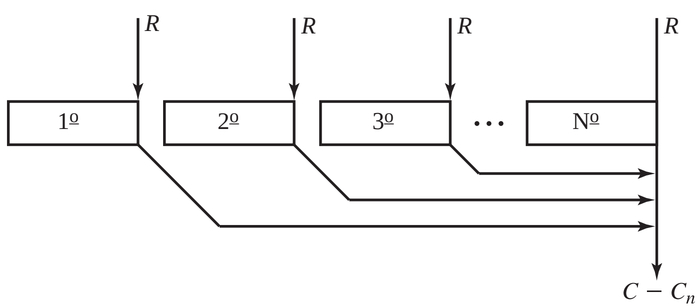


FIGURA 10.1

Quiere decir que puede emplearse la ecuación del teorema 5.4 para realizar los cálculos, ésta es:

$$M = R\left[\frac{(1+i/p)^{np}-1}{i/p}\right]$$

En este caso, se dijo, el monto es $M = C - C_n$.

La frecuencia de conversión y de pagos es $p = 1$, porque son anuales, en tanto que la tasa i representa la tasa de depreciación que se ha llamado con d; por lo tanto, al sustituir en la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$C - C_n = R\left[\frac{(1+d)^n-1}{d}\right]$$

Para despejar R, la depreciación anual, los dos miembros de esta ecuación se multiplican por d y se dividen entre $(1 + d)^n - 1$. Es decir,

$$(C - C_n)d = R[(1+d)^n - 1 \quad \text{o}$$

$$\frac{(C - C_n)d}{(1+d)^n - 1} = R$$

que se formula en el teorema siguiente.

Teorema 10.5

La depreciación anual R, en el *método del fondo* de amortización, está dada por

$$R = \frac{(C - C_n)d}{(1+d)^n - 1}$$

donde, como antes:

- C, el precio original del activo.
- C_n, el valor de rescate.
- d, la tasa de depreciación anual.
- n, la vida útil del activo en años.

Ejemplo 1

Depreciación anual y cuadro, método del fondo

La Escuela de Contaduría adquirió equipo de computación en \$450,000. Evalúe la depreciación anual con el método del fondo de amortización, considerando que al final de 5 años se recuperan \$60,000 por el equipo y la tasa para la depreciación es del 25% anual. Haga el cuadro de depreciación correspondiente.

solución

Los valores para sustituir en la ecuación 10.5 son:

C = 450,000, el precio original.

C_n = 60,000, el valor de rescate.

d = 0.25, la tasa de depreciación anual.

n = 5 años, la vida útil del activo.

Entonces,

$$R = \frac{(450,000 - 60,000)(0.25)}{(1+0.25)^5 - 1}$$

$$R = \frac{(390,000)(0.25)}{3.051757812 - 1}$$

$$R = \frac{97.500}{2.051757812}$$

$$R = \$47,520.22847$$

Como se aprecia en la figura 10.1, la primera renta está al final del primer año, por eso no devenga intereses, consecuentemente la depreciación neta y la acumulada son iguales a la depreciación anual R en este primer periodo. Las tres se escriben en el segundo renglón de las tres columnas del cuadro, que a diferencia de los anteriores consta de 6 columnas.

Contrariamente al primero, en el segundo periodo ya hay intereses, que se agregan a R para obtener la *depreciación neta*. Estos intereses son:

$$I_2 = 47,520.22847(0.25) = \$11,880.05712$$

y la depreciación neta:

$$47,520.22847 + 11,880.05712 = \$59,400.28559$$

Para la depreciación acumulada al final del segundo periodo anual, se suma esta depreciación neta a la depreciación R del primer año, es decir:

$$47,520.22847 + 59,400.28559 = \$106,920.5141$$

Los intereses I_2, la depreciación neta y la acumulada se anotan en el tercer renglón del cuadro siguiente en las columnas que corresponden.

Para el valor contable de cualquier periodo, se resta la depreciación acumulada, del precio original C del activo. También puede obtenerse restando la depreciación neta, del valor en libros anterior, claro.

Para los intereses del tercer periodo, la depreciación acumulada anterior se multiplica por la tasa d.

$$I_3 = 106,920.5146(0.25) = \$26,730.12853$$

que se suman a la depreciación fija R, para obtener la neta del tercer periodo.

$$47{,}520.22847 + 26{,}730.12853 = 74{,}250.357$$

Ésta se anota en la cuarta columna del tercer renglón del cuadro, que al final queda como:

Fin del año	Depreciación anual	Intereses	Depreciación neta	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	–	450,000.0000
1	47,520.2285	0	47,520.2285	47,520.2285	402,479.7715
2	47,520.2285	11,880.0571	59,400.2856	106,920.5141	343,079.4859
3	47,520.2285	26,730.1285	74,250.3570	181,170.8711	268,829.1289
4	47,520.2285	45,292.7178	92,812.9463	273,983.8174	176,016.1826
5	47,520.2285	68,495.9543	116,016.1828	390,000.0000*	60,000.0000

*Se ajusta para cerrar el valor de rescate en 60,000.0000.

Importante

- La depreciación neta al final de cualquier periodo anual es igual a la suma de la depreciación fija anual R y los intereses de la depreciación acumulada del periodo que le precede. Por ejemplo,

  $R_4 = R + (R_1 + R_2 + R_3)d = 47{,}520.2285 + (47{,}520.2285 + 59{,}400.2856 + 74{,}250.357)\ 0.25$
  $= 92{,}812.95$
- Los intereses de cualquier periodo se obtienen multiplicando la depreciación acumulada anterior por la tasa anual d.
- La depreciación acumulada es igual a la suma de la neta y la acumulada anterior.

Valor contable

La depreciación anual, R, es una cantidad fija que supuestamente se deposita, se dijo, en un fondo al final de cada año. El monto, es decir, la depreciación acumulada en dicho fondo, hasta el término de cualquier año k, puede evaluarse, por lo tanto, con la misma fórmula del teorema 5.4, pero con $np = k$ e $i/p = d$, es decir, con:

$$D.A. = R\left[\frac{(1+d)^k - 1}{d}\right]$$

Por ejemplo, al final del tercer año en el ejemplo 1, la depreciación acumulada es:

$$D.A. = 47{,}520.2285\left[\frac{(1+0.25)^3-1}{0.25}\right]$$

$$= 47{,}520.2285(3.8125) \quad \text{o} \quad D.A. = \$181{,}170.8712$$

que es prácticamente igual al valor que se observa en el cuadro anterior.

Puesto que el valor en libros al final de cualquier año es igual a la diferencia entre el precio original y la depreciación acumulada, al final del tercer año en el mismo ejemplo 1 es:

$$450{,}000 - 181{,}170.8712 = \$268{,}829.1288$$

como también se observa en el cuadro.

Ejemplo 2

Valor contable de un activo que se deprecia

¿Cuál es el valor contable de un equipo que la universidad compró 10 años antes en \$660,000 para el laboratorio de resistencia de materiales? Suponga que después de sus 15 años de vida útil se rescatará un 25% del precio original, se deprecia con el método del fondo de amortización y una tasa anual del 14%.

solución

Se necesita la depreciación anual R, que se obtiene sustituyendo en el teorema 10.5 los valores siguientes:

$C = 660{,}000$, el valor original

$C_n = 0.25(660{,}000)$ o $C_n = 165{,}000$, el valor de rescate.

$d = 0.14$, la tasa de depreciación anual.

$n = 15$, la vida útil del activo en años.

Entonces:

$$R = \frac{(660{,}000-165{,}000)(0.14)}{(1+0.14)^{15}-1}$$

$$R = \frac{69{,}300}{6.137937978} \quad \text{o} \quad R = \$11{,}290.43667$$

La depreciación acumulada hasta el final del décimo año es entonces:

$$D.A. = 11{,}290.43667\left[\frac{(1+0.14)^{10}-1}{0.14}\right]$$

$$D.A. = 11{,}290.43667(19.3372951) \quad \text{o} \quad D.A. = \$218{,}326.5057$$

Consecuentemente, el valor contable es:

$$\$660,000 - \$218,326.5057 = \$441,673.4943$$

Depreciación con inflación en el método del fondo de amortización

Como en el método anterior, en éste la inflación y la depreciación se contrarrestan, por eso se restan las dos tasas anuales para efectuar los cálculos. Se utiliza la ecuación del teorema 10.5, tal como puede apreciarse en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3

Depreciación con inflación y cuadro

Un montacargas que costó \$95,000 se deprecia con el 18.27% anual durante 5 años, al final se rescatan \$70,600. Obtenga la depreciación anual y haga el cuadro de depreciación suponiendo que su valor aumenta con la inflación del 1.2% mensual.

solución

a) La tasa de inflación anual equivalente al 1.2% mensual se encuentra con la ecuación 4.2

$$e = (1 + i/p)^p - 1 \qquad \text{donde} \qquad i/p = 0.012$$

Es decir:

$$(1 + 0.012)^{12} - 1 = 0.153894624$$

La diferencia de tasas, la de depreciación, menos la de inflación, es:

$$0.1827 - 0.153894624 = 0.028805376$$

Los otros valores para sustituir en la ecuación 10.5 son:

$C = 95,000$, el precio original

$C_n = 70,600$, el valor de rescate

$n = 5$, la vida útil del activo en años, entonces

$$R = \frac{(95,000 - 70,600)(0.028805376)}{(1 + 0.028805376)^5 - 1}$$

$$R = 702.8511744/0.152566852 \qquad \text{o} \qquad R = \$4,606.84064$$

b) El cuadro se comienza anotando esta depreciación en la segunda columna y el precio en el primer renglón de la última.

Fin del año	Depreciación anual	Intereses	Depreciación neta	Depreciación acumulada	Valor contable
0	–	–	–	–	95,000.0000
1	4,606.84064	0	4,606. 84064	4,606. 84064	90,393.15936
2	4,606. 84064	132.70178	4,739.54248	9,346.38306	85,653.61694
3	4,606. 84064	269.22608	4,876.06672	14,222.44978	80,777.55022
4	4,606. 84064	409.68301	5,016.52365	19,238.97343	75,761.02657
5	4,606. 84064	554.18586	5,161.02650	*24,399.99993	70,600.0000

*La diferencia con los 24,400.00 se debe al redondeo y es insignificante.

Note que:
La depreciación acumulada al final del quinto periodo, es decir, al final de la vida útil, es igual a la base de depreciación y el valor contable es igual al valor de rescate.

Ejemplo 4

Resuelva el ejemplo 3 considerando que la tasa de depreciación es del 12.48% anual.

solución

a) La tasa de inflación es mayor que la de depreciación, por eso la diferencia resulta negativa, es decir:

$$0.1248 - 0.153894624 = -0.029094624$$

La depreciación anual es entonces:

$$R = \frac{(95{,}000 - 70{,}600)(-0.029094624)}{[1 - (0.0291094624)^5 - 1]}$$

$$R = -709.9088256/(-0.137250872) \qquad \text{o} \qquad R = \$5{,}172.344746$$

b) El cuadro de depreciación es el siguiente, diferente del anterior, porque ahora los intereses se restan de la depreciación anual, lo que da lugar a que la depreciación neta se reduzca cada año.

Los intereses, por ejemplo, del segundo año son:

$$I_2 = 5{,}172.3447(-0.029094624)$$
$$I_2 = -150.4874242$$

Fin del año	Depreciación	Intereses	Depreciación neta	Depreciación acumulada	Valor contable
0		–	–	–	95,000.0000
1	5,172.3447	0	5,172.3447	5,172.3447	89,827.6553
2	5,172. 3447	–150.4874	5,021.8573	10,194.2020	84,805.7980
3	5,172. 3447	–296.5965	4,875.7482	15,069.9502	79,930.0498
4	5,172. 3447	–438.4545	4,733.8902	19,803.8404	75,196.1596
5	5,172. 3447	–576.1853	4,596.1594	24,400.0000	70,600.0000

Importante

Para concluir con esta sección, es importante señalar lo siguiente, con respecto a la depreciación de activos con el método del fondo de amortización, más específicamente en relación con la fórmula del teorema 10.5, cuando se considera la inflación.

*Si la tasa anual de inflación es menor que la depreciación, entonces d es positiva y el denominador $(1 + d)^n - 1$ es positivo.

*Si la tasa de inflación es mayor que la de depreciación, entonces d es negativa y $(1 + d)^n - 1$ también, ¿por qué? Esto significa que el signo de la depreciación anual R dependerá exclusivamente del signo que tenga el paréntesis $(C - C_n)$.

*Si C es mayor que C_n, entonces el factor $(C - C_n)$ es positivo y la depreciación es también positiva, pero si C es menor que el valor de rescate C_n, entonces el factor $(C - C_n)$ resultará negativo y la depreciación anual R, también. En este caso, la depreciación neta se suma al valor en libros del periodo anterior en lugar de restarse, dando lugar a que se incremente hasta llegar a C_n al final de la vida útil del activo, tal como se aprecia en los problemas 10 y 13 de la sección 10.6 de ejercicios.

Ejercicios 10.6

1. Explique el método del fondo de amortización para depreciar los activos.
2. Escriba la fórmula que se emplea para depreciar un activo con el método de esta sección.
3. ¿Cómo afecta la inflación a la depreciación de activos en el método de esta sección?

Con el método del fondo de amortización, resuelva los problemas siguientes.

4. Halle la depreciación anual, y la neta, del activo que costó $215,000 y 7 años después se rescatan $7,500. Considérese una tasa del 17% de depreciación por año.

5. La licenciada Laura vende su automóvil en $78,000. ¿Cuál fue el costo si lo compró hace 7 años y se deprecia $5,400 cada año con una tasa del 12% anual?

6. Una troqueladora que costó $105,000, tiene vida útil de 6 años y un valor de rescate del 22% de su costo. ¿De cuánto es la depreciación anual si se deprecia con el 15% cada año? Encuentre la depreciación acumulada de los 6 años.

7. ¿Cuál es el valor actual de una motocicleta que 4 años antes se compró en $32,000 y se deprecia en $4,000 por año con una tasa del 9% anual?

8. Una pizzería compró un horno en $120,000. ¿Cuál será la depreciación neta en cada uno de los 5 años de vida útil si al final se rescata el 25% de su precio original y se deprecia con el 18% anual?

9. ¿En cuánto debe venderse un activo que 10 años antes costó $83,200, se deprecia en $1,000 cada año con una tasa del 11.5% y su valor aumenta con la inflación del 9% anual?

10. Haga el cuadro de depreciación de un activo que costó $70,000, tiene vida útil de 5 años, al final se rescatan $95,000, se deprecia con el 14.3% anual y su valor aumenta con la inflación del 6.5% por año.

11. Encuentre la depreciación neta en cada uno de los 7 años de vida útil de una máquina que costó $175,000, al final se vende en $80,000, se deprecia con una tasa del 23% anual y su valor aumenta a la par que la inflación del 0.6% mensual en promedio. Haga un cuadro de depreciación y obtenga primero la tasa de inflación anual equivalente.

12. Un activo que costó $78,000, se deprecia $10,000 cada año con una tasa del 15.2% anual durante 6 años. ¿Cuál es su valor de rescate si su valor creció con la inflación del 7.4% anual?

13. Halle el valor en libros al final del cuarto año de un activo con precio original de $200,000, con un valor de rescate de $250,000, inflación del 11 % anual, depreciación del 13.2% anual y 12 años de vida útil.

14. ¿Cuál es la depreciación acumulada hasta el final del quinto año de un activo que se deprecia $15,000 anuales, con una tasa del 17.8%. Tiene 8 años de vida útil, al final se rescatan $90,000 y su valor crece con la inflación del 9.3% cada año. ¿Cuál fue el precio original del activo?

15. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que costó $120,000, se deprecia $7,500 anuales y una tasa del 17% anual? Suponga que tiene 9 años de vida en servicio y su valor aumenta con la inflación del 12% anual.

En los problemas del 16 al 30 seleccione la opción correcta, justificándola.

16. Una máquina para coser zapatos costó $85,000, tiene un valor de desecho de $50,000 y 5 años de vida útil. ¿De cuánto es la depreciación neta en el segundo si se deprecia 9% cada año?

a) $6,374.58   *b*) $7,163.92   *c*) $8,625.31   *d*) $7,804.23   *e*) Otra

17. ¿De cuánto es la depreciación neta en el tercer año de la vida útil de la máquina en el problema 16?

a) $6,428.33   *b*) $6,183.91   *c*) $6,948.29   *d*) $7,150.23   *e*) Otra

18. Halle la depreciación neta durante el tercer año de un activo que costó $178,000 y 6 años después se rescatan $95,000. Considere la tasa fija del 13% anual.

a) $11,628.33 *b*) $12,128.03 *c*) $12,734.16 *d*) $10,160.32 *e*) Otra

19. ¿Cuál es el valor actual de una motocicleta que 3 años antes se compró en $47.500 y se deprecia $5,500 por año, con una tasa anual del 8.5%?

a) $29,557.76 *b*) $31,260.29 *c*) $28,721.42 *d*) $30,629.61 *e*) Otra

20. Halle la depreciación neta en el cuarto año, de los 6 que tiene de vida útil, una máquina que costó $168,000, al final se vende en $75,000, se deprecia con una tasa del 13% anual y su valor aumenta con la inflación del 0.8% mensual en promedio. Obtenga primero la tasa de inflación anual equivalente.

a) $39,867.43 *b*) $45,781.33 *c*) $40,628.30 *d*) $43,621.62 *e*) Otra

21. Una máquina que costó $106,000, se deprecia $12,400 cada año con una tasa del 9.6% anual durante 5 años. ¿Cuál es su valor de desecho si su valor aumentó 10.5% anual por inflación y otras factores?

a) $40,963.00 *b*) $45,106.00 *c*) $62,325.00 *d*) $51,329.35 *e*) Otra

22. Halle el valor contable al final del tercer año de un activo con precio original de $178,000, valor de rescate de $190,000, inflación del 8.4% anual, depreciación del 12.6% anual y 10 años de vida útil.

a) $182,087.55 *b*) $170,921.43 *c*) $160,429.31 *d*) $176,429.63 *e*) Otra

23. ¿De cuánto es la depreciación acumulada hasta el final del cuarto año de un activo que se deprecia $13,500 anuales con una tasa del 13.5% anual? Suponga que su valor crece con el 10.4% anual.

a) $63,425.08 *b*) $60,529.35 *c*) $59,068.77 *d*) $56,563.30 *e*) Otra

24. Una suajadora que costó $120,000 se deprecia con el 11.4% anual durante los 6 años de vida útil. ¿De cuánto será la depreciación neta durante el tercer año, si al final se rescata el 35% de su precio original?

a) $10,695.00 *b*) $12,110.04 *c*) $15,129.00 *d*) $16,968.35 *e*) Otra

25. Halle la depreciación neta durante el quinto año del activo que costó $350,000 y 7 años después se rescatan $125,000. Considere que se deprecia 14.4% anual.

a) $35,473.75 *b*) $38,095.39 *c*) $32,698.42 *d*) $40,560.53 *e*) Otra

26. Teresa vende su automóvil en $178,000. ¿Cuánto le costó hace 5 años si se deprecia $15,000 anuales con una tasa del 10% anual?

a) $235,429.08 *b*) $275,629.35 *c*) $269,576.50 *d*) $218,525.70 *e*) Otra

27. ¿En cuánto venderá su automóvil Teresa del problema 26 si su valor crece 8.4% cada año.

a) $192,137.79 *b*) $185,208.41 *c*) $205,429.03 *d*) $180,995.09 *e*) Otra

28. ¿Cuál es la depreciación neta durante el cuarto año de un horno que costó $85,000 y 5 años después se vende en $38,000? Considere que se deprecia con el 13% anual.

a) $10,465.02 *b*) $15,625.32 *c*) $18,036.42 *d*) $12,680.09 *e*) Otra

29. Resuelva el problema 28, si el valor del horno aumenta 10% anual.

a) $9,673.55 *b*) $11,268.43 *c*) $12,765.08 *d*) $10,563.91 *e*) Otra

30. Obtenga el valor de rescate de una caldera que costó $175,000, se deprecia $18,000 anuales, con una tasa del 18% anual. Considere que su valor aumenta 9.2% anual durante los 8 años de vida en servicio.

a) $20,963.63 *b*) $22,079.78 *c*) $25,643.15 *d*) $27,065.95 *e*) Otra

Conclusiones

Al terminar el estudio de este capítulo, usted deberá estar capacitado para:

- Explicar el significado de depreciación de activos.
- Decir por qué son necesarios los cargos por depreciación de activos en las empresas.
- Explicar los conceptos: *precio original, valor de rescate, valor en libros* y *vida útil* en la depreciación de activos.
- Exponer y diferenciar los conceptos de *depreciación, depreciación neta* y *depreciación acumulada* de los activos.
- Calcular la depreciación anual, el precio original, el valor de rescate, la depreciación neta y la acumulada y el valor en libros de un activo que se deprecia con los métodos de:
  - – La línea recta.
  - – Horas o unidades de servicio o producción.
  - – Suma de dígitos.
  - – Tasa fija.
  - – Fondo de amortización.
  - – Considerando sólo la depreciación o combinándola con la inflación.
- Hacer e interpretar el cuadro de depreciación de activos.
- Distinguir y explicar las características de los métodos de depreciación que se han estudiado en este capítulo, así como aplicarlos a situaciones reales de depreciación.
- Utilizar la fórmula $R = \dfrac{C - C_n}{n}$ para la depreciación de activos.
- Utilizar la fórmula siguiente para el valor de rescate de un activo, considerando la inflación.

$$C_n = C(1+i)^n - R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- Emplear la ecuación

$$C_k = C - \frac{k(C - C_n)}{2S}(2n - k + 1)$$

para el valor en libros al final del k-ésimo año en el método de la suma de los dígitos.

- Emplear las fórmulas

$$C_k = C(1-d)^k \quad \text{y} \quad d = 1 - \sqrt[n]{C_n / C}$$

para la depreciación de activos con el método de la tasa fija.

- Utilizar las ecuaciones

$$R = \frac{(C - C_n)d}{(1+d)^n - 1} \quad \text{y} \quad D.\ A. = R\frac{(1+d)^k - 1}{d}$$

para evaluar la depreciación de un activo con el método del fondo de amortización.

Conceptos importantes

Cuadro de depreciación
Depreciación
Depreciación acumulada
Depreciación anual
Depreciación neta
Método del fondo de amortización, catalogado como de *interés compuesto* en la depreciación de activos
Métodos de la línea recta y de horas de servicio o unidades de producción clasificados como métodos de *promedio*
Métodos de la suma de dígitos y de tasa fija, que se denominan como métodos de *cargo decreciente* en la depreciación de activos
Valor de rescate de activos
Valor en libros
Valor original de activos
Vida útil de un activo

Problemas propuestos para exámenes

Justificando su respuesta, en los problemas 1 al 12 conteste verdadero o falso.

l. El valor de rescate de un activo es igual a su valor de desecho ___________.

2. La depreciación anual de un activo es menor que el valor en libros en cualquier periodo anual_______________.

3. El valor de rescate de un activo es igual a la depreciación acumulada al final de su vida útil ___________.

4. La depreciación anual de los activos depende de su vida útil _____________.

5. El valor en libros y la depreciación acumulada al final de cualquier año son constantes durante la vida útil ________________.

6. En el método de la tasa fija, el valor en libros al final del k-ésimo año está dado por $C_k = C(1 - d)^k$ ______________.

7. El valor de rescate C_n de un activo debe ser positivo en el método de la tasa fija _____________.

8. El método de la suma de dígitos es de cargo decreciente ______________.

9. En el método de horas de servicio o unidades de producción, la depreciación anual es constante_____________.

10. La depreciación acumulada al final de la vida útil de un activo es igual a la base de depreciación___________.

11. El valor en libros de un activo aumenta con los años, cuando no se considera la inflación ____________.

12. Depreciación neta y acumulada son sinónimos _____________________.

En los problemas 13 a 21 complete la frase.

13. ______________ es la pérdida del valor de un activo por su uso, obsolescencia o ineficiencia.

14. En el método del fondo de amortización la depreciación anual está dada por ______________.

15. Los métodos de cargo decreciente que aquí se han estudiado son___________ y __________.

16. La depreciación neta se obtiene__________.

17. Si el valor de rescate de un activo es nulo, en el método de tasa fija, entonces se considera de _________, para que no se deprecie totalmente en el primer año de vida útil.

18. Cuando el valor de rescate de un activo es negativo, significa que____________________.

19. La tasa de depreciación anual en el método de tasa fija está dada por __________________.

20. El valor contable o valor en libros de un activo aumenta con el tiempo si ________________.

21. El tiempo que hay entre la compra y la obsolescencia de un activo se llama_______________.

22. ¿Cuál es la depreciación anual de un automóvil que costó \$195,000 y después de 5 años se vende en \$120,000? Use el método de la línea recta.

23. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que costó \$75,000, tiene vida útil de 5 años y se deprecia 12,000 cada año? Utilice el método de:

a) La línea recta.

b) La tasa fija del 16.3% anual, considerando que la depreciación dada es la del primer año.

24. La Facultad de Ingeniería compró equipo de cómputo para su laboratorio en \$275,000. ¿De cuánto será la depreciación anual en 5 años de vida útil del equipo si se estima que al final se recuperará un 25% del costo inicial y el valor aumentará con la inflación del 11.5% anual? Utilice el método de la línea recta.

25. Obtenga la depreciación anual de una copiadora digital que costó \$875,000, si al final de 6 años de vida útil se recuperan \$274,400 y se sacaron 7.8 millones de copias distribuidas de la forma siguiente en miles.

Primer año: 995	Tercer año: 1,350	Quinto: 1,420
Segundo: 1,325	Cuarto: 1,676	Sexto: 1,034

26. ¿Cuál es el valor de rescate de un tractor que el primer año da servicio durante 2,500 horas, 3,200 el segundo, 3,100 el tercero, 3,250 el cuarto y 2,650 el quinto, suponiendo que se deprecia \$24 por hora, costó \$350,000 y su valor aumenta con la inflación del 11.4% anual? Haga un cuadro de depreciación.

27. Obtenga la depreciación anual del activo que costó \$170,000, tiene un valor de rescate de \$53,000, se deprecia con el método de la suma de dígitos y tiene 12 años de vida útil.

28. ¿Cuál es el valor en libros al final del noveno año, del activo del problema 27?

29. ¿Cuál es el valor de rescate de un automóvil 6 años después de que se compró en \$190,000, si el primer año se deprecia \$40,000 y su valor aumenta con la inflación del 6.3% anual?

Utilice el método de suma de dígitos.

30. Haga el cuadro de depreciación del activo que costó \$120,000, tiene 7 años de vida útil y al final se recuperan \$36,000. Utilice el método de:

a) Tasa fija de depreciación.

b) Fondo de amortización y 7.4% de depreciación anual.

31. Con el método del fondo de amortización, encuentre el precio original de un departamento que se vende en \$180,000, se deprecia \$5,000 anuales con una tasa del 20.6% *y* su valor crece con la inflación de 0.8% mensual. Suponga que se compró 10 años antes.

32. Resuelva el problema 31 considerando que el valor aumenta \$2,000 cada año, es decir, la depreciación anual es $R = -\$2,000$.

En los problemas 33 al 55 elija la opción correcta justificando su respuesta.

33. ¿Cuál es el valor de rescate de un activo que costó \$150,000, tiene vida útil de 5 años y se deprecia \$20,250 cada año? Utilice el método de la línea recta.

a) \$43,620 *b*) \$50,250 *c*) \$48,750 *d*) \$45,250 *e*) Otra

34. Resuelva el problema 33 si se deprecia con el 12.8% anual.

a) \$73,962.08 *b*) \$70,493.25 *c*) \$75,626.44 *d*) \$68,493.35 *e*) Otra

35. Con el método de la línea recta, calcule la depreciación anual de un automóvil que costó \$253,000 y 6 años después se vende en \$128,000.

a) \$20,833.33 *b*) \$21,521.61 *c*) \$19,463.32 *d*) \$22,329.48

36. ¿Cuál es el valor del automóvil del problema 35, tres años después de que se compró, considerando que su valor aumentó con la inflación del 8.3% anual y se mantiene la depreciación anual?

a) \$253,539.40 *b*) \$221,067.75 *c*) \$275,408.23 *d*) \$210,329.42 *e*) Otra

37. ¿De cuánto es la depreciación anual durante el tercer año de una copiadora que costó \$235,000, 5 años después se vende en \$140,000 y se sacaron 6.9 millones de copias con la siguiente distribución en miles

1º	2º	3º	4º	5º
875	1,250	1,875	1,690	1,210

a) \$25,815.22 *b*) \$30,418.82 *c*) \$26,568.03 *d*) \$28,403.08 *e*) Otra

38. ¿Cuál es el valor contable al final del tercer año de una sembradora que costó 1.75 millones de dólares, el primer año se utilizó 3,100 horas, 2,750 el segundo, 3,230 el tercero, 2,930 el cuarto y 2,520 el quinto? Considere que se deprecia \$35 por hora.

a) \$1’432,200 *b*) \$1’129,562.25 *c*) \$985,559.39 *d*) \$1’363,401.33 *e*) Otra

39. Resuelva el problema 38, considerando que el valor de la máquina aumenta en un 7.3% anual.

a) \$1’568,561.37 *b*) \$1’820,662.58 *c*) \$1’373,725.52 *d*) \$1’428,367.06 *e*) Otra

40. Obtenga la depreciación que sufre un activo durante el tercer año de los 7 de vida útil, considerando que costó \$73,000 y al final se rescatan \$27,000. Utilice el método de la suma de dígitos.

a) \$9,761.16 *b*) \$8,484.61 *c*) \$10,463.07 *d*) \$8,214.29 *e*) Otra

41. Resuelva el problema 40, suponiendo que el activo incrementa su valor en 12.6% anual.

a) \$2,289.25 *b*) \$3,565.03 *c*) \$2,965.51 *d*) \$3,093.38 *e*) Otra

42. ¿Cuál es el valor contable del activo del problema 40 al final del quinto año?

a) $68,908.65 *b*) $73,968.93 *c*) $70,903.21 *d*) $76,832.68 *e*) Otra

43. ¿Cuál es el valor de rescate de una camioneta, cuatro años después de que se compró en $275,000, si el primer año se deprecia $35,000? Utilice el método de la suma de dígitos.

a) $178,650 *b*) $173,295 *c*) $185,585.35 *d*) $187,500 *e*) Otra

44. Resuelva el problema 43 con el método de la tasa fija del 13% anual.

a) $225,748.62 *b*) $203,963.08 *c*) $197,968.73 *d*) $239,250 *e*) Otra

45. Considerando que el valor de la camioneta aumenta 8.5% anual, resuelva el problema 43.

a) $277,766.37 *b*) $253,538.61 *c*) $300,429.35 *d*) $265,568.62

46. ¿Cuál es el valor del rescate del activo, cuyo cuadro de depreciación con el método de la suma de dígitos en sus primeros renglones es el siguiente? Suponga 8 años de vida útil.

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	325,000
1	32,216	32,216	392,789
2	28,189	60,405	364,595

a) $180,028 *b*) $168,426 *c*) $175,428 *d*) $170,526 *e*) Otra

47. ¿Cuál es el valor contable al final del quinto año del activo que se deprecia con una tasa fija durante los 9 años de vida en servicio, y el cuadro de depreciación comienza de la forma siguiente?

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	435,000
1	66,120.00	66,120.00	368,880
2	56,069.76	122,189.76	312,810.24

a) $190,751.74 *b*) $185,629.43 *c*) $180,055.32 *d*) $187,429.36 *e*) Otra

48. Haga los primeros 2 renglones del cuadro de depreciación del activo que costó $178,000 y al final de los 12 años de vida útil se recuperan $80,000. Utilice el método de la tasa fija.

a)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	178,000,000
1	10,429.6312	10,429.6312	167,570.3688
2	9,818.5233	20,248.1545	157,751.8455

b)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	178,000.0000
1	12,063.4215	12,063.4215	165,936.5785
2	11,245.8589	23,309.2804	154,690.7196

c)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	178,000.0000
1	11,476.3834	11,476.3834	166,523.6166
2	10,736.4544	22,212.8378	155,787.1623

d)

Fin del año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	_	_	178,000.0000
1	11,208.1519	11,208.1519	166,791.8481
2	10,753.7483	21,961.9002	156,038.0998

49. Con el método del fondo de amortización y 12% de depreciación anual, obtenga el valor en libros al final del tercer año en el problema 48.

a) $172,529.12 *b*) $164,297.21 *c*) $170,267.72 *d*) $167,623.43 *e*) Otra

50. Empleando el método del fondo de amortización, obtenga el precio original de un departamento que 8 años después se vende en $375,000, se deprecia $8,000 anuales, con una tasa del 9.6% anual, y su valor crece 0.8% cada mes.

a) $421,718.92 *b*) $403,577.43 *c*) $438,036.52 *d*) $415,325.32 *e*) Otra

51. En el problema 50, ¿en cuánto se venderá el departamento a los 8 años de la compra? considerando que su valor aumenta $11,000 cada año; esto es, que la depreciación anual es R = $3,000.

a) $414,397.80 *b*) $427,368.03 *c*) $405,328.00 *d*) $437,743.60 *e*) Otra

52. Con el método del fondo, obtenga la depreciación neta durante el tercer año de un activo cuyo precio original fue de $123,000 y 5 años después se rescatan $58,000. Suponga que se deprecia 8.2% anual.

a) $12,999.90 *b*) $11,528.32 *c*) $13,178.85 *d*) $12,125.38 *e*) Otra

53. Resuelva el problema 52, considerando que el valor del activo aumenta 7% anual.

a) $11,695.63 *b*) $12,568.32 *c*) $13,000.00 *d*) $12,500.00 *e*) Otra

54. ¿Cuánto dinero se rescata por una máquina que 6 años antes costó $278,000, se deprecia $32,000 anuales, con una tasa del 12% anual? Utilice el método del fondo de amortización.

a) $18,313.95 *b*) $16,963.18 *c*) $17,508.92 *d*) $19,665.33

55. Resuelva el problema 54, suponiendo que el valor de la máquina aumenta 9.8% anual.

a) $77,250.32 *b*) $75,125.08 *c*) $72,497.47 *d*) $74,608.62 *e*) Otra

Apéndice

A

Respuestas de ejercicios impares

CAPÍTULO 1

Ejercicios 1.2 (página 6)

1. –3)–3)–3)–3)
3. $35)^8 35)^2$
5. $1/2^3$
7. 1
9. $1 + i/3$
11. 1
13. $4^3 = 64$
15. La raíz cuadrada de 81 es 3.
17. La base debe ser diferente de cero cuando el exponente sea negativo.
19. 3^6
21. x^6/y^2
23. 1/5
25. $\sqrt{xy}$
27. $(1 + y)^2$
29. 2.935667334
31. 2.023799013
33. 7.334583108
35. 2.428053196
37. 0.000000101
39. 2,116.447596
41. 81.232106 81.23211 81.232 8.23
43. 3.995001 3.99500 3.996 4.00
45. 0.003966 0.00397 0.004 0.00
47. 701.401025 701.40103 701.401 701.40
49. 16.379054 16.37905 16.379 16.38
51. b)
53. c)
55. b)
57. b)
59. c)
61. b)
63. b)

Ejercicios 1.3 (página 12)

7. 2
9. 12/11
11. 33.9
13. 50/33
15. 23/5
17. 31/11
19. –1,804.25
21. 0.092805357
23. 0.08026713
25. 0.689204953
27. 8.5225
29. 0
31. No tiene solución.
33. a)
35. a)
37. d)
39. b)
41. c)
43. c)

Ejercicios 1.4 (página 18)

3. 3,636.36
5. 21.125%
7. 96.04
9. 2.1425
11. 497.963474
13. 84.64
15. 244.35918
17. 12.0393
19. 5,856.75
21. 51.1758
23. 4,875
25. 4%
27. 28%
29. 19.1176%
31. 13.3333%
33. 2%
35. 5%
37. 15.5555%
39. 18%
41. 6,210.34
43. c)
45. b)
47. b)
49. a)
51. c)
53. d)

Ejercicios 1.5 (página 24)

5. \$12
7. 260
9. 20.16496581
11. $C = KA/n$
13. \$1,071.43
15. \$145.83
17. 11,666.67
19. \$14,540.31
21. \$7,500, \$9,000, \$12,900, \$15,600
23. 113
25. $P = K/(q)(q - r)^2$
27. $x = Ky/(z - w)^2$
29. $C = K(p - q)^2/(r + s^2)$
31. $A = Kh/r^2$
33. $C = KI/in$
35. v es proporcional al cubo de r.
37. v es inversamente proporcional a t.
39. D es proporcional a r.
41. A es proporcional a h y a la semisuma de b y B.
43. A es proporcional al cuadrado de la diferencia de p y q y a la suma de p y r.
45. B es proporcional a la cuarta potencia de la suma de $2x$ y y.
47. D es proporcional a la diferencia entre $a + b$ y el doble de c.
49. P crece con el cubo de $(2 + 3a - c)$ y decrece con c.
51. M crece con el cuadrado del cociente P/q y decrece con la raíz cuadrada de la suma de x y y.
53. \$866.67
55. 84
57. 12
59. b)
61. a)
63. a)
65. a)
67. b)

Ejercicios 1.6 (página 30)

1. Logaritmo base a de un número n es el exponente al que se eleva la base para obtener el número.
3. $3^{8.5} = A$
5. $\log_{1.0283}(5.93) = x$
7. $5^{10} = P$
9. $6^{A} = 100$
11. $x^{-5.35} = 4$
13. $5^{Q} = 53.8$
15. $a^{3.58} = 25$
17. $\log_3(N) = 5$
19. $\log_{A + B)}(3.57) = 3$
21. $\log_{1.258}(100)=n$
23. $\log_{25.3}(13) = x - 1$
25. $2.818382(10^{12})$
27. 2.662514411
29. 1,122.930561
31. 11,388.60662
33. c)
35. c)
37. a)
39. c)
41. d)
43. d)
45. a)
47. d)
49. a)
51. a)
53. b)
55. d)

Ejercicios 1.7 (página 36)

3. 10.3 y 42
7. 8.75
9. $4x - 2$ siempre que $4x - 2$ sea positivo.
11. $2 - x$
13. 2/3
15. 132.9114758
17. 1.745214258
19. 41.41661023

21. 6.978810701
23. –0.077261496
25. –0.197347477
27. 1 $x = -3$
29. 1.219755275
31. 1.347434164
33. 0.669430654
35. 0.64717966
37. –14.52385419
39. 1.866169147
41. No existe el logaritmo de números negativos.
43. a)
45. b)
47. a)
49. b)
51. e)
53. c)
55. d)
57. c)
59. c)
61. b)

Ejercicios 1.8 (página 50)

1. \$38,675, \$27,625, \$44,200
3. \$94,153.82, \$72,000, \$44,307.68, \$11,076.92
5. \$525,000, \$469,293.65, \$408,081.43, \$347,624.92
7. \$250.00
9. \$10,000.00
11. \$116,931.83
13. US \$17’040,417.86
15. a) \$1’000,000.00
b) \$32,250.00
c) \$20,017.50
d) \$8,407.35
e) \$14,130.00
17. a) \$1,804.00, 34.4%
b) \$1,568.70, \$235.30
c) \$1,966.36
19. 1.24975%
21. 5.3156%
23. b)
25. b)
27. a)
29. a)
31. d)

Problemas para exámenes (página 54)

1. Verdadero.
3. Falso.
5. Verdadero.
7. Falso.
9. Verdadero.
11. $4^{-2} = 1/4^2$
13. $\text{Log}_{70.5}24.3) = x$
15. 2.983540952
17. 0.49146188
19. 15,792
21. 1.4900175%
23. 16
25. 64
27. $(x + y)^2$
29. $(x^{3/2}x - 3)^{1/2}$
31. 10
33. 2.437494679
35. 5.918011952
37. 1.387320091
39. 1.671430903
41. 257.4164836
43. 9.8722134
45. 0.952380953
47. 2.829482801
49. 972.5625
51. 16.5204678%
53. \$49,300
55. 6 años
57. \$25,000
59. b)
61. b)
63. d)
65. b)
67. a)
69. a)
71. c)
73. a)

75. b)
77. c)
79. a)

CAPÍTULO 2

Ejercicios 2.1 (página 61)

5. $a_n = 4n$
7. El vigésimo.
9. –26
11. 63
13. 2
15. 135
17. 7
19. 15
21. a)
23. c)
25. e)
27. c)
29. a)
31. c)
33. a)

Ejercicios 2.2 (página 69)

1. a) –35
b) –53
c) 25
d) 91
e) –60
f) 83
3. a) 42, 37, 32,...
b) –31, –24, –17,...
c) –11, –10, –9,...
d) 15, 14, 13,...
e) 55/4, 50/4, 45/4,...
f) –16/3, –92/21, –24/7...
5. 205
7. 50
9. 12, 20, 28
11. 12
13. –25, –20, –15,...
15. –700
17. c)
19. a)
21. c)
23. a)
25. e)

Ejercicios 2.3 (página 77)

3. a) 16, 8, 4,...
b) 2, 2, 2,... o 8, –4, 2,...
c) 2, –4, 8,...
5. 402’653,184
7. a) ±12
b) –12
c) 1/5
d) 5 o –1
e) 3
f) 0.625
9. $24)^{23}$
11. 1,701, ±567, 189...
13. 3,276.799218 o 5,461.33462
15. 40.85629578
17. 22.84318525
19. 38,337.36931 o 62,274.14006
21. b)
23. b)
25. d)
27. e)
29. d)
31. e)
33. e)

Ejercicios 2.4 (página 86)

1. $7.29
3. $3.4240
5. $a_{60} = 102$ $d = 0.50$ $a_n = 500$
a) $72.50
b) $89.50
c) 856 parejas
d) $245,030
7. 5 horas.
9. 9.494771182 millones.
11. $73’466,403.85
13. 12.415034%
15. $11.84098
17. $13,116.42
19. b)

21. d)
23. a)
25. A) a)
B) c)

Problemas para exámenes (página 89)

3. Falso; es 57
7. Verdadero.
11. 12
17. 0.008670765
19. a) 7.5
b) 7.2915 o –3.2915
21. a) $375
b) $1,075
c) $3,750
23. 428,456
25. 11.62 años
27. $968,750
$12’256,250
$2’485,883.68
$17’589,381.46
29. a) undécimo año
b) US $1,021.03
31. 5.49778%
33. 22,481
35. 52,535.88 toneladas.
37. 45.535844%
39. c)
41. a)
43. b)
45. d)
47. b)
49. d)
51. e)

CAPÍTULO 3

Ejercicios 3.2 (página 101)

5. $31,111.11
7. 23.7362637%
9. 9,092.19
11. 14,640.09
13. abril 12
15. 1) $337.50
2) $468.09
3) $1,200
4) $1,200
5) $800
6) $164,410.06
17. $7,665.00, $9,118.73 y $9,118.73
19. 164.58
21. Pagarlo de contado.
23. $8,202.52
25. $12,869.50
27. a) $17,702.09 c/u
b) $19,131.48, $16,261.76
c) $20,383.66, $15,000.00
29. $1,711.28
31. a)
33. c)
35. a)
37. c)
39. d)
41. b)
43. a)
45. e)

Ejercicios 3.3 (página 110)

1. $7,414.59
3. a) $3,811.78
b) $3,510.74, $4,130.28
5. $220,845.59
7. a) $15,223.64
b) $13,171.76, $15,147.53, $17,419.65
c) $14,728.94, $15,228.94, $15,728.94
d) $22,753.73, $11,376.87, $11,376.87
9. $33,496.33
11. $12,148.69
13. $126,502.50
15. $9,259.20
17. 97 días antes
19. $15,541.50
21. $34,372.94
23. e)
25. e)
27. a)

Ejercicios 3.4 (página 117)

3. $339,208.33
5. 236
7. 285 días
9. 41.1429%
11. $9,365.02
13. $83,884.61
15. a) $400,000
b) $180,449.55
17. Enero 31
19. 10.50%
21. $18,740
23. a)
25. e)
27. b)
29. b)
31. a)

Ejercicios 3.5 (página 123)

7. 31,222.01
9. $34,078.72
11. 17.6087%
13. $9,150.90
15. $11,258.54
17. 2,626 días.
19. 1) $8,079.86
2) 17.406%
3) $14,668.17
4) $5,675.62
5) Sept. 3
6) Nov. 9
21. a) $14,447.61
b) $14,453.72
c) $14,686.80
23. a)
25. b)
27. d)
29. b)
31. b)
33. d)
35. e)
37. e)
39. a)
41. e)
43. e)

Ejercicios 3.6 (página 138)

15. $958.3
17. $781.50
19. $2,753.33
21. $135,501.36
23. $1,806.00
25. $3,789.53, $3,754.54,..., $2,984.98
27. $7,534.88
29. $8,728.14
31. $8,379.59
33. 8
35. 0.5429%
37. No.
39. a)
41. b)
43. b)
45. b)
47. e)
49. e)
51. c)
53. d)
55. b)
57. d)

Ejercicios 3.7 (página 149)

1. $77,673.15
3. $85,259.51
5. $19,160
7. $80,990
9. $231.93
11. 4.945%
13. $9.7654
15. $159.988.50
17. $44,008.21
19. $34,427.07
21. c)
23. b)
25. e)
27. d)
29. b)
31. a)
33. c)
35. c)
37. c)
39. a)

41. b)
43. a)
45. c)
47. a)

Problemas para exámenes (página 155)

1. *F*
3. *F*
5. *F*
7. *F*
9. *V*
11. 25%
13. $34,753.95
15. Anualidades.
17. Simple.
19. $34,002.99
21. 19.25926%
23. $10,429.96
25. a) $16,955.72
    b) $19,750.10, $14,107.2
27. Nov. 9 del año siguiente.
29. $34,172.18
31. $1’032,717.21
33. $9,790.20
35. $150,941.85
37. $8,291.50, $8,219.75,..., $7,071.75
39. a) $160,680.66
    b) 14.8958%
    c) $39,165.91
    d) $15,557.57
41. $143,726.24
43. $3,147.46, $3.106.49,..., $2,450.97
45. $35,615.49, $288,384.51
47. Con el 1.15 simple mensual.
49. a) $28,930
    b) 12.33%
    c) $14,277.29
51. a)
53. c)
55. a)
57. b)
59. a)
61. b)
63. c)

CAPÍTULO 4

Ejercicios 4.1 (página 165)

1. 369.166
3. 3.294%
5. 28.3132%
7. $4.012651
9. 67.3573%
11. 44.5257%
13. 90.7514%
15. 453,116; 29.4619%
17. 61.8066%
19. $1’159.862.05
21. 30.2260%
23. 11.9567%
25. a)
27. b)
29. c)
31. c)
33. b)

Ejercicios 4.2 (página 174)

7. 322 semanas.
9. $36,355.89
11. $9,695.15
13. 4 de febrero.
15. 28.546 semanas.
19. $10,358.55
21. La segunda.
23. a)
25. a)
27. c)
29. a)
31. b)
33. c)
35. a)
37. d)
39. b)

Ejercicios 4.3 (página 183)

3. La primera.
5. Luis.
7. La segunda.

9. a) $50,204.24
b) $50,420.10
c) $50,371.74
11. a) $43,175.96
b) $43,367.71
c) $43,289.66
13. $1,828.76
15. a) $34,619.39
b) 36,293.17
17. 404 días.
19. La primera.
21. 17.532% 19.15766%
23. Por la primera.
25. c)
27. c)
29. a)
31. d)
33. b)
35. d)
37. a)
39. c)

Ejercicios 4.4 (página 192)

7. $66,006.08
9. $103,001.75
11. $19,066.53
13. 6 trimestres y 63 días.
15. $526,728.30
17. 6. $5,584.26
10. $1,561.00
13. 35% del capital.
15. $76,728.30
19. $11,787.49
21. $21,104.89
23. $1.038.00
25. c)
27. b)
29. a)
31. c)
33. d)
35. a)
37. c)
39. d)
41. d)
43. d)
45. c)
47. d)

Ejercicios 4.5 (página 204)

3. $6,928.21
5. $11,141.35
7. $8,881.62
9. a) $10,133.48
b) $8,124.82 y $12,187.23
11. $16,300.44
13. a) $15,242.04
b) $21,089.19
15. 358 días.
17. $7,999.17
19. $10,808.45
b) $441.55
21. d)
23. c)
25. a)
27. c)
29. a)
31. b)
33. a)
35. d)
37. a)

Ejercicios 4.6 (página 217)

1. $470,266.70
3. $11,278.76
5. 11 de julio.
7. $434,442.47
9. $3,478.08
11. La primera.
13. e)
15. a)
17. c)
19. a)
21. d)
23. b)
25. a)
27. a)
29. a)

Problemas para exámenes (página 222)

5. Falso.
11. 10.2085
13. $7,620.01
15. 14.8698%
17. 6.20028%
19. $423.20
21. 22.4794%
23. a) $3,029.06
b) $3,363.49 o $2,690.79
25. a) $210,129.61
b) $6,870.39
c) $213,499.38
27. c)
29. a)
31. a)
33. d)
35. c)
37. a)
39. a)
41. c)
43. a)
45. b)

CAPÍTULO 5

Ejercicios 5.2 (página 241)

3. 33 semanas.
5. 13
7. Con 8 abonos semanales.
9. La primera.
11. 15
13. $1,368.54
15. 22
17. $12,621.73
19. 14
21. $12,633.60
23. c)
25. c)
27. a)
29. d)
31. a)
33. a)
35. a)

Ejercicios 5.3 (página 252)

3. $86,199.58
5. 16
7. $9,056.78
9. $29,126.69
11. La tercera.
13. $6,738.20
15. 25
17. $2,143.01
19. La primera.
21. 8.76%
23. b)
25. d)
27. d)
29. a)
31. a)
33. a)

Ejercicios 5.4 (página 261)

5. $414.57
7. $12,058.47
9. 9 de 735 y otro de $136.17
11. $37,917.79
13. a) $35,052.68
b) $2,147.32
c) $12,199.09
15. a) $243,995.48
b) $71,004.55
17. a) $23,263.75
b) 6,042.89
19. $105,577.78
21. $9,026.98
23. $9,936.81
25. a)
27. c)
29. d)
31. b)
33. a)
35. c)

Ejercicios 5.5 (página 269)

3. $5,010.76
5. US$5,604.26

7. $13,822.85
9. 10 de $13,098.52
11. a) $2,623.30
b) $1,349.50
13. a) $15,302.57
b) $7,402.57
15. a) $5,761.34
b) $95,680.40
17. $15,692.75
19. b)
21. b)
23. a)
25. a)
27. c)
29. d)
31. d)
33. a)

Ejercicios 5.6 (página 276)

3. 822,259.14
5. $505,429.74
7. $17,505.95
9. $4,202.11
11. 20.25%
13. $36,796.67
15. $13,005.38
17. $35,840.05
19. a)
21. c)
23. c)
25. d)
27. a)
29. d)
31. d)
33. c)
35. d)

Ejercicios 5.7 (página 292)

1. 1,306.17
3. $472,905.85
5. $276,748.32
7. $76,805.75
9. US $1’991,753.90
11. $130.44
13. $60,527.12
15. a) $206,957.62
b) $34,642.38
c) $12,700.74
17. $9,100.00
19. $154.84
21. 7 de 4,588.18
23. $277,420.88
25. b)
27. b)
29. a)
31. c)
33. b)
35. d)
37. d)
39. c)
41. c)
43. c)

Problemas para exámenes (página 298)

11. $320,000
15. $705.88
17. 26,871.71
21. $149,627.26
23. 17 de $525 y 1 de $433.87
25. $153,953.33
b) $9,046.67
27. $42,164.53
29. a)
31. d)
33. b)
35. b)
37. c)
39. a)
41. c)
43. a)

CAPÍTULO 6

Ejercicios 6.2 (página 390)

7. $5,504.11
9. 21 semanas.
11. $2,316.05

13. $2,470.24
15. $14,439.47
17. 14
19. a) $636,571.40
b) $4'231,428.00
21. a) $172,906.42
b) $5,104.34
c) $55,223.78
23. b)
25. a)
27. b)
29. d)
31. a)
33. a)
35. c)

Ejercicios 6.3 (página 316)

7. $7,686.9638
9. a) (Véase el cuadro de amortización en el *Manual de soluciones*, p. 6).
b) $519,064.8579
c) en el 45º
11. en el 8º
13. $57,141.00
15. a) $89,142.75
b) $43,987.88
c) (Véase el cuadro de amortización en el *Manual de soluciones*, p. 9).
17. a) (Véase el cuadro de amortización en el *Manual de soluciones*, p. 10).
b) $170,864.29
c) $804,100.14
19. a)
21. c)
23. b)
25. b)
27. d)
29. a)
31. b)
33. a)
35. a)
37. d)
39. a)

Ejercicios 6.4 (página 325)

3. $5,400.00, $5,262.5, $5,125.00
5. $114,591.29
7. 14
9. (Véase el cuadro de amortización en el *Manual de soluciones*, p. 15).
11. a) 5
b) $217.80
13. $12,980.77
15. a) 12 pagos.
b) $11,456.25
17. $8,832.33, $5,795.08, $5,757.83 y $4,938.36
19. 8
21. a)
23. d)
25. a)
27. a)
29. d)
31. c)
33. b)
35. c)

Ejercicios 6.5 (página 337)

5. $118,515.01, $124,765.01, $131,015.01
7. a) $4,375.00, $4,760.96, $5,146.93, $5,532.89
b) $317,546.64
9. 18
11. 12 de $6,256.16
13. (Véase el cuadro de amortización en el *Manual de soluciones*, p. 23).
15. a) $118,557.03
b) 213,948.4409
17. a) 17 bimestres.
b) $62,820.25
19. d)
21. b)
23. a)
25. a)
27. a)

29. c)
31. d)

Ejercicios 6.6 (página 353)

1. a) 220,800
b) 216,651.7967
c) 220,293.4474
d) La última opción.
3. $423,990.23
5. $308,939.29
7. $129,147.16
9. a) $74,543.50
b) $361,343.99
11. $25,388.81 cada una.
13. $11,108.90
15. (Véase el cuadro de amortización en el *Manual de soluciones*, p. 32).
17. $250,362.46
19. $111,282.04, $115,733.32, $120,362.65, $125,177.16, 3 de c/u
21. b)
23. d)
25. a)
27. b)
29. a)
31. d)
33. d)

Problemas para exámenes (página 358)

27. $760.00
29. $4,670.96
31. a) $6,110.00, $6,080.62, … $5,904.38
b) $1507.52
c) (Véase el cuadro de amortización en el *Manual de soluciones*, p. 39).
33. a) $6,700.39, $6,901.40 … $13,223.80
b) $30,670.78
35. $13,635.86026
37. (Véase el cuadro de amortización en el *Manual de soluciones*, p. 41).
39. $86,019.20
41. $88,233.37
43. $770,686.21
45. $143,059.56
47. a) $189,465.77
b) $24,310.42
49. c)
51. d)
53. d)
55. a)
57. a)
59. d)

CAPÍTULO 7

Ejercicios 7.2 (página 366)

3. 17
5. a) $4,620.38
b) $11,018.97
7. $121.31
9. $10,533.95
11. $15,536.45
13. $13,837.56
15. $1’006,873.86
17. $7,980.26
19. a)
21. c)
23. c)
25. d)
27. b)
29. b)
31. d)

Ejercicios 7.3 (página 372)

3. a) $12,680.19
b)

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	12,680.19	12,680.19	270.47	12,950.66
2	12,680.19	25,630.85	546.70	26,177.54
3	12,680.19	38,857.73	828.83	39,686.56
4	12,680.19	52,366.75	1,116.97	53,483.72
⋮				
12	12,680.19	171,345.25	3,654.75	175,000.00

5. a) $37,355.54

b)

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	37,355.54	37,355.54	672.40	38,027.94
2	37,355.54	75,383.48	1,356.90	76,740.38
3	37,355.54	114,095.92	2,053.73	116,149.65
4	37,355.54	153,505.19	2,763.09	156,268.28
⋮				
18	37,355.54	785,854.62	14,145.38	800,000.00

7. a) 17
b)

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	65,230.00	65,230.00	859.05	66,089.05
2	65,230.00	131,319.05	1,729.42	133,048.47
3	65,230.00	198,278.47	2,611.25	200,889.72
⋮				
17	65,230.00	1’233,751.97	16,248.03	1’250,000.00

c) $776,791.82

9. a) $1’927,775.32
b)

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	25,000.00	25,000.00	198.75	25,198.75
2	25,000.00	50,198.75	399.08	50,597.83
3	25,000.00	75,597.83	601.00	76,198.83
⋮				
60	25,000.00	1’912,570.39	15,204.93	1’927,775.32

11. a) $843,528.50
b)

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	475,000	475,000.00	2,850.00	477,850.00
2	30,000	507,850.00	3,047.10	510,897.10
3	30,000	540,897.10	3,245.38	544,142.48
4	30,000	574,142.48	3,444.85	577,587.34
5	30,000	607,587.34	3,645.52	611,232.86
6	30,000	641,232.86	3,847.40	645,080.26*
⋮				
41	30,000	1’955,099.58	11,730.60	1’966,830.18
⋮				
96	30,000	2’716,800.96	16,300.81	2’733,101.77

13. c)
15. a)
17. a)
19. c)
21. a)
23. d)
25. b)

Ejercicios 7.4 (página 384)

3. $6,468.73
5.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	3,500.0000	3,500.0000	24.5000	3,524.5000
2	4,587.7529	8,112.2529	56.7858	8,169.0387
3	5,675.5058	13,844.5445	96.9118	13,941.4563
4	6,763.2587	20,704.7150	144.9330	20,849.6480
5	7,851.0116	28,700.6596	200.9046	28,901.5642
6	8,938.7645	37,840.3287	264.8823	38,105.2110
7	10,026.5174	48,131.7284	336.9221	48,464.6505
8	11,114.2703	59,582.9208	417.0804	60,000.0012

7. $20,112.57
9.

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	44,976.4124	44,976.4124	809.5754	45,785.9878
2	46,976.4124	92,762.4002	1,669.7232	94,432.1234
3	48,976.4124	143,408.5358	2,581.3536	145,989.8894
⋮				
12	66,976.4124	736,738.7033	13,261.2967	750,000.0000

11. a) $914,589.41
b) $211,279.79

13. a) $4’125,550.71
b) $2’077,118.46

15. a) $67,479.13, $70,853.09, $74,395.74
b)

Periodo	Renta	Capital	Intereses	Monto
1	67,479.13	67,479.13	3,711.35	71,190.48
2	70,853.09	142,043.57	7,812.40	149,855.97
3	74,395.74	224,251.71	12,333.84	236,585.55
4	78,115.53	314,701.08	17,308.56	332,009.64

17. a) $110’153,220.00
b) $112’194,705.90

19. $50’500,372.51
21. b)
23. a)
25. c)
27. d)
29. d)
31. b)
33. c)
35. c)
37. c)

Ejercicios 7.5 (página 396)

3. a) $2,373.42
b) $9,156.88
5. a) $671.38
b) $5,253.76
7. a) $271,748.90
b) $94,298.90
9. a) $14,456.86, $15,656.86, $16,856.86, $18,056.86
b) $14,035.68
11. $657,038.72
13. a) $3’201,285.71
b) $521,660.71
15. 18 mensualidades, la primera de $53,049.13
17. c)
19. a)
21. a)
23. c)
25. a)
27. b)
29. c)

Problemas para exámenes (página 400)

9. $48,809.51
13. $1,434.84
15. $77,344.84
17. Faltan 7 años.
19. c)
21. a)
23. c)
25. a)
27. a)
29. d)
31. d)
33. c)
35. c)
37. b)

CAPÍTULO 8

Ejercicios 8.2 (página 409)

19. $110.00
21. $64.68
23. $120
25. $309
27. $101.85

Ejercicios 8.3 (página 416)

3. $250.30
5. $5.20
7. $100.00
9. 16%
11. $202.65
13. $128.80
15. b)
17. a)
19. d)
21. b)
23. a)
25. c)
27. c)

Ejercicios 8.4 (página 423)

3. $158.30 $8.30
5. a) $90.85; $9.15
b) $99.59; Descuento $21.41
7. a) Descuento $13.99
b) Descuento $24.37
9. 25.4169%
11. a) $99.16; $33.84; Descuento $0.84
b) $95.48; $25.92; Prima = $0.48
13. 42.078%;   Descuento $5.00
19. d)
21. a)

23. c)
25. a)

Ejercicios 8.5 (página 432)

3. a) $194.93
b)

Periodo	Intereses	Cupón	Diferencia	Valor contable
0	—	—	—	194.9300
1	5.9941	5.60	0.3941	195.3241
2	6.0062	5.60	0.4062	195.7303
3	6.0187	5.60	0.4187	196.1490
4	6.0316	5.60	0.4316	196.5806

5. a) $99.53
b) $61.12
c)

Periodo	Intereses	Cupón	Diferencia	Valor contable
0	—	—	—	99.52998
1	6.56898	5.85	0.71898	100.24896
2	6.61643	5.85	0.76643	101.01539
3	6.66702	5.85	0.81702	101.83241
4	6.72094	5.85	0.87094	102.70334
5	6.77842	5.85	0.92842	103.63177
6	6.83970	5.85	0.98970	104.62146
7	6.90502	5.85	1.05502	105.67648
8	6.97465	5.85	1.12465	106.80113
9	7.04887	5.85	1.19887	108.00000

7. a) $105.58
b)

Periodo	Intereses	Cupón	Diferencia	Valor contable
0	—	—	—	105.58
1	6.33	7.0000	0.67	104.91
2	6.29	7.0000	0.71	104.21
3	6.25	7.0000	0.75	103.46
4	6.21	7.0000	0.79	102.67
5	6.16	7.0000	0.84	101.83
6	6.11	7.0000	0.89	100.94
7	6.06	7.0000	0.94	100.00

c) $43.42
9. a) $293.18

Periodo	Intereses	Cupón	Diferencia	Valor contable
0	—	—	—	293.18058
1	13.33972	12.90	0.43972	293.62030
2	13.35972	12.90	0.45972	294.08002
3	13.38064	12.90	0.48064	294.56066

b) $319.56
11. a) $129.70
b) $216.2633
13. a) $180.00
b) 15.33%
c)

Periodo	Intereses	Cupón	Amortización	Valor contable
0	—	—	—	190.24299
1	7.79996	9.20	1.40004	188.84295
2	7.74256	9.20	1.45744	187.38551
3	7.68281	9.20	1.51719	185.86832
4	7.62060	9.20	1.57940	184.28892

d) $184.29
15. a)
17. b)
19. a)
21. a)
23. c)
25. b)
27. c)
29. a)

Ejercicios 8.6 (página 443)

3. $91.27
5. $20.84
7. a) $203,691.00
b) $14.95
9. a) $197.92;
b) $32.08
11. a) $110.34
b) $21.06
c) $14.34

13. a) $112.95
b) $118.20
c) $13.20 prima
d) 21%
e) $42.80
15. $578,900
17. c)
19. a)
21. c)
23. a)
25. c)
27. d)
29. d)

Ejercicios 8.7 (página 454)

3. 19.4192%
5. 12.1144%
7. 9.1183623%
9. 11.5280752%
11. $94.89
13. a) $776,543.28
b) 19.20%
15. $116.05
17. c)
19. a)
21. a)
23. d)
25. a)
27. d)

Ejercicios 8.8 (página 466)

7. 53.08977% anual.
9. a) 10.4568% anual.
b) $17,732.12
11. 6.35046% anual.
13. a) 9.6496% anual.
b) $69.2424
15. a) 12.7491% anual.
b) 19.5824% anual.
17. a) 4.8877%
b) 5.0115%
c) 5.1459% anual.
d) 4.1328% mensual.
e) $58,272.92
19. d)
21. c)
23. d)
25. d)
27. a)
29. d)
31. b)

Problemas propuestos para exámenes (página 470)

25. $205.35
27. $567,694.37
29.

Periodo	Intereses	Cupón	Amortiza	Valor contable
0	—	—	—	106,1535
1	4.9361	5.70	0.7639	105.3896
2	4.9006	5.70	0.7994	104.5903
3	4.8634	5.70	0.8366	103.7537
4	4.8245	5.70	0.8755	102.8783
5	4.7838	5.70	0.9162	101.9621
6	4.7412	5.70	0.9588	101.0033
7	4.6967	5.70	1.0033	100.0000

31. 11.8423%
33. a) 28.1609% anual.
b) 2.0602% mensual.
35. a) 1.1062% mensual.
b) 1.8119% mensual.
37. d)
39. a)
41. c)
43. c)
45. a)
47. d)
49. b)
51. a)
53. a)
55. d)

CAPÍTULO 9

Ejercicios 9.1 (página 481)

15. 32.72727%
17. 66.667%
19. 50% 50%
23. 115
25. a) 70%
b) 22%
c) 92%
27. 14.2857%
29. 0.8547009%
31. 7.6923077%
33. a) 0.591716%
b) 0.4524887%
35. 98.515341%
37. 25%
39. a) 17.5%
b) 11.6667%
c) 30.8333%
d) 0, no hay rojas.
e) 14.5833%
41. a) Sí, ninguno estudia más de una carrera.
b) Sí, que estudie actuaría no depende que estudie otra, por ejemplo.
43. a) No.
b) 90%
c) 15%
d) 30%
45. d)
47. a)
49. a)
51. d)
53. a)
55. c)
57. a)
59. b)

Ejercicios 9.2 (página 489)

5. $62,300
7. $22,000
9. $10,545.00
11. $25,756.38
13. $107.80
15. –$250
19. $1.39
21. 38.38%
23. a) –$80
b) –$4,000
c) –$2,400
d) –$80,000
25. $2,000
27. –$899,250
29. $15.42
31. e)
33. a)
35. b)
37. b)
39. c)
41. b)
43. a)
45. a)
47. c)
49. b)
51. c)
53. a)
55. a)

Ejercicios 9.3 (página 497)

5. A la segunda.
7. $6,281.01
9. 20 años
11. $2,450.43
13. $91,388.44
15. $43,729.70
17. $260,978.22
19. $7,915.32
23. 35.14687%
25. 6.57734%
27. a) 0.008237557
b) 0.009044309
29. a)
31. d)
33. c)
35. c)
37. d)
39. b)
41. d)

Ejercicios 9.4 (página 508)

11. 70,774
13. 1’008,456.16
15. 21,291.38393
17. 0.99560
19. 3’006,135.687
23. 0.201066483
25. 0.010000021
27. 0.148129438
29. 0.383503093
31. 0.112258806
33. 0.1666192
35. c)
37. c)
39. b)
43. d)
45. a)
47. a)
49. c)
53. e)
59. b)
61. b)
63. a)
65. d)

Ejercicios 9.5 (página 520)

9. $861,248.25
11. A los 66 años.
13. $983,738.07
15. $669,969.90
17. Sí.
19. $673,378.20
21. $1’138,925.94
23. $641.01
25. $685.68
27. No le darán.
31. c)
33. b)
35. a)
37. b)
39. d)
41. a)
43. c)
45. b)
47. b)
49. c)
51. d)
53. b)

Problemas para exámenes (página 525)

15. 3.20; verdadero.
21. 0.004524887
23. $0.0\overline{3}$
25. 0.92
27. 0.04
29. $1,758.89
31. b)
33. a)
35. c)
37. b)
39. b)
41. c)
43. d)
45. b)
47. a)
49. b)
51. d)
53. a)
55. d)
57. c)
59. c)
61. e)
63. a)
65. d)
67. c)
69. b)
71. a)
75. d)
77. b)
79. b)

CAPÍTULO 10

Ejercicios 10.2 (página 541)

9. $212,500
11. $12,200
13. $37,500

15. $27,007.11
17. 8 años.
19. $2’132,144.09; $2’443,629.07
21. 7 años.
23. a) $133,366.23
b)

Fin de año	Valor con inflación	Deprecia-ción anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	—	—	—	133,366.2333
1	148,436.6177	10,500.00	10,500.00	137,936.6177
2	153,523.4555	10,500.00	21,000.00	143,023.4555
3	159,185.1060	10,500.00	31,500.00	148,685.1060
4	165,486.5320	10,500.00	42,000.00	154,986.5230
5	172,500.0000	10,500.00	52,500.00	162,000.0000

25. d)
27. c)
29. a)
31. a)
33. b)
35. c)

Ejercicios 10.3 (página 549)

3. $4,125
5. $14,000, $12,800, $11,600, $10,800, $10,400, $8,400
7. $176,640, $193,200, $160,080, $143,520, $125,120, $121,440
9. a) $45,551.05, $44,640.03, $43,747.23, $42,872.29, $42,014.84, $41,174.55
b)

Fin de año	Valor con inflación	Deprecia-ción anual	Depreciación acumulada	Valor contable
0	—	—	—	325,000.00
1	3,000.0000	45,551.0551	45,551.0551	279,448.9449
2	2,940.0000	44,640.0340	90,191.0891	234,808.9109
3	2,881.2000	43,747.2333	133,938.3225	191,061.6775
4	2,823.5760	42,872.2887	176,810.6112	148,189.3888
5	2,767.1045	42,014.8429	218,825.4541	106,174.5459
6	2,711.7624	41,174.5460	260,000.0001	65,000.00

11. $22,500, $24,300, $27,000, $23,400, $19,800, $18,000
13. $11,120.07
15. c)
17. a)
19. a)
21. a)
23. d)
25. a)

Ejercicios 10.4 (página 559)

3. $1164, $873, $582 y $291
5. 2.01, 1.675, 1.34, 1.005, 0.67 y 0.335 millones
7. a) $4.2, $4.08, $3.96 … $0.12 millones
b) $33’400,000
9. a) $18’974,203.00
b)

Fin de año	Valor con inflación	Deprecia-ción anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	—	30.00000000
1	33.21600000	7.8	7.8	25.41600000
2	28.14059520	6.24	14.04	21.90059520
3	24.24833901	4.68	18.72	19.56833901
4	21.66606495	3.12	21.84	18.54606495
5	20.53420311	1.56	23.40	18.97420311

c) $19,568.34
11. $53,594.63
13. a)

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	225,000.00
1	29,400.00	29,400.00	195,600.00
2	25,200.00	54,600.00	170,400.00
3	21,000.00	75,600.00	149,400.00
4	16,800.00	92,400.00	132,600.00
5	12,600.00	105,000.00	120,000.00
6	8,400.00	113,400.00	111,600.00
7	4,200.00	117,600.00	107,400.00

b) $107,400

15. $472,703.50
17. b)
19. b)
21. a)
23. c)
25. a)
27. d)
29. d)
31. a)

Ejercicios 10.5 (página 570)

5. $30,944.92, $24,561.00, $19,494.08, $15,472.46, $12,280.50, $9,747.04
7. $246,705.11
9. $324,229.86
11. $63,656.72
13. $65,372.26
15. $1’902,100.34, $1’332,338.81, $933,245.57, $653,698.05, $457.887.14, $320,730.09
17. a) $499,894.56
b) 16.4252608%
c)

Fin de año	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	—	—	450,000.0000
1	9,563.6736	9,563.6736	459,563.6736
2	9,766.9266	19,330.60021	469,330.6002
3	9,974.4993	29,305.0995	479,305.099
4	10,186.4834	39,491.5829	489,491.5829
5	10,402.9727	49,894.5556	499,894.5556

19. $78,654.04
21. a)
23. b)
25. c)
27. a)
29. d)
31. a)

Ejercicios 10.6 (página 579)

5. $132,480.66
7. $13,707.48
9. −71,996.61824
11. a)

Fin de año	Depreciación anual	Intereses	Depreciación Neta	Depreciación acumulativa	Valor contable
0	—	—	—	—	175,000.00
1	8,437.713	0	8,437.713	8,437.713	166,562.287
2	8,437.713	1,312.704	9,750.417	18,188.130	156,811.870
3	8,437.713	2,829.633	11,267.346	29,455.478	145,544.523
4	8,437.713	4,582.560	13,020.273	42,475.750	132,524.250
5	8,437.713	6,608.200	15,045.913	57,521.663	117,478.337
6	8,437.713	8,948,981	17,386.694	74,908.357	100,091.643
7	8,437.713	11,653.930	20,091.643	95,000.000	80,000.000

b) $8,437.71, $9,750.42, $11,267.35, 13,020.27, $15,045.91, $17,387.69 y $20,091.64 (ver cuadro)
13. $215,238.74
15. $37,300.77
17. c)

19. a)
21. b)
23. d)
25. a)
27. a)
29. a)

Problemas para exámenes (página 584)

23. a) C_n = \$15,000
b) \$31,365.90
25. 76,615, 102,025, 103,950, 129,052, 109,340, 79,618
27. \$18,000, \$16,500, … \$1,500
29. \$101,805.83
31. \$261,882.74
33. c)
35. a)
37. a)
39. b)
41. a)
43. d)
45. a)
47. a)
49. b)
51. a)
53. c)
55. b)

Apéndice

B

Tabla 1. Número de cada día del año

Tabla I

Con ésta se encuentra el número de días naturales entre dos fechas cualesquiera, considerando las siguientes dos situaciones:

a) **Las dos fechas corresponden a un mismo año**. Por ejemplo, para encontrar el tiempo en el que una inversión genera intereses, entre el 5 de abril y el 21 de septiembre siguiente, en la página 413 se aprecia que en el mes de la columna S, que corresponde a septiembre y el vigésimo primer renglón, que corresponde al vigésimo primer día del mes, está el número 264. De igual forma se ve que el 5 de abril es el día número 95 del año y, por lo tanto, el plazo es la diferencia:

$$264 - 95 = 169 \text{ días}$$

b) **Las dos fechas no corresponden a un mismo año**. Para obtener el número de días comprendidos entre el 7 de agosto y el 19 de marzo del año siguiente, se observa que la primera fecha corresponde al día número 219, y el 78 a la segunda. Entonces del número de días para un año no bisiesto, 365, se resta el día de la primera fecha, y el resultado se suma con el número de días de la segunda, es decir:

$$\begin{array}{r} 365 - 219 = 146 \\ +\ \ 78 \\ \hline 224 \end{array}$$

Pueden comprobarse estos dos resultados, como se estudió en el capítulo 3.

Tabla I

Número de cada día del año

Día del mes	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	Día del mes
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	$\boxed{95}$	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	$\boxed{264}$	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	*	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31

* Para años bisiestos, febrero tiene 29 días y el número de cada día a partir del 1 de marzo es uno más que el número dado en la tabla.

Índice analítico

Notas

Notas

Notas

Notas

Fórmulas

Enésimo término de las progresiones aritméticas.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ Página 65

Suma de los primeros términos de una serie aritmética.

$S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$ o $S_n = (n/2)\,[2a_1 + (n - 1)d]$ Página 67

Enésimo término de las progresiones geométricas.

$a_n = a_1(r^{n-1})$ Página 72

Suma de los primeros n términos de una serie geométrica.

$S_n = a_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$ o $S_n = a_1(n)$ Página 74

Intereses.

$I = M - C \qquad I = Cin$ Página 97

Fórmula del interés simple.

$M = C(1 + in)$ Página 98

Valor comercial de un documento con descuento simple.

$P = M(1 - nd) \qquad D = Mnd$ Página 114

Amortización de un crédito con interés simple.

$R = (C/2n)[(n + 1)i + 2]$ Página 134

Tasa de interés global total.

$g = (n + 1)(i/2)$ Página 136

Saldo insoluto en operaciones de crédito con interés simple.

$S = (n - k)\,(C/n)$ Página 137

Fórmula del interés compuesto.

$M = C(1 + i/p)^{np}$ Página 170

Tasa de interés efectiva, i es tasa nominal.

$e = (1 + i/p)^p - 1$ Página 181

Monto acumulado en una anualidad anticipada.

$M = R(1 + i/p)\left(\dfrac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)$ Página 236

Valor presente de una anualidad ordinaria.

$C = R\dfrac{1 - (1 + i/p)^{-np}}{i/p}$ Página 247

Valor presente de una anualidad anticipada.

$C = R(1 + i/p)\left(\dfrac{1 - (1 + i/p)^{-np}}{i/p}\right)$ Página 256

Monto acumulado de una anualidad ordinaria.

$M = R\left(\dfrac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p}\right)$ Página 257

Amortización constante de un crédito.

$R_1 = A(1 + ni)$ y $R_N = R_i - (N - 1)d$ Página 321

donde $A = C/np$ y $d = A(i/p)$

Intereses que se generan en la amortización constante.

$I = (Ci/2p)(np + 1)$ Página 324

Amortización de renta variable aritméticamente, gradiente.

$C = T(R_1) + V(d)$ donde $T = \dfrac{1 - (1 + i/p)^{-np}}{i/p}$ Página 330

y $V = \dfrac{1 - (1 + np(i/p))(1 + i/p)^{-np}}{(i/p)^2}$ Página 330

Amortización de renta variable geométricamente, serie en escalera.

$C = \left(\dfrac{R_1}{f - i/p}\right)\left(\left(\dfrac{1 + f}{1 + i/p}\right)^{np} - 1\right)$ Página 334

Monto acumulado en un fondo de renta variable aritméticamente.

$M = (1 + i/p)(A + B)$ donde Página 376

$A = R_1\dfrac{(1 + i/p)^{np} - 1}{i/p} \qquad B = d\left(\dfrac{(1 + i/p)^{np} - 1 - np(i/p)}{(i/p)^2}\right)$

Monto de un fondo de renta variable geométricamente.

$M = R_1\left(\dfrac{1 + i/p}{f - i/p}\right)\left[(1 + f)^{np} - (1 + i/p)^{np}\right]$ Página 381

Precio de mercado de las obligaciones y bonos.

$C = M(1 + i/p)^{-np} + R\left(\dfrac{1 - (1 + i/p)^{-np}}{i/p}\right)$ Página 412

Tasa aproximada de rendimiento promedio anual.

$I = \dfrac{2\left[R(np) - C + M\right]}{n(C + M)}$ Página 448

Tasa efectiva de rendimiento anual.

$i_e = (1 + i)^{365/q} - 1$ Página 458

Tasa efectiva de rendimiento mensual.

$i_e = (1 + i)^{30/q} - 1$ Página 458

Valor presente de un pago contingente.

$C = (p)(M)(1 + i)^{-n}$ Página 494

Probabilidad de alcanzar un año más de vida teniendo la edad x.

$P_x = l_{x+1}/lx$ Página 502

Probabilidad de alcanzar n años más de vida teniendo x años.

$nP_x = l_{x+n}/lx$ Página 503

Factor de actualización demográfico-financiera.

$nE_x = (nP_x)(1 + i)^{-n}$ o $nE_x = D_{x+n}/D_x$ Página 506

Valor actual de una anualidad contingente, con ventas vitalicias de $1.00.

$a_x = N_{x+1}/D_x$ y $\ddot{a}_x = \ddot{a}_x + 1$ Página 512

Depreciación anual en el método de la línea recta.

$R = \dfrac{C - C_n}{n}$ Página 534

Valor de rescate de un activo, con inflación en el método de la línea recta.

$C_n = C(1 + i)^n - R\left(\dfrac{(1 + i)^n - 1}{i}\right)$ Página 539

Valor contable de un activo que se deprecia con el método de la suma de dígitos.

$C_k = C - \dfrac{k(C - C_n)}{2S}(2n - k + 1)$ Página 554

Valor en libros de un activo que se deprecia con el método de la tasa fija.

$C_k = C(1 - d)^k$ donde $d = 1 - \sqrt[n]{C_n / C}$ Página 562

Depreciación de un activo con el método del fondo de amortización.

$R = \dfrac{(C - C_n)d}{(1 + d)^n - 1}$ Página 573